LABORATORIO DI VISIONE ARTIFICIALE
Tel. 0382/391372 Telefax 0382/412881

Tecniche e Strumenti per l'Elaborazione di Immagini ed il Riconoscimento di Forme

Parte I: Livello Basso e Intermedio

4a.

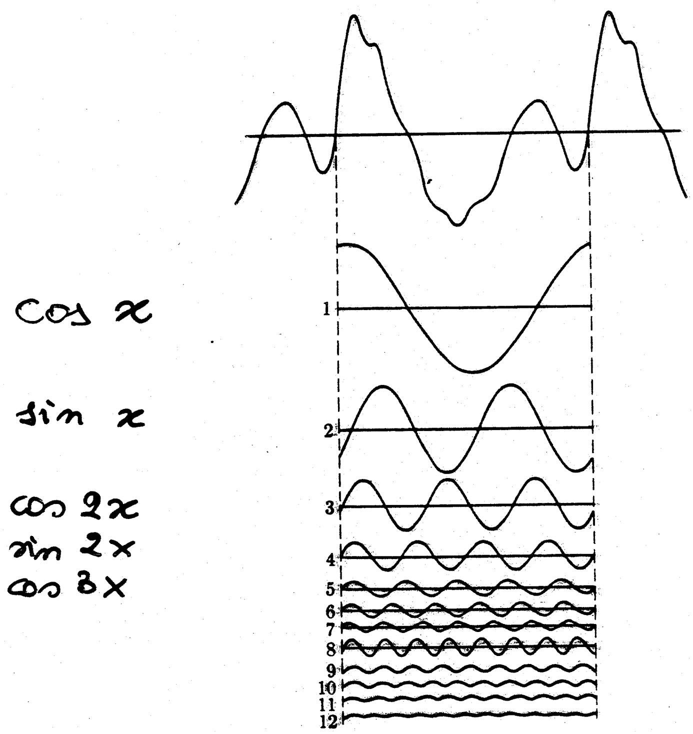
16 ottobre 1989
c/o SPERONI Spa, Spessa Po

M. Ferretti:

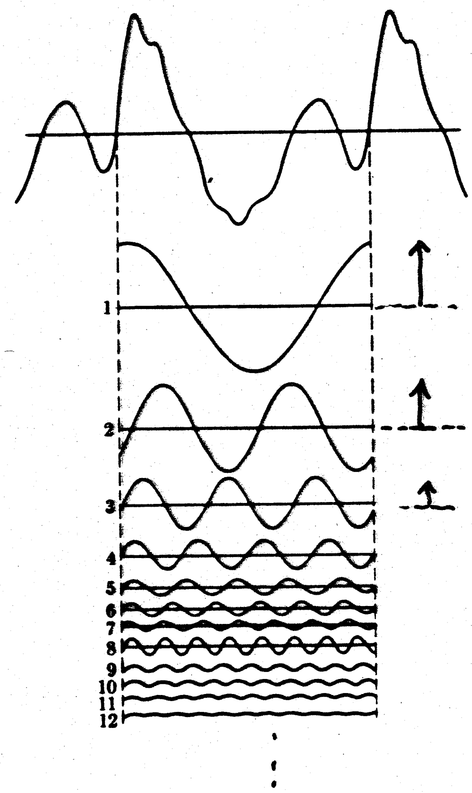
Trasformate digitali: Fourier, Hadamard, Haar, Walsh

Dipartimento di Informatica e Sistemistica, Università degli Studi di Pavia

La rappresentazione di FOURIER



La rappresentazione di FOURIER



cos x — $a_1 = \int f(x) \cos x$

sin x — $b_1 = \int f(x) \sin x$

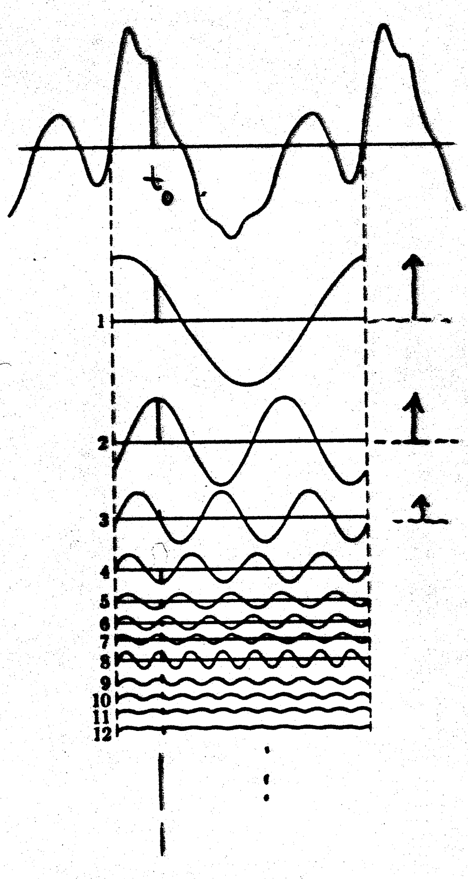
cos $2x$ — $a_2 = \int f(x) \cos 2x$

sin $2x$

cos $3x$

⋮

La rappresentazione di FOURIER



$$a_0 = \int f(x)$$

cos x $\qquad a_1 = \int f(x) \cos x$

sin x $\qquad b_1 = \int f(x) \sin x$

cos $2x$ $\qquad a_2 = \int f(x) \cos 2x$

sin $2x$

cos $3x$

$\vdots$

$$f(t_0) = a_0 + a_1 \cos t_0 + j\, b_1 \sin t_0 +$$
$$+ \quad a_2 \cos 2t_0 + j\, b_2 \sin 2t_0 +$$
$$+ \quad a_3 \cos 3t_0 + j\, b_3 \sin 3t_0 +$$
$$+ \ldots$$

