Intelligenza Artificiale II

Ragionamento probabilistico
Rappresentazione

Marco Piastra

Parte 1

Mondi possibili, sottoinsiemi, eventi

Partizioni e variabili aleatorie

Probabilità

Marginalizzazione

Condizionali

Indipendenza, indipendenza condizionale

Modelli grafici

Eventi

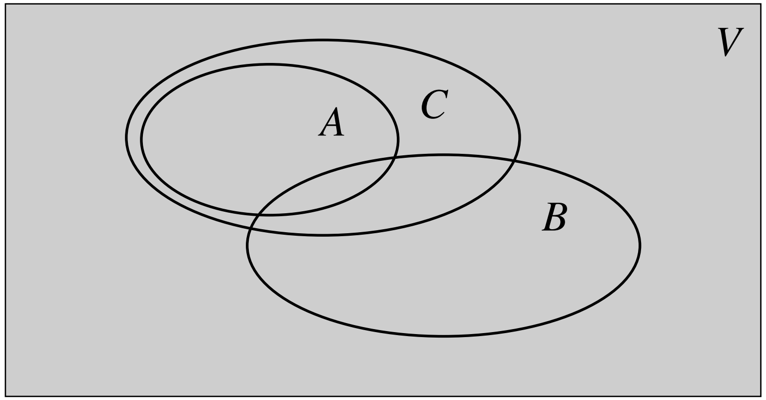
- Logica, formule ed eventi

  Si consideri un linguaggio proposizionale L_P

  L'insieme dei *mondi possibili* coincide con l'insieme delle interpretazioni V

  A ciascun simbolo proposizionale corrisponde un sottoinsieme di V

  p.es. ad un simbolo A corrisponde $\{v : v(A) = 1\}$



  Quindi, come noto, anche a ciascuna fbf corrisponde un sottoinsieme di V

  Un **evento** è un sottoinsieme di *mondi possibili*

  Un evento si **verifica** quando il *mondo attuale* appartiene al corrispondente sottoinsieme

  Ma l'agente non lo sa: usa le *descrizioni* degli eventi, non ha accesso ai mondi possibili

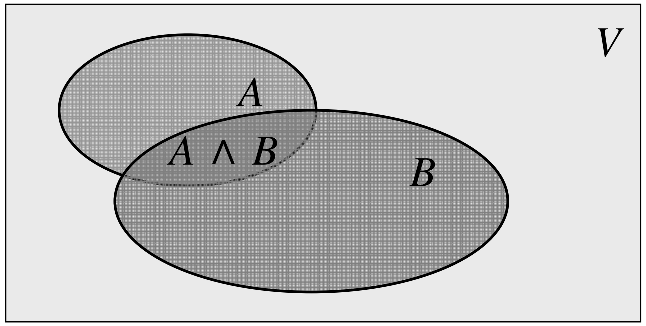
(*) Nel caso di V discreto

Probabilità*

- Una misura dei sottoinsiemi di V

  $P(.)$ è una *funzione* che assegna un numero reale a ciascun sottoinsieme di V

- Assiomi (Kolmogorov)
  1) Per qualsiasi sottoinsieme E, $P(E) \geq 0$
  2) $P(V) = 1$
  3) Per qualsiasi sequenza E_i di eventi disgiunti,
     $P(E_1 \vee E_2 \vee \ldots \vee E_n) = \sum_i P(E_i)$

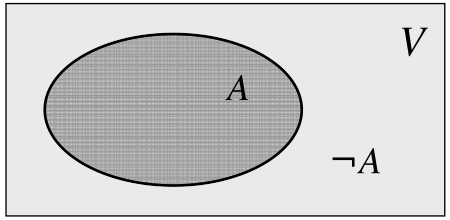


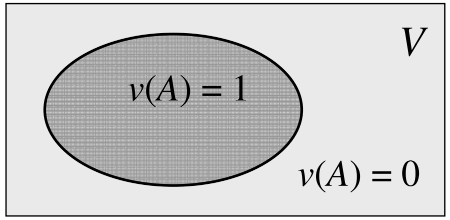
Esempio: $A \wedge \neg B$, $A \wedge B$, $\neg A \wedge B$ sono tre eventi disgiunti (vedi figura)

