

# Trasformata di Hough

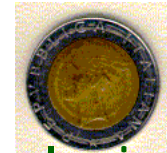




# Riconoscimento di forme

Trasformata di Hough

- ◆ Il problema fondamentale nella visione artificiale è il riconoscimento di oggetti
- ◆ Soluzione intuitiva:
  - Uso un modello (template)
  - Il modello scorre sull'immagine e lo si confronta con l'immagine sottostante



Si minimizza una funzione errore

$$E(y, x) = \sum_{i, j} (I(y + i, x + j) - T(i, j))^2$$

$$E(y, x) = \sum_{i, j} |I(y + i, x + j) - T(i, j)|$$



# Riconoscimento di forme

- ◆ In generale è un problema difficile
  - Gli oggetti subiscono traslazioni
  - Gli oggetti variano per colore
  - Gli oggetti subiscono rotazioni
  - Gli oggetti subiscono cambiamenti di scala



Trasformata di Hough



# Riconoscimento di forme

Trasformata di Hough

- Gli oggetti sono spesso occlusi
- Le acquisizioni sono rumorose





# Trasformata di Hough

◆ Una delle soluzioni proposte è la

## Trasformata di Hough

- La HT nella sua formulazione originaria (primi anni 60) permette di individuare forme descritte da equazioni analitiche (prima è stata introdotta per le rette, poi per i cerchi, le parabole, ecc.)
- La HT è parzialmente insensibile alle occlusioni (e al rumore)
- La HT trasforma il problema della ricerca di una curva nella più semplice ricerca di massimi



# Trasformata di Hough

Trasformata di Hough

- ◆ In generale una curva piana è definita in forma analitica tramite un insieme (limitato se è semplice) di parametri.
- ◆ Una equazione lega i parametri alle coordinate cartesiane
  - $f((x,y), (a_1, a_2, \dots, a_n))=0$ 
    - $(x,y)$  è un punto della curva nello spazio immagine
    - $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  è una n-upla di valori che individuano un punto nello spazio dei parametri
- ◆ Un punto nello spazio dei parametri individua univocamente una curva analitica



# HT: proprietà

- ◆ Ogni punto nello **Spazio Immagine (SI)** corrisponde ad una ipersuperficie (superficie generalizzata) nello **Spazio dei Parametri (SP)**
  - ◆  $n$  punti nello SI appartenenti ad una stessa curva generano  $n$  superfici che si intersecano in uno stesso punto in SP
- esistono poi due proprietà duali**
- ◆ Ogni punto nello SP corrisponde ad una singola istanza della curva nello SI
  - ◆  $n$  punti nello SP appartenenti ad una stessa ipersuperficie corrispondono a  $n$  curve che si intersecano in uno stesso punto in SI



# HT: esempio rette

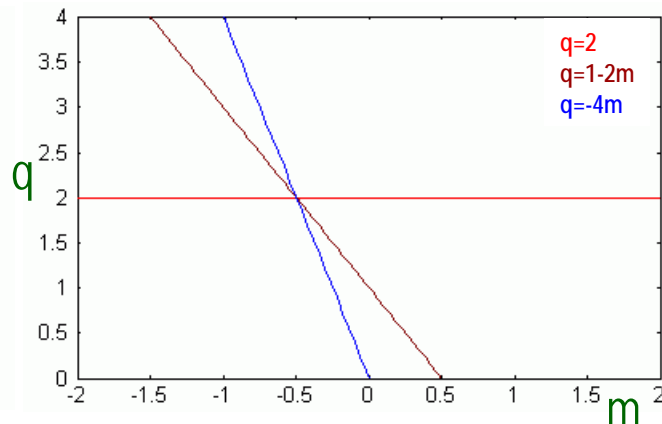
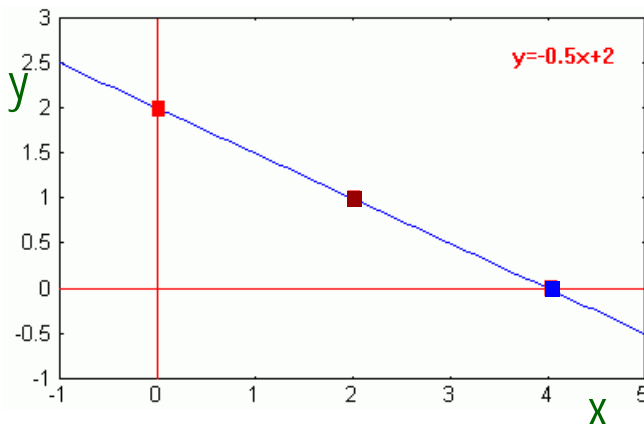
## ◆ Equazione classica della retta