TRASFORMATE BI-DIMENSIONALI UNITARIE

DEFINIZIONI

$F(n_1, n_2)$ $\quad 1 \le n_1, n_2 \le N_1, N_2$ $\quad$ immagine

$\hat{F}(m_1, m_2)$ $\quad 1 \le m_1, m_2 \le M_1, M_2$ $\quad$ trasformata

$A(n_1, n_2; m_1, m_2)$ $\quad$ (kernel) matrice di trasform. diretta

$B(m_1, m_2; n_1, n_2)$ $\quad$ inversa

$$\hat{F}(m_1, m_2) = \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} F(n_1, n_2)\, A(n_1, n_2; m_1, m_2)$$

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{A}\mathbf{F}$$

$$F(n_1, n_2) = \sum_{m_1=1}^{M_1} \sum_{m_2=1}^{M_2} \hat{F}(m_1, m_2)\, B(m_1, m_2; n_1, n_2)$$

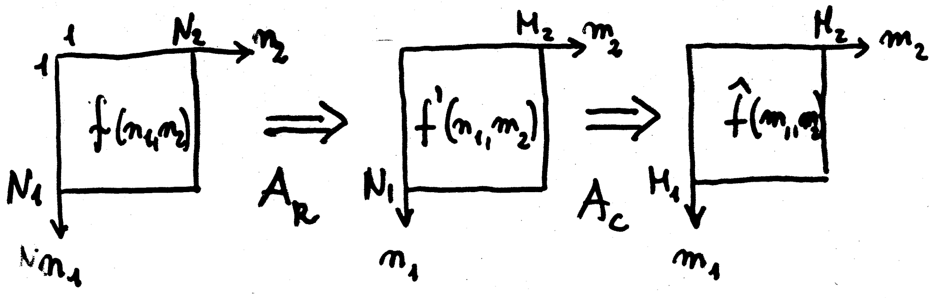
$$\mathbf{F} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{F}}$$

dove $A = B^{-1}$

e $\quad A^{-1} = A^{*T}$ $\quad$; se A è reale

$$A^{-1} = A^T$$

Separabilità $\quad A = A_C A_R$



$$\hat{F}(m_1, m_2) = \sum_{n_1=1}^{N_1} \left\{ \sum_{n_2=1}^{N_2} F(n_1, n_2)\, A_R(n_2, m_2) \right\} A_C(n_1, m_1)$$

TRASFORMATE BI-DIMENSIONALI UNITARIE

INTERPRETAZIONI

1) Decomposizione di un'immagine in uno spettro generalizzato. Ogni valore della trasformata è l'energia associata a quella componente dello spettro

Caso di Fourier (seni/coseni)

Rappresentazione usata per

- filtraggio
- codifica e compressione

2) Rotazione multidimensionale di coordinate che preserva la "misura"

$$\int |F_1 - F_2|^2 = \int |\hat{F}_1 - \hat{F}_2|^2$$

3) Sintesi di immagini con un insieme di <u>funzioni di base</u>

LA TRASFORMATA DI FOURIER

continuo $\hat{F}(u,v) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\, e^{-j2\pi(ux+vy)}\, dx\,dy$

DISCRETO immagine $N \times N$ $(0 \leq i \leq N-1, 0 \leq k \leq N-1)$

$$\hat{F}(u,v) = \frac{1}{N} \sum_{0\,i}^{N-1} \sum_{0\,k}^{N-1} F(i,k)\, \underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{N}(ui+vk)}}_{A(i,k;\,u,v)}$$

u,v : frequenze spaziali

$$A(i,k;u,v) = \exp\left\{-\frac{2\pi}{N} j\,(ui+vk)\right\} = \cos\frac{2\pi}{N}(ui+vk) + j\sin\frac{2\pi}{N}(ui+vk)$$

Kernel nucleo, matrice di trasformazione diretta

$\hat{F}(0,0)$ è la "continua"

$\hat{F}(0,0) = \frac{1}{N} \sum\sum F(i,k)$ è proporzionale al valor medio

$|\hat{F}(u,v)|$ è lo SPETTRO di FOURIER

LA TRASFORMATA DI FOURIER

Separabilità $\qquad \hat{F} = AF$

$$A(i,k;u,v) = \exp\left\{-\frac{2\pi}{N} j\,(ui + vk)\right\}$$

$$\hat{F} = AF \quad ; \qquad A = A_C\, A_R$$

$$A_C = A_R = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \cdots & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & \cdots & W^{N-1} \\ W_0 & W_0^2 & W_0^4 & \cdots & W^{2(N-1)} \\ \cdots & \cdots & & & \cdots \\ \cdots & & & & \\ W^0 & \cdots & & & W^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