- $P(A) = P(A \wedge \neg B) + P(A \wedge B)$
- $P(B) = P(\neg A \wedge B) + P(A \wedge B)$
- $P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$

(*) Nel caso di V discreto

Partizioni, variabile aleatoria*





- Partizione

  Ciascun simbolo proposizionale A suddivide V
  in due sottoinsiemi disgiunti, A e $\neg A$

  (Quindi $P(\neg A) + P(A) = \mathrm{P}(V) = 1$, da cui $P(\neg A) = 1 - P(A)$)

  In altri termini:
  i possibili valori $v(A) = 1$ e $v(A) = 0$
  definiscono una *partizione* di V in base ad A

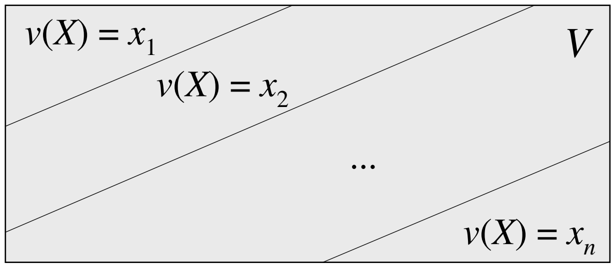
- Variabile aleatoria

  Si consideri una variabile X che ha $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ come *dominio*

  In ciascun mondo possibile X assume un determinato valore x_i

  I possibili valori $v(X) = x_1,\ v(X) = x_2,\ \ldots,\ v(X) = x_n$ definiscono una *partizione* di V in base ad X

  - X è una *variabile aleatoria*
  - Ciascun $v(X) = x_i$ è un evento (un sottoinsieme di V)



  Anche A (a valori binari) è una variabile aleatoria

  Le v.a. binarie o *binomiali* sono anche dette *bernoulliane*
  Le v.a. a più valori sono dette *multinomiali*

(*) Nel caso di V discreto

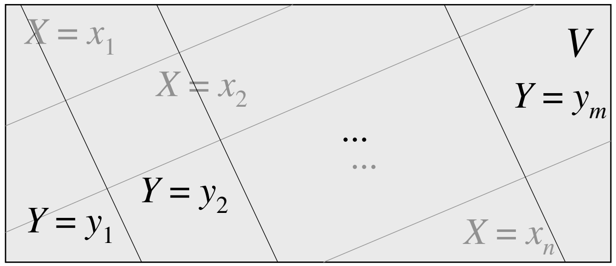
Variabili aleatorie, distribuzione congiunta*

Essendo $X=x_i$ e $X=x_j$ eventi disgiunti: $P(X=x_i \vee X=x_j) = P(X=x_i) + P(X=x_j)$ se $i \neq j$

- Variabili aleatorie multiple

  Solitamente, in una rappresentazione probabilistica convivono più variabili aleatorie

  Esempi: occorrenza in una email di parole diverse, classificazione della stessa email come spam

  Ciascuna combinazione di valori delle v.a. è un *evento*

  Un'insieme di v.a. definisce una partizione di V

- Distribuzione di probabilità congiunta (*joint probability distribution*)

  Per un determinato insieme di variabili aleatorie, p.es. X, Y, Z

  E\` una funzione $P(X=x_i \wedge Y=y_j \wedge Z=z_k)$ che associa un numero reale a ciascuna combinazione di valori $<x_i, y_j, z_k>$

  Si indica anche con $P(X=x_i, Y=y_j, Z=z_k)$ oppure $P(X, Y, Z)$

  Dato che X, Y e Z definiscono una partizione di V: $\sum_i \sum_j \sum_k P(X=x_i, Y=y_j, Z=z_k) = 1$

(*) Nel caso di V discreto

Marginalizzazione*

L'eliminazione di una variabile aleatoria da una probabilità congiunta

Data una probabilità congiunta

$P(X=x_i, Y=y_j, Z=z_k)$

La *probabilità marginale* $P(X=x_i, Y=y_j)$ si ottiene per sommatoria:

$$P(X=x_i, Y=y_j) = \sum_k P(X=x_i, Y=y_j, Z=z_k)$$

Data una probabilità congiunta su una partizione,
si può sempre ottenere una probabilità congiunta su una partizione contenuta nella prima