$$y = mx + q$$

- può essere riscritta come

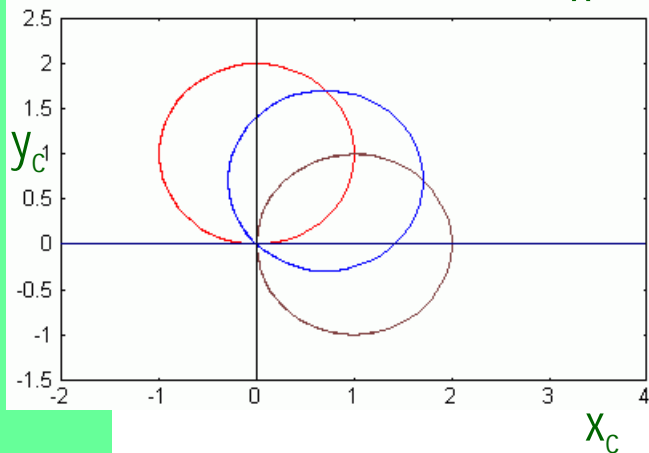
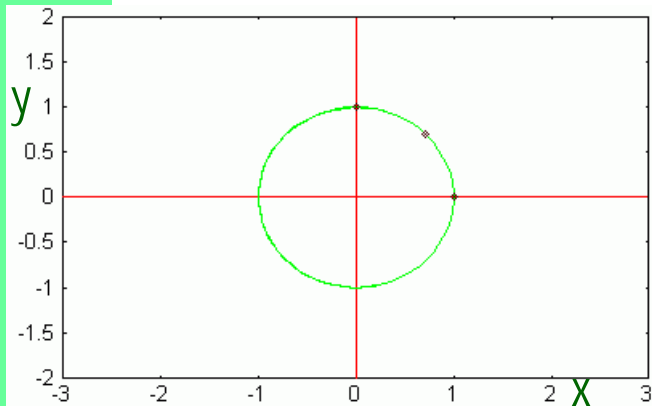
$$f((x,y), (m,q)) = y - mx - q = 0$$

- ◆ Fissato un punto  $(x_i, y_i)$  nello SI l'equazione  $q = y_i - mx_i$  descrive la curva (che rimane ancora una retta)





# HT: esempio cerchio



$$(y-y_c)^2+(x-x_c)^2=r^2$$

- ◆ Primo approccio: ricerca di cerchi di raggio noto, in questo caso lo SP è bidimensionale e la curva generata da ogni punto nello SI è essa stessa un cerchio.

**N.B.** è raro che a una curva corrisponda la stessa curva nello SP

- ◆ Lo spazio dei parametri è generato dalle coordinate del centro  $(x_c, y_c)$

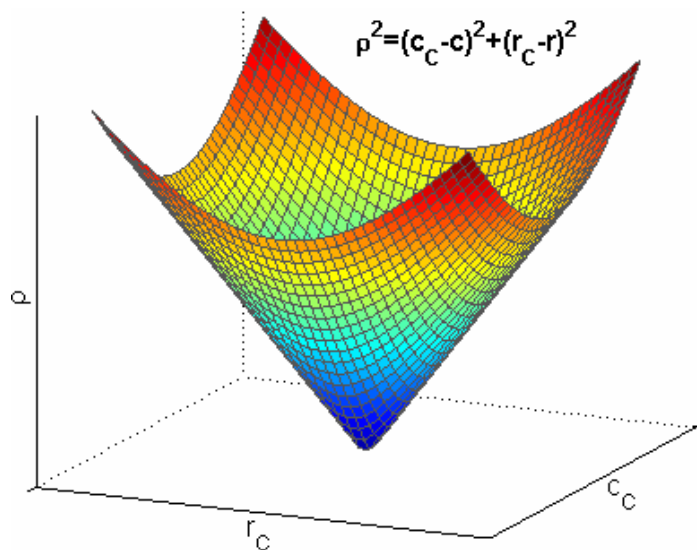


# HT: esempio cerchio

- ◆ Caso generale: anche il raggio è incognito. In questo caso lo SP è tridimensionale:

$$f((c,r),(c_c,r_c),\rho) = (r-r_c)^2+(c-c_c)^2-\rho^2=0$$

- ◆ La curva generata in questo caso è un cono





# Ricerca di curve

Trasformata di Hough

- ◆ Ogni punto nello SI genera una superficie nello SP
- ◆ Quindi nello SP una intersezione di molte superfici è l'indizio della presenza di una particolare istanza della curva analitica cercata  
**In generale occorrerà un numero di punti almeno pari al numero dei parametri per individuare una curva (cioè le sue caratteristiche)**
- ◆ La HT permette perciò di convertire un problema di ricerca di curve in quello più semplice di ricerca di intersezioni



# Ricerca di rette

- ◆ L'equazione classica della retta presenta dei problemi perché:

$$-\infty < m, q < +\infty$$

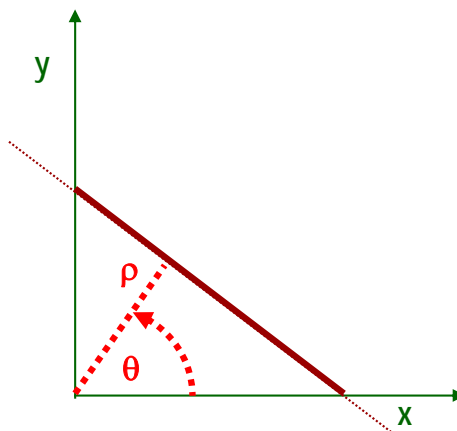
- ◆ Lo spazio immagine per immagini reali è ovviamente limitato (per esempio 256x256)
- ◆ Allo stesso modo sarebbe auspicabile che anche lo spazio dei parametri fosse limitato