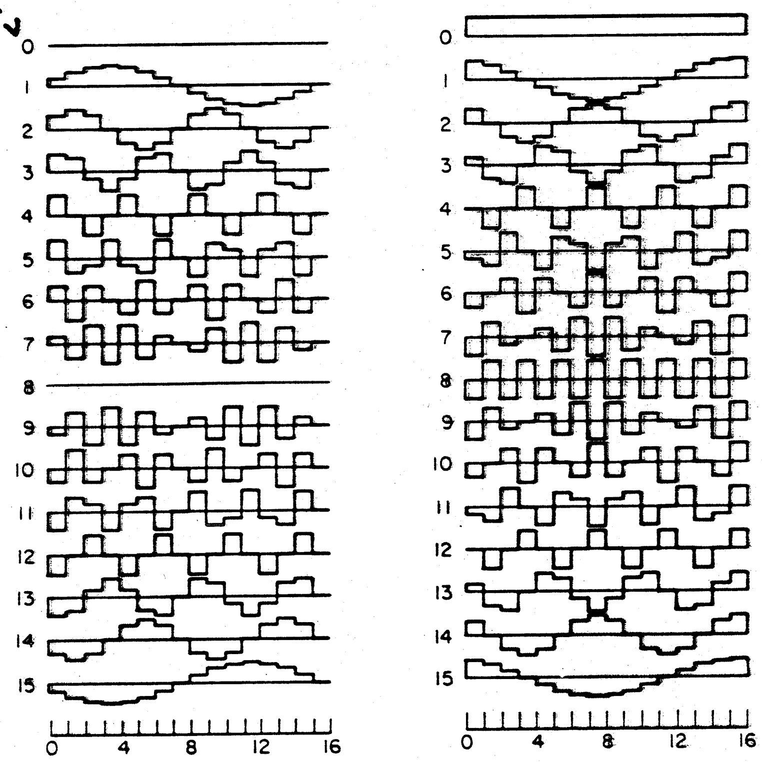
dove $\quad W = \exp\left\{-\frac{2\pi}{N} j\right\}$

TRASFORMATE DIGITALI

TRASFORMATA DISCRETA DI FOURIER

Le approssimazioni discrete delle funzioni base (seno e coseno) nel caso $N=16$

numero d'onde



(a) componenti seno

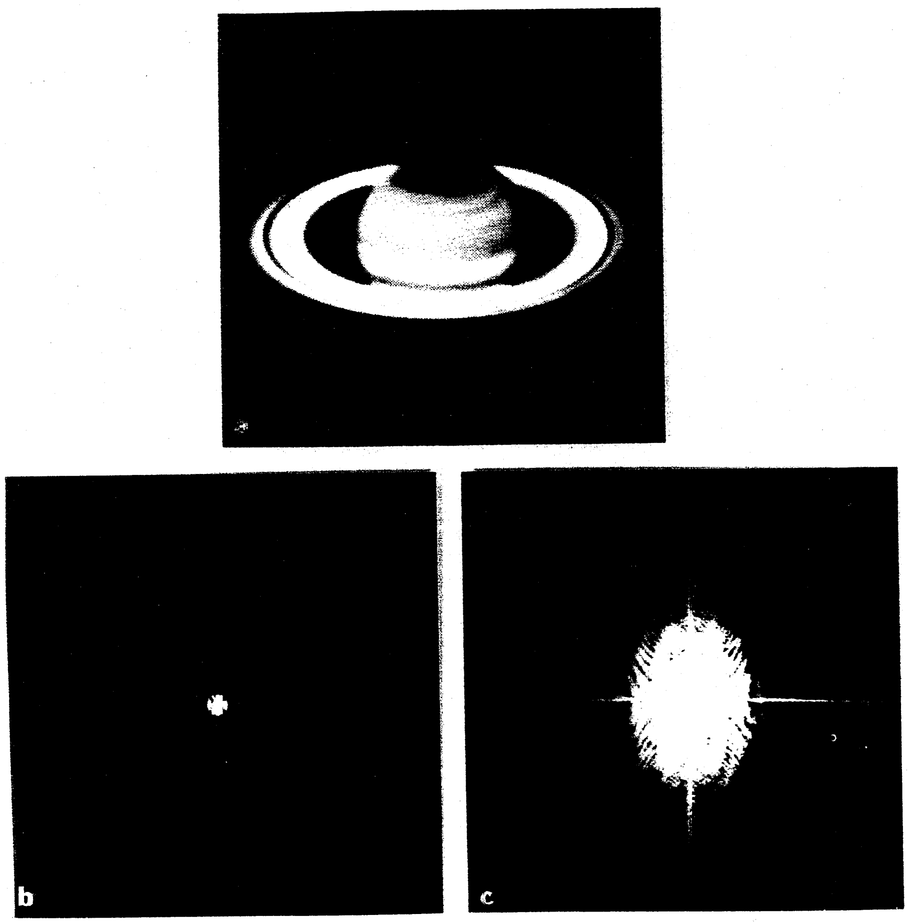
(b) componenti coseno

TRASFORMAZIONE LOGARITMICA DELLO SPETTRO

a) $F(x,y)$

b) $|\hat{F}(u,v)|$

c) $\log(1+|\hat{F}(u,v)|)$



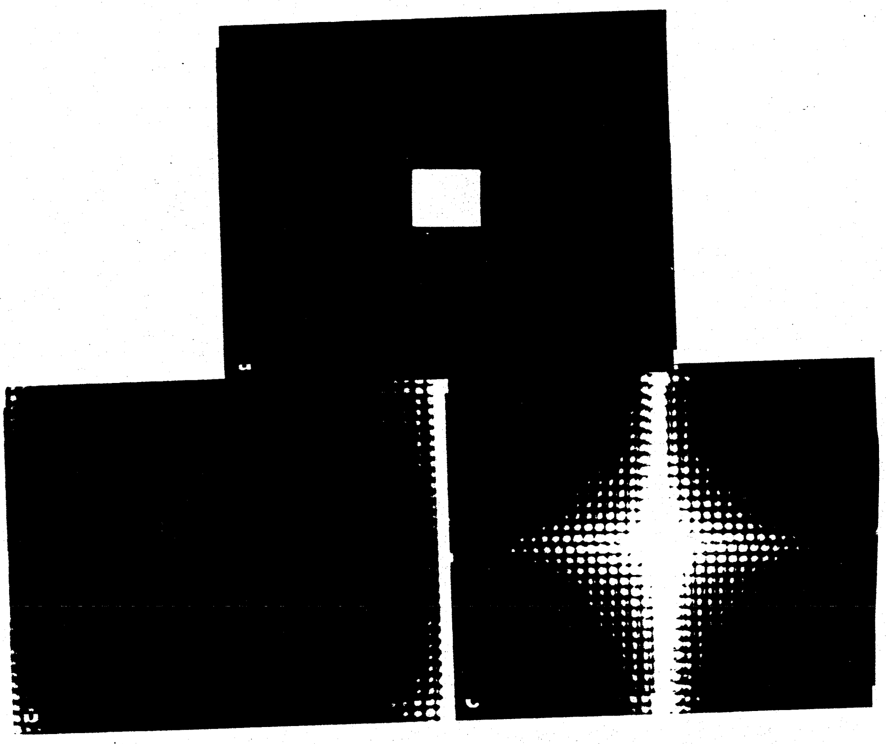
TRASLAZIONE E PERIODICITA'

$$F(x-x_0, y-y_0) = \hat{F}(u,v)\, e^{-j2\pi(ux_0+vy_0)}$$

$$\hat{F}(u-u_0, v-v_0) = F(x,y)\, e^{-j2\pi(u_0x+v_0y)}$$

traslazione

l'immagine traslata ha lo stesso SPETTRO ($|e^{j\alpha}|=1$)