# Ricerca di rette

- ◆ Per ovviare al problema descritto si usa una diversa rappresentazione della retta:

$$\rho = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$$

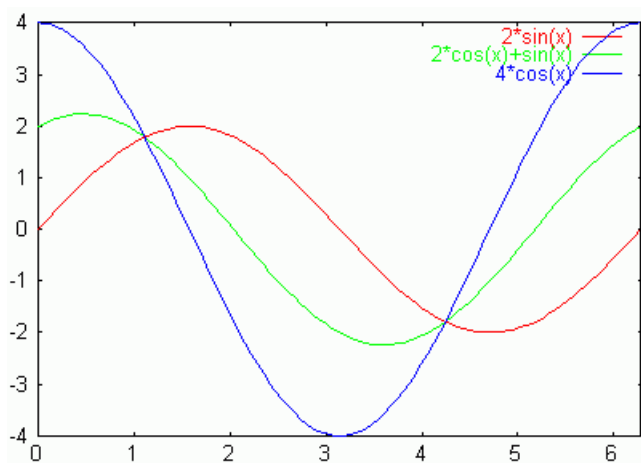




# Ricerca di rette

- ◆ Con questa parametrizzazione i parametri risultano limitati:

$$(-R\sqrt{2}) \leq \rho \leq R\sqrt{2}; 0 \leq \theta < 2\pi$$

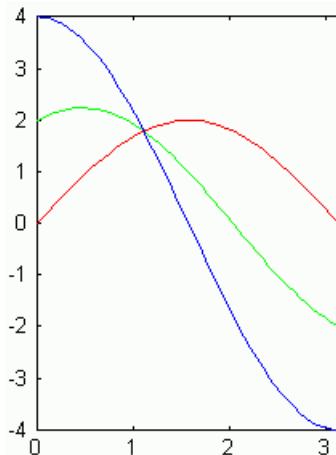




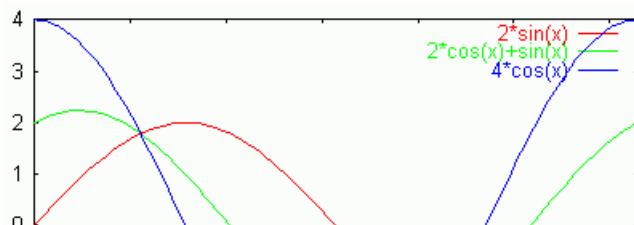
# Ricerca di rette

Trasformata di Hough

◆ In questo caso i parametri risultano limitati:



$$-R\sqrt{2} \leq \rho \leq R\sqrt{2}; 0 \leq \theta < \pi$$



$$0 \leq \rho \leq R\sqrt{2}; 0 \leq \theta < 2\pi$$



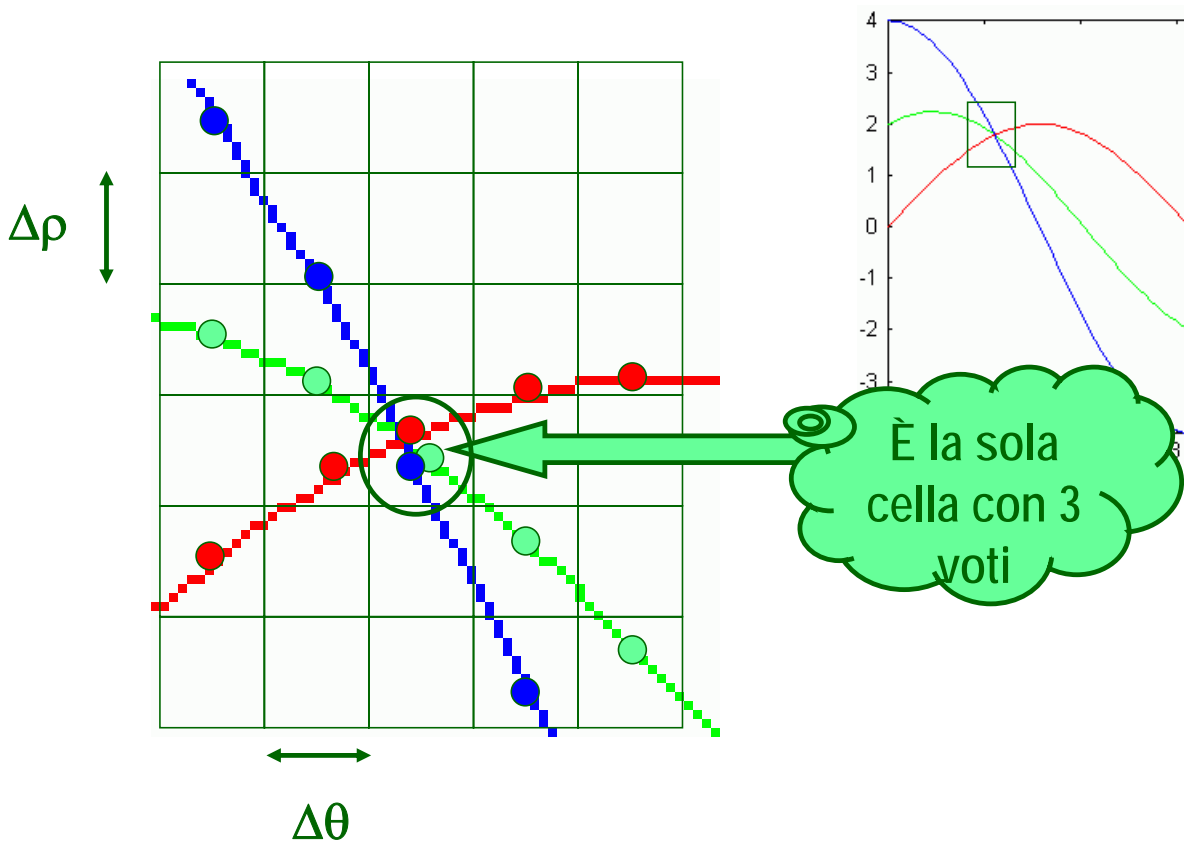
# Il processo di voto

- ◆ Da un punto di vista implementativo occorre discretizzare lo SP in celle (n-dimensionali)
- ◆ La dimensione delle celle dipende dalla precisione minima richiesta.
- ◆ Ogni cella corrisponde ad una istanza (quantizzata) della curva
- ◆ Dato un punto di contorno nello SI si incrementa ogni cella intersecata dalla superficie generata (**processo di voto**)
- ◆ Ogni cella dello SP misura perciò il numero di contributi al riconoscimento della curva corrispondente