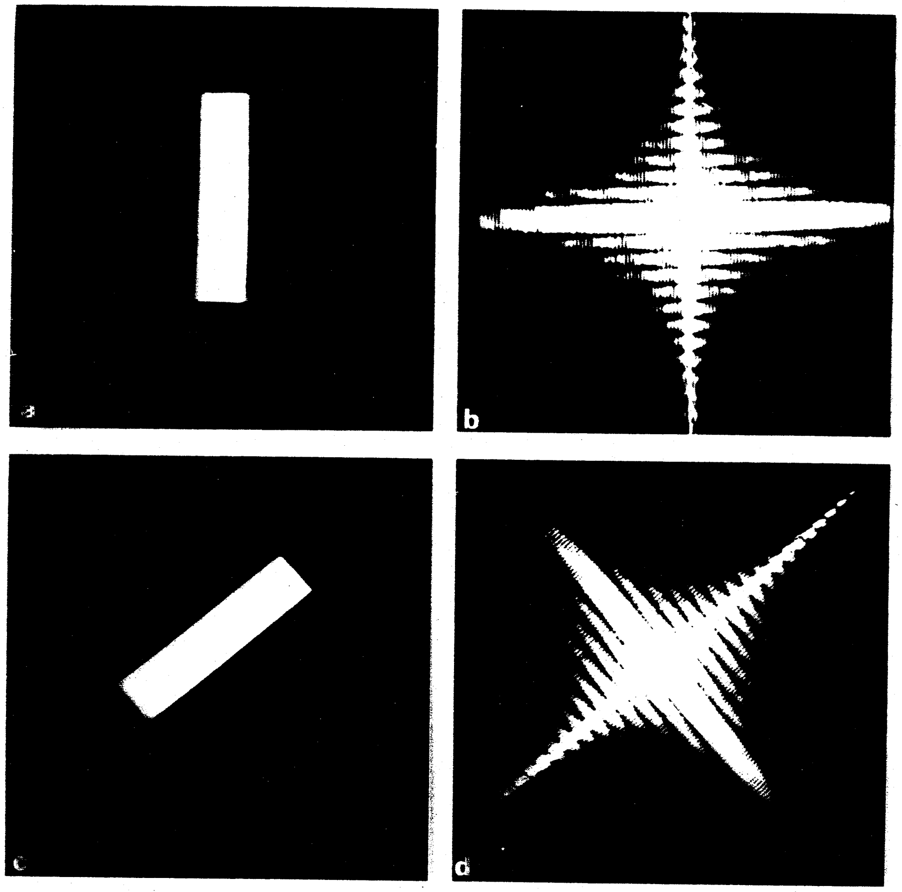
Nel discreto, con N campioni

$$\hat{F}(u,v) = \hat{F}(u+N, v) = \hat{F}(u, v+N) = \hat{F}(u+N, v+N)$$

SIMMETRIA CONIUGATA

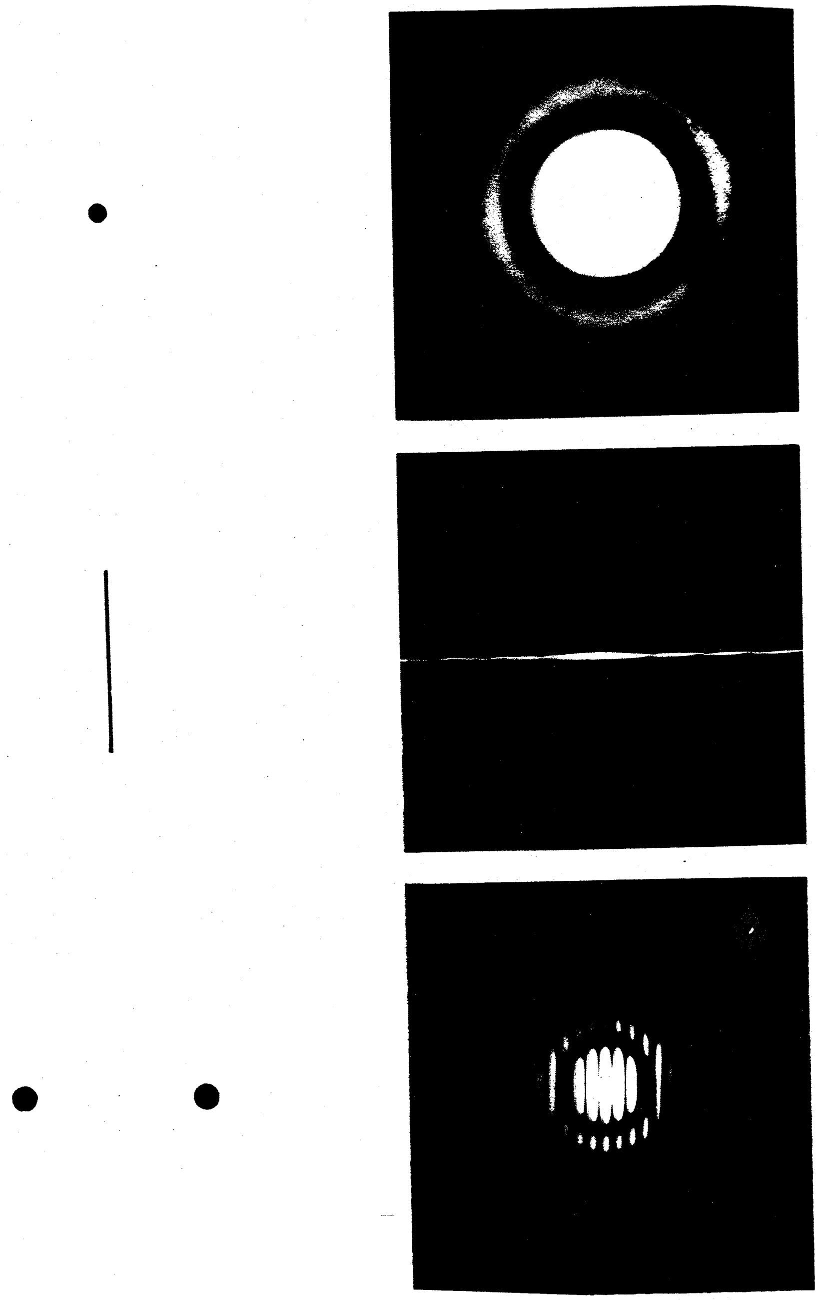
$$\hat{F}(u,v) = \hat{F}^*(-u,-v) \quad \Rightarrow \quad |\hat{F}(u,v)| = |\hat{F}(-u,-v)|$$

ROTAZIONI



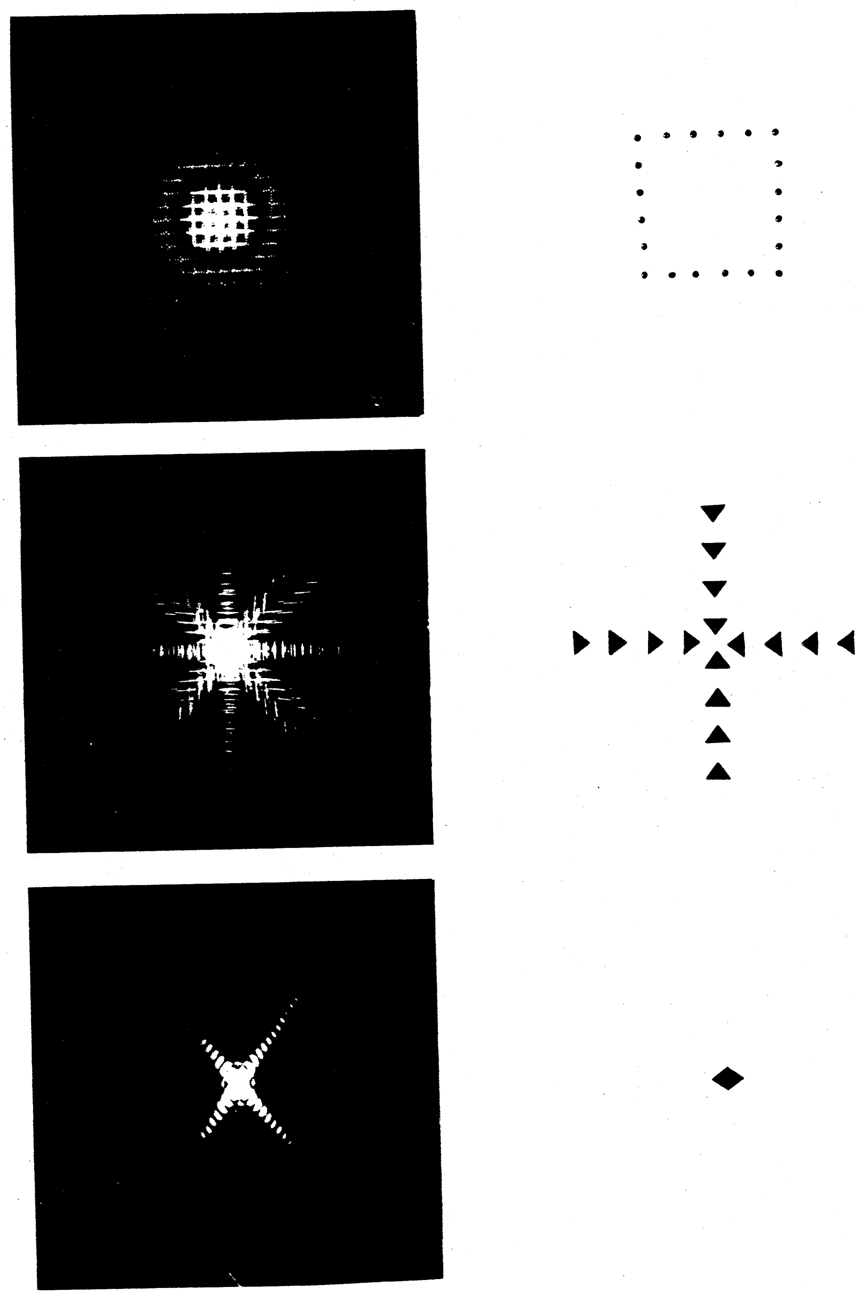
TRASFORMATA DI FOURIER

ESEMPI



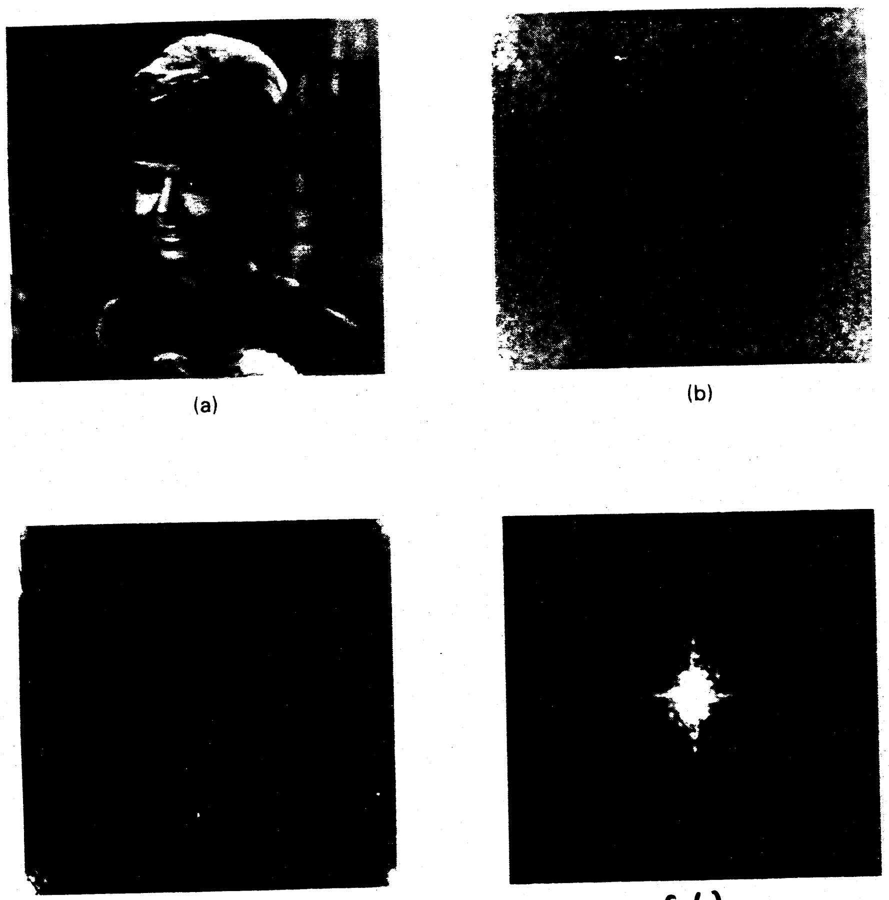
TRASFORMATA DI FOURIER

ESEMPI



TRASFORMATE DIGITALI

TRASFORMATA DI FOURIER



(a) (b) (c) (d)