# Il processo di voto

Trasformata di Hough





# Il processo di voto

- ◆ I voti si possono 'pesare' in base alla significatività
- ◆ La ricerca dei massimi può essere sufficiente per stabilire la presenza della curva cercata
- ◆ La soglia può essere fissata anche con criteri teorici: valore aspettato e rapporto S/N (rapporto segnale/rumore)
- ◆ La soglia deve comunque rappresentare un compromesso fra il rischio di non rilevare oggetti presenti e quello di ottenere falsi positivi



# Algoritmo per la HT

- ◆ Definisci un accumulatore  $A(\theta, \rho)$  di dimensioni opportune
  - ◆ Inizializza  $A(\theta, \rho)$  a 0
  - ◆ Per ogni punto dell'immagine significativo
    - incrementa tutti i punti dell'accumulatore corrispondenti
  - ◆ Seleziona i massimi locali dell'accumulatore che corrispondono a punti appartenenti alla stessa curva presenti nell'immagine
- Nel caso di ricerca di rette i valori dell'accumulatore sono una misura del numero di punti allineati sulla retta corrispondente**



# Algoritmo per la HT

Trasformata di Hough

- ◆ Una soglia opportuna viene usata per stabilire la presenza della curva cercata
- ◆ Solitamente solo poche celle superano tale criterio
- ◆ Ognuna di queste celle può essere considerata come la prova della presenza nell'immagine di una istanza della curva cercata
- ◆ La soglia può essere fissata anche con criteri teorici (es. cerchi)
- ◆ La soglia deve comunque rappresentare un compromesso fra il rischio di non rilevare oggetti presenti e quello di ottenere falsi positivi



# Uso del gradiente

- ◆ Gli operatori differenziali (Sobel per esempio) producono anche informazioni sulla direzione del gradiente
- ◆ Questo ulteriore dato permette di ridurre di uno i gradi di libertà nello SP (cioè il numero di parametri indipendenti)
- ◆ Esempi:

$$\text{retta: } \rho = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$$

si vota solo il punto  $(\rho, \theta)$

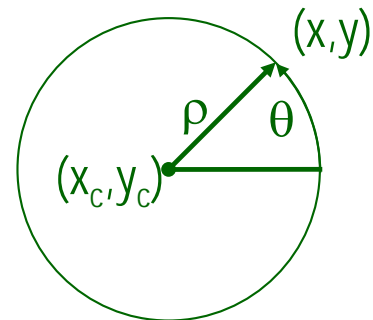
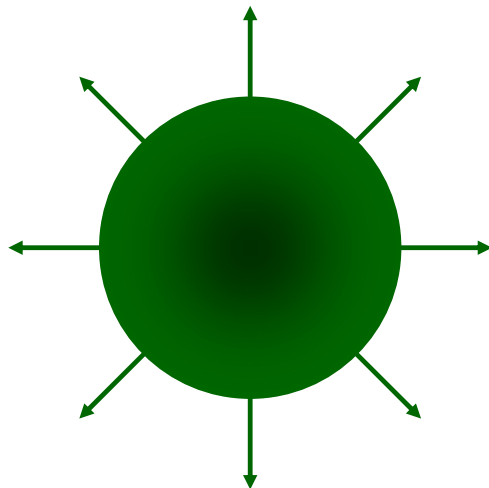
$$\text{cerchio: } x_c = x - \rho \cos(\theta); y_c = y - \rho \sin(\theta)$$

si vota solo il punto  $(x_c, y_c)$



# Esempio cerchio

Trasformata di Hough



$$x_c = x - \rho \cos(\theta)$$
$$y_c = y - \rho \sin(\theta)$$



# Uso del gradiente

- ◆ Nel caso in cui la curva sia descritta da due soli parametri ad ogni punto dello SI corrisponde un solo punto nello SP
- ◆ In questo caso si sono perciò ridotti di molto il numero dei voti dispersi
- ◆ Sono perciò presenti solo i punti che corrispondono effettivamente a curve nell'immagine e pochi altri di rumore
- ◆ Il rapporto segnale-rumore è perciò migliorato



# Algoritmo per la HT

- ◆ Definisci un accumulatore  $A(\theta, \rho)$  di dimensioni opportune
- ◆ Inizializza  $A(\theta, \rho)$  a 0
- ◆ Per ogni punto dell'immagine significativo
  - incrementa il punto dell'accumulatore corrispondente (uno solo! Ovviamente vale solo per rette e cerchi)
- ◆ Seleziona i massimi locali dell'accumulatore



# Trasformata di Hough generalizzata

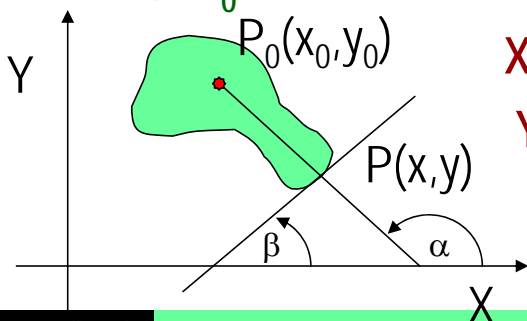
- ◆ L'aspetto cruciale della trasformata di Hough, per come è stata presentata, consiste nella limitazione imposta dal considerare un'espressione analitica come modello parametrico della forma da riconoscere.
- ◆ Il problema principale è legato al fatto che al crescere della complessità della curva si ha una ovvia crescita nel numero dei parametri.
- ◆ La soluzione al problema consiste in una generalizzazione del modello che descrive la forma, con l'obiettivo di superare i limiti di una descrizione puramente analitica, per la quale si ha una crescita di SP all'aumentare della complessità della forma. E' stata allora introdotta la cosiddetta trasformata di Hough generalizzata (GHT), basata proprio sulla definizione di un modello generalizzabile a forme arbitrarie lasciando comunque limitato il numero di parametri necessari.



# Trasformata di Hough generalizzata

Trasformata di Hough

- ◆ La HT è generalizzabile sotto l'ipotesi di corpo rigido, a oggetti di forma arbitraria
- ◆ Come prima ipotesi consideriamo fissi scala e rotazione
- ◆ Occorre scegliere un punto di riferimento  $P_0(x_0, y_0)$  (non necessariamente il baricentro, né appartenente all'oggetto)
- ◆ Il generico punto di contorno  $P(x, y)$  può essere riferito a  $P_0$ :



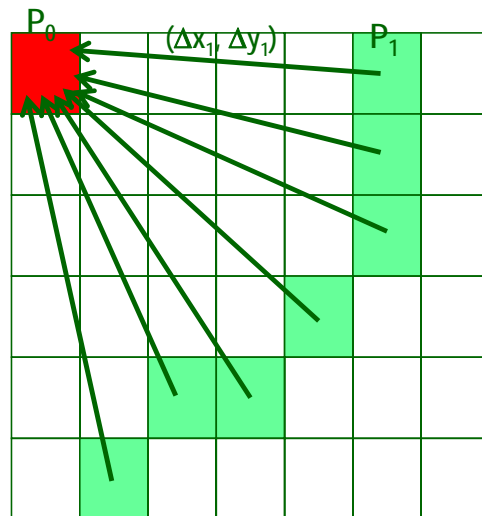
$$X_0 = x + R \cos(\alpha)$$

$$Y_0 = y + R \sin(\alpha)$$



# La tabella di riferimento

Trasformata di Hough



$$P_0 - P_i = (\Delta x_i, \Delta y_i) = (\rho_i, \alpha_i)$$



# Tabella-R

- ◆ Si costruisce una tabella che contiene la posizione del punto di riferimento in termini del gradiente di ogni punto di bordo

Direzione del contorno	Posizione del punto di riferimento
$\beta_1$	$\rho_1 \alpha_1$
$\beta_2$	$\rho_2 \alpha_2$
...	...
$\beta_i$	$\rho_i \alpha_i$
...	...
$\beta_N$	$\rho_N \alpha_N$



# Trasformata di Hough generalizzata

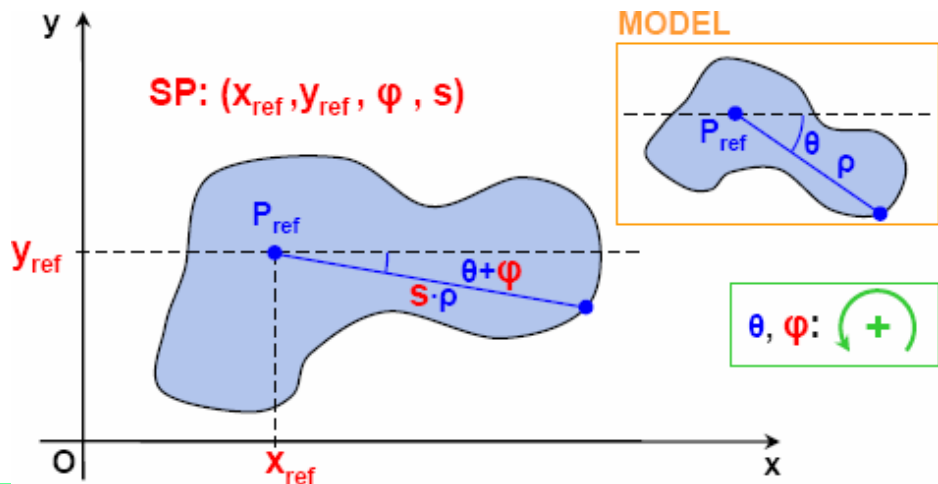
Trasformata di Hough

- ◆ Per ogni punto  $P$  si determina la direzione della tangente  $\beta$  al contorno
- ◆ La tabella-R (tabella di riferimento) è una lista dei valori di  $R$  e  $\alpha$  corrispondente ai punti di contorno utili alla descrizione della forma cercata



# Trasformata di Hough generalizzata

- ◆ Il metodo è generalizzabile per forme di rotazione e scala variabili introducendo due nuovi parametri. Lo SP risultante è quindi:  $(X_0, Y_0, S, \phi)$
- ◆ Le tabelle-R per le rotazioni e i cambiamenti di scala possono facilmente essere ottenuti da quello originale per orientamento e scala fissate