a) immagine $F(x,y)$

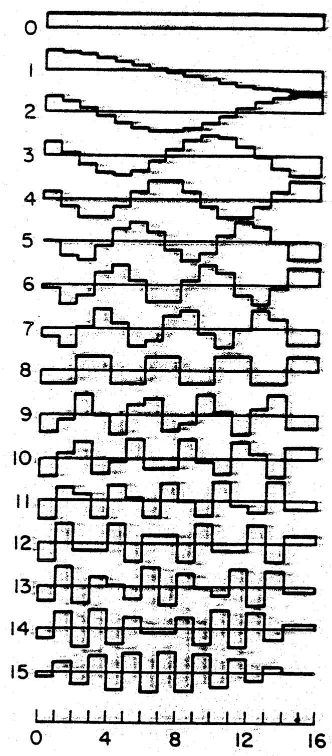
b) $|\hat{F}(u,v)|$

c) $lg(1+|\hat{F}(u,v)|$

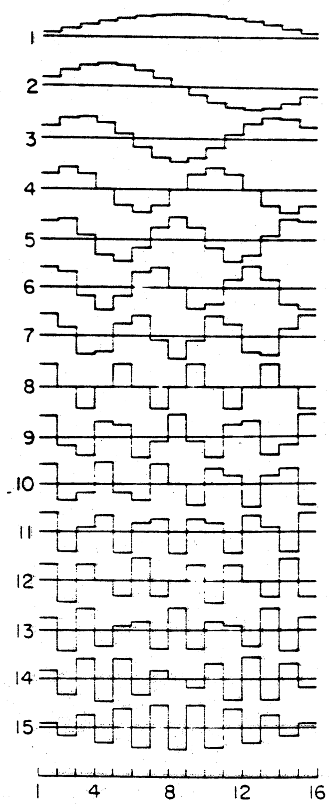
d) riordinata

TRASFORMATE DIGITALI

Basi delle
TRASFORMATA DISCRETA
COSENO

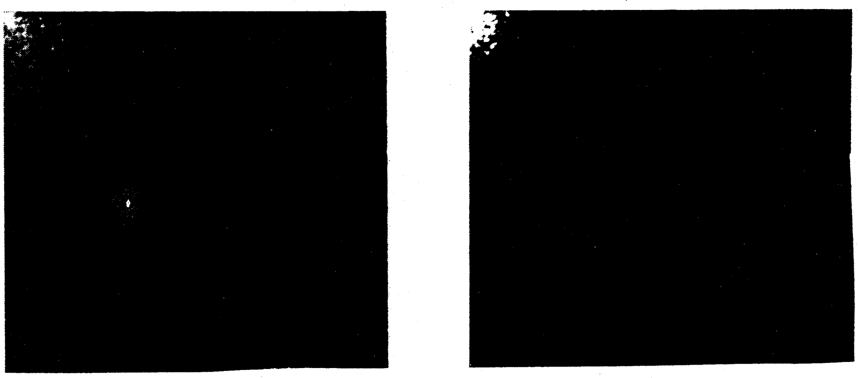


Basi delle
TRASFORMATA DISCRETA
SENO



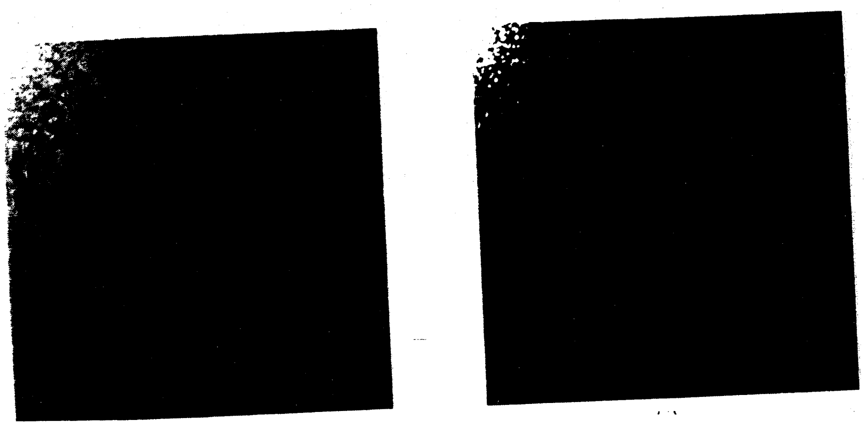
TRASFORMATA COSENO

(a)



TRASFORMATA SENO

(a)



La Trasformata di HADAMARD

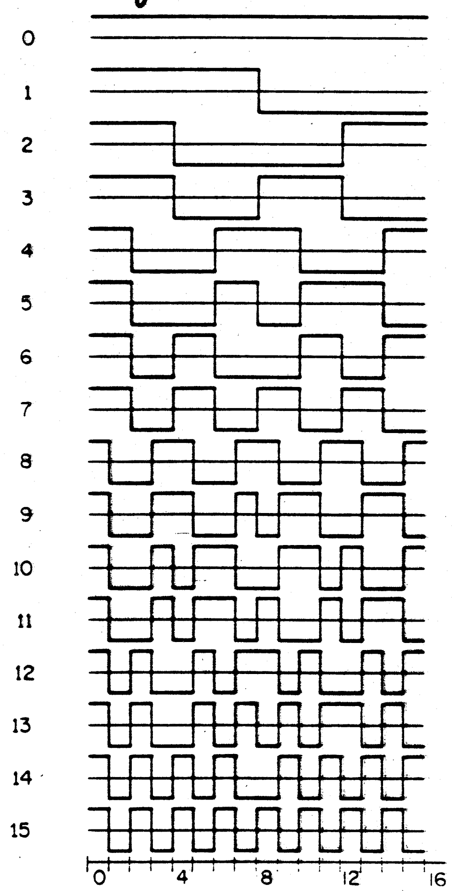
$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}$$

$$H_4 = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

$$H_8 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} 0 \\ 7 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \\ 5 \end{array}$$

numero dei cambiamenti di segno lungo la riga

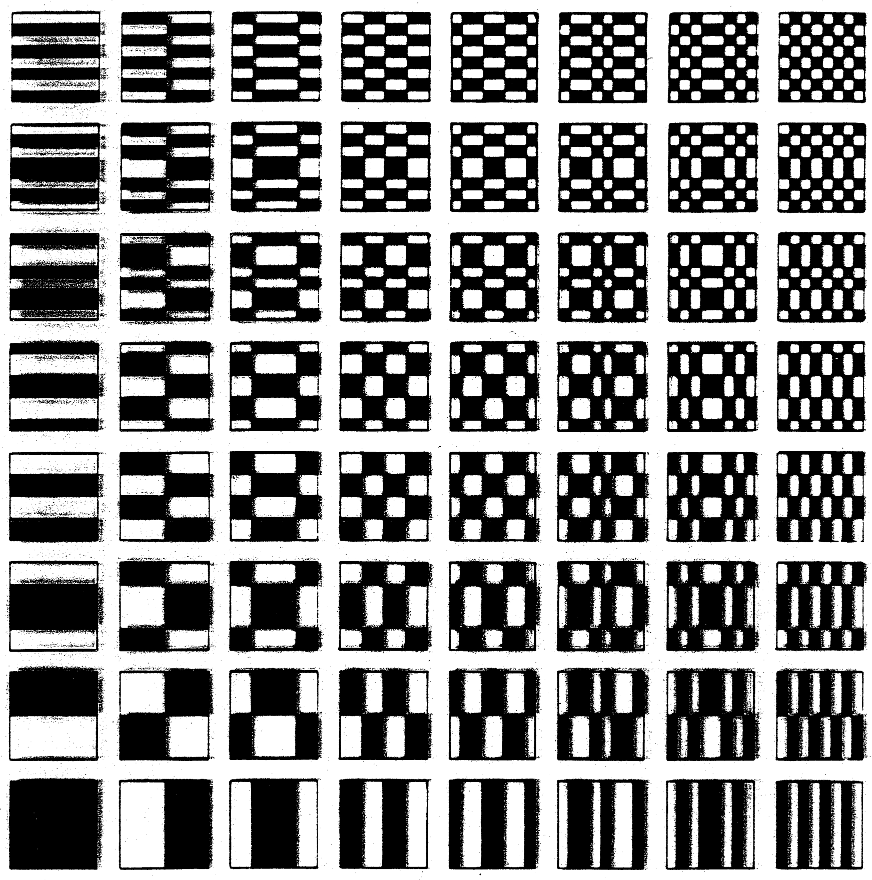
Funzioni "base" ordinate per numero di cambiamenti di segno