# Algoritmo di Hough generalizzato

Trasformata di Hough

- ◆ **passo 0** Costruisci la tabella di riferimento RT
- ◆ **passo 1** Inizializza l'accumulatore
- ◆ **passo 2** Ripeti per ogni punto di contorno:
  - ◆ **passo 2.1** Calcola  $\beta$
  - ◆ **passo 2.2** Calcola i possibili centri per ogni elemento della RT

$$x_c = x + S \rho \cos(\alpha(\beta, \phi))$$

$$y_c = y + S \rho \sin(\alpha(\beta, \phi))$$

- ◆ **passo 2.3** Vota (incrementa l'accumulatore)
- ◆ **passo 3** Analizza l'accumulatore (ricerca i massimi)



# Trasformata di Hough generalizzata

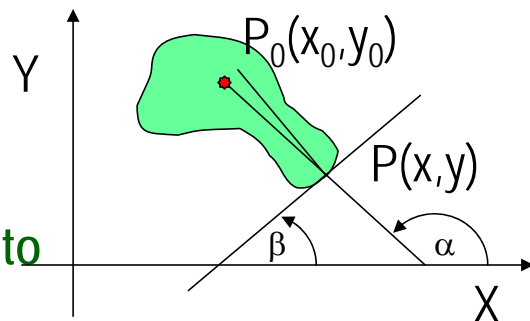
Trasformata di Hough

- ◆ La tabella può anche essere costruita con gli angoli misurati relativamente alla tangente:

$$x_c = x + \rho(\theta) \cos(\theta + \beta)$$

$$y_c = y + \rho(\theta) \sin(\theta + \beta)$$

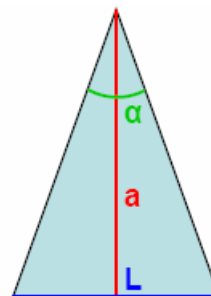
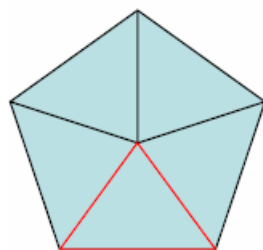
- ◆ Si introduce cioè l'orientamento relativo. La descrizione del contorno risulta perciò invariante per rotazione





# Poligoni regolari

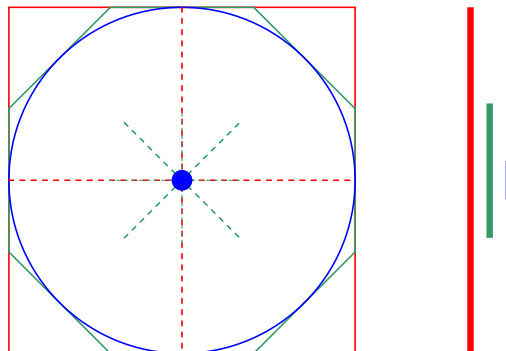
- ◆ La tabella-R in questo caso è generalmente più semplice per figure simmetriche





# Poligoni regolari

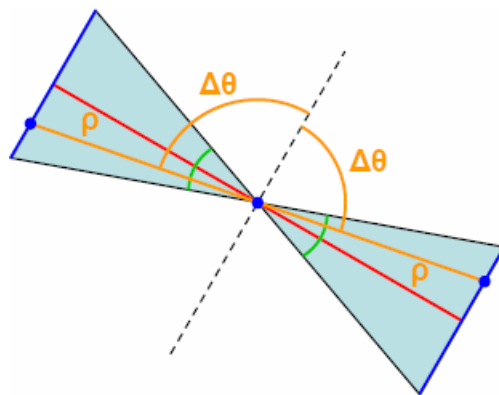
- ◆ Per i poligoni regolari ogni punto ha una regola di mappatura, cioè vota lungo un segmento proporzionale alla lunghezza del lato
  - Si noti che anche il cerchio può essere considerato un poligono regolare con un numero infinito di lati (infinitesimi)





# Poligoni regolari

- ◆ Noto un punto di evidenza sede di lato nell'immagine da elaborare, la regola di mappatura prevede allora di considerare come centri compatibili da votare tutti i punti su un segmento lungo  $L$  a distanza pari all'apotema in direzione perpendicolare al contorno in entrambi i versi:

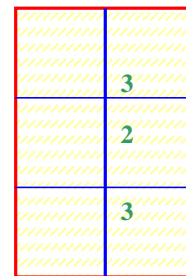
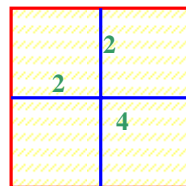
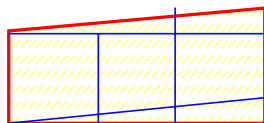
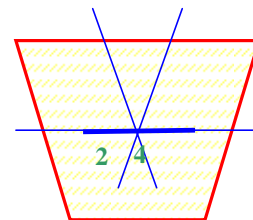
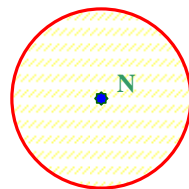
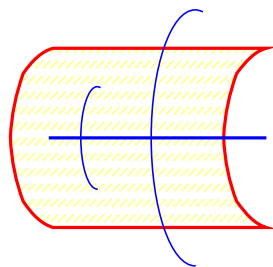




# Esempio di voto

- ◆ Cercare un cerchio di raggio assegnato R

Spazio immagine Spazio dei parametri

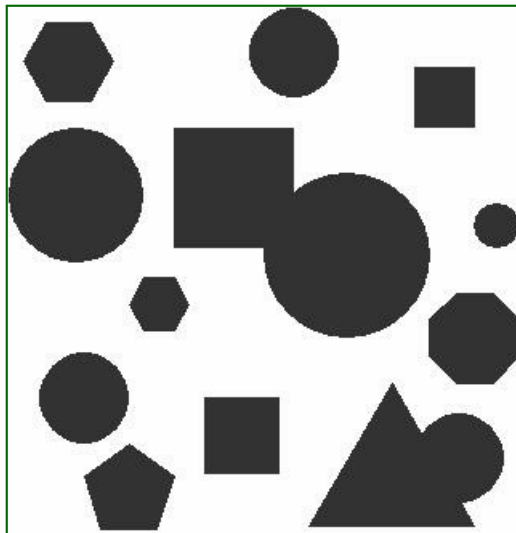


Trasformata di Hough



# Esempio di voto di poligoni

Trasformata di Hough

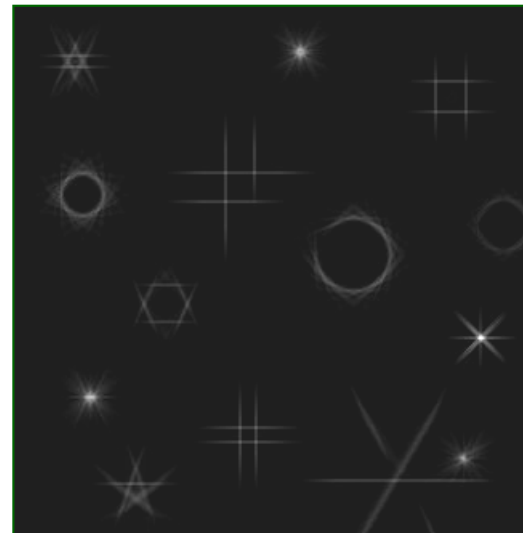
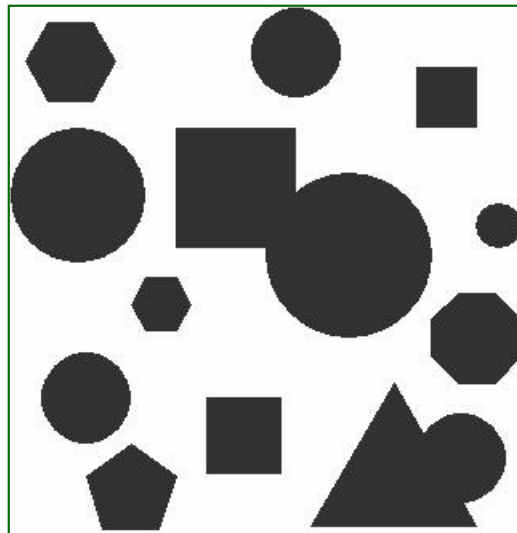


Ricerca di cerchi



# Esempio di voto di poligoni

Trasformata di Hough

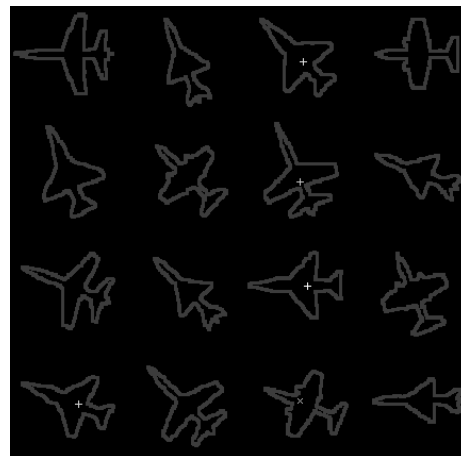
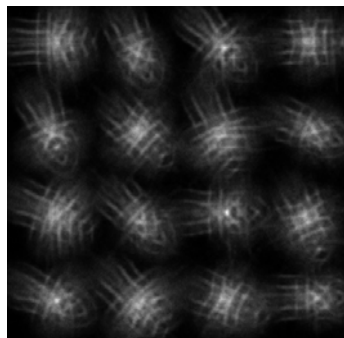
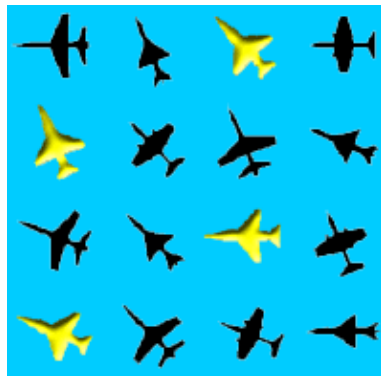


Ricerca di ottagoni



# Ricerca di forme generalizzate

Trasformata di Hough

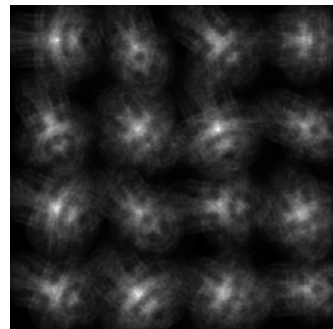
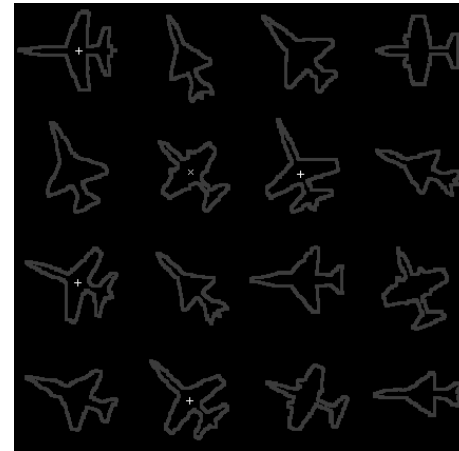
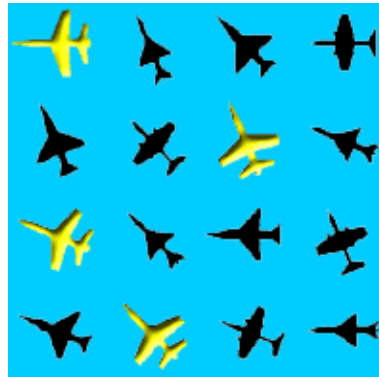