TRASFORMATE DIGITALI

TRASFORMATA DI HADAMARD BIDIMENSIONALE DISCRETA

Le funzioni base



N=8

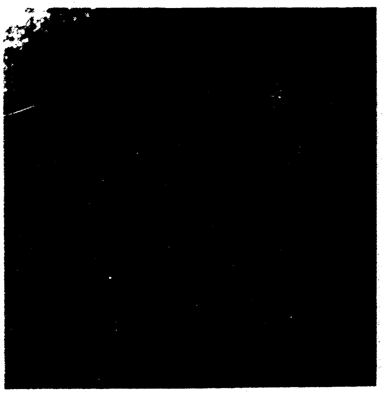
nero +1

bianco -1

TRASFORMATE DI HADAMARD

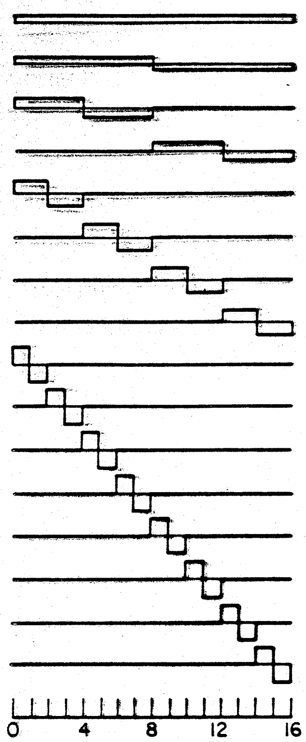
(a)

(b)



(c)

La trasformata di HAAR



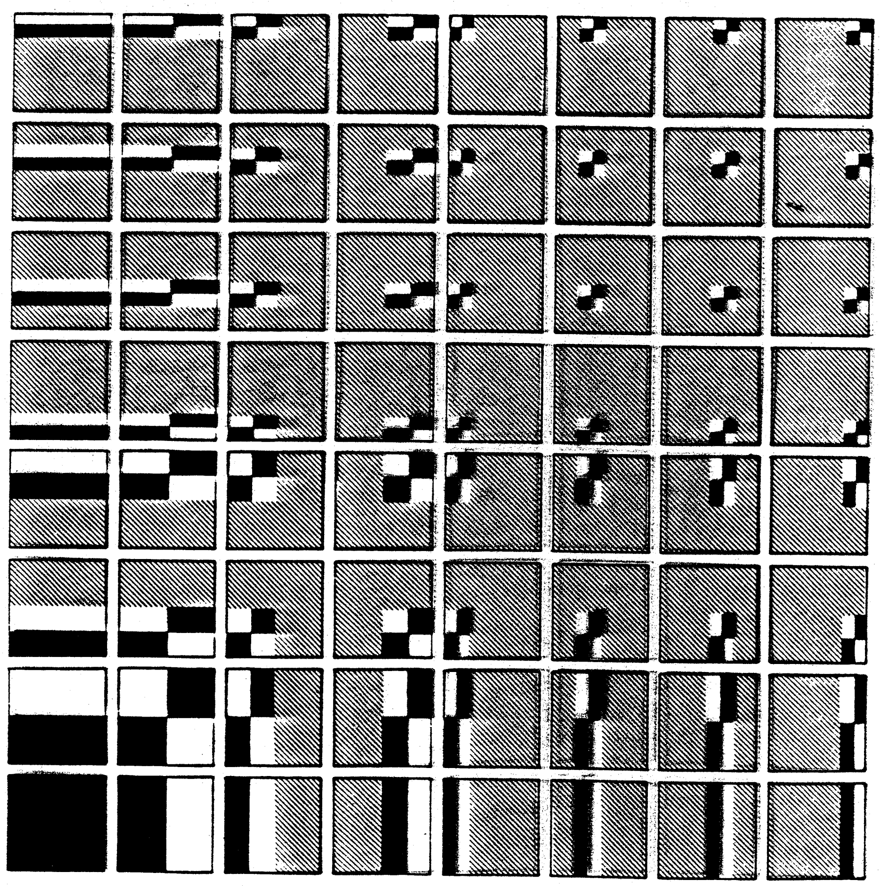
basi mono-D

N=16

Nero +1

grigio 0

bianco -1



basi 2-D

N=8

(a)