A1: val: 255 x:279 y:263  
A2: val: 227 x:275 y:052  
A3: val: 217 x:064 y:374  
A4: val: 198 x:272 y:165  
A5: val: 190 x:272 y:371



# Ricerca di forme generalizzate

Trasformata di Hough

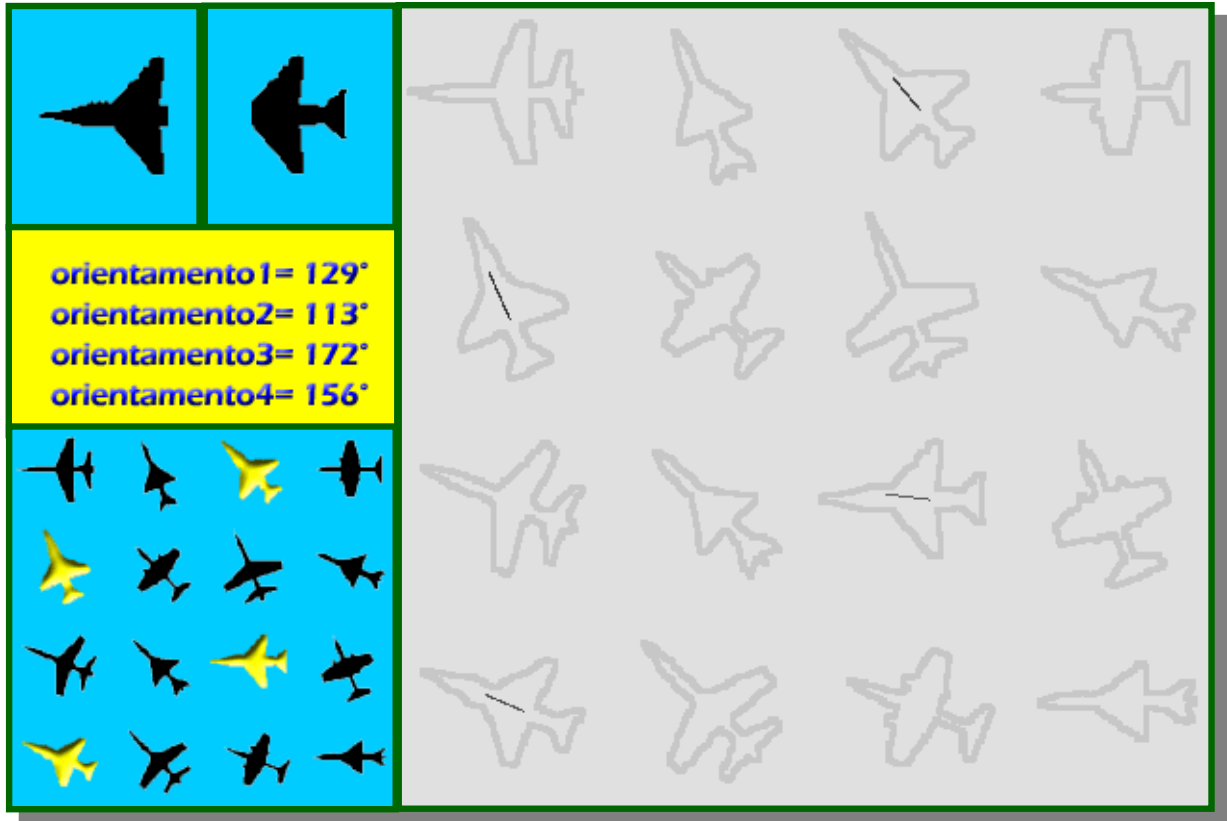


A1: val: 255 x:061 y:045  
A2: val: 252 x:271 y:162  
A3: val: 246 x:166 y:377  
A4: val: 242 x:060 y:265  
A5: val: 216 x:167 y:160



# Determinazione dell'orientamento

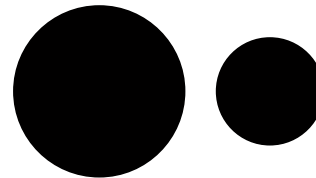
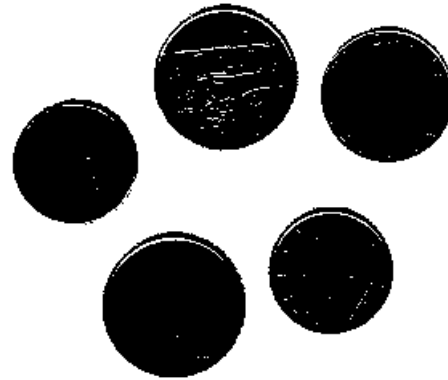
Trasformata di Hough





# Problemi: ricerca di cerchi

Trasformata di Hough





# Problemi: ricerca di rette

Trasformata di Hough