Esempio: distribuzione congiunta

(*Vedi anche DutchBook.xls)

A	B	C	$P(A, B, C)$
0	0	0	0.10
0	0	1	0.12
0	1	0	0.35
0	1	1	0.08
1	0	0	0.01
1	0	1	0.02
1	1	0	0.23
1	1	1	0.09

La conoscenza della distribuzione di probabilità congiunta permette di stabilire la probabilità di qualsiasi combinazione logica di eventi

Esempi:

$$P(A \vee C) = \sum_B P(A \vee C,\ B) = 0.55$$

$(0.55 \ * x)$ dovrebbe essere la somma che siete disposti a scommettere per una vincita x

$$P(\neg A \wedge \neg B) = \sum_C P(\neg A \wedge \neg B,\ C) = 0.22$$

Interludio: possibilità e probabilità

- Come si rappresentano i mondi *impossibili*?

  Esempio: 'testa o croce' vuol dire che escludiamo 'testa e croce', 'né testa né croce'

  Due alternative:

  a) I mondi impossibili sono esclusi da V

  b) I mondi impossibili sono in V ma hanno misura nulla (= 0)

- Preferenza (in questo corso)

  Alla De Finetti (1930)

  I mondi impossibili sono esclusi da V

  Come in una struttura modale KD45

  La probabilità è definita sull'insieme dei mondi accessibili

  L'agente distingue tra fatti e certezze probabilistiche (= 'in tutti i mondi possibili')

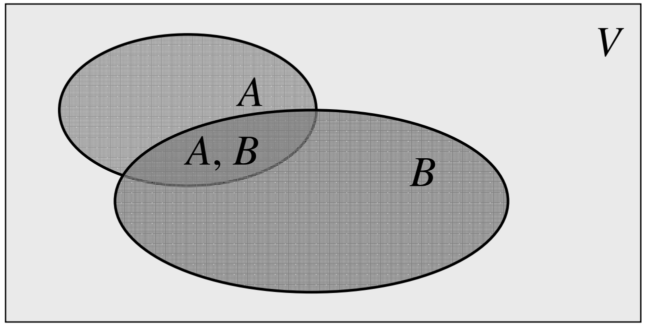
  In tutti i mondi possibili sono vere le formule logiche che descrivono i fatti noti

  In 'testa o croce', le fbf $\neg(T \wedge C)$ e $T \vee C$

Probabilità condizionale

- Definizione

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$$



- Significato

E` una forma di *inferenza*: si passa da un'insieme di mondi possibili ad un altro

Quindi, da una misura di probabilità ad un'altra

Si assuma un agente consideri V come insieme di mondi possibili

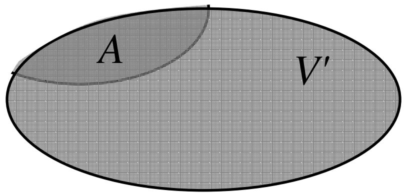
$P(A)$ è la probabilità che A si verifichi

Si supponga che l'agente venga a sapere che l'evento B si è verificato

L'evento complementare $\neg B$ è quindi *impossibile*

$V' \equiv B$ è il nuovo insieme dei mondi possibili

$P(A \mid B)$ è la nuova probabilità che l'evento A si verifichi



Esempio: probabilità condizionale

A	B	C	$P(A, B, C)$
0	0	0	0.10
0	0	1	0.12
0	1	0	0.35
0	1	1	0.08
1	0	0	0.01
1	0	1	0.02
1	1	0	0.23
1	1	1	0.09

La conoscenza della distribuzione
di probabilità congiunta permette
di stabilire
qualsiasi probabilità condizionale

Esempio:

$$P(A \vee C \mid B) = \frac{P(A \vee C, B)}{P(B)} = \frac{0.40}{0.75} = 0.53$$

$P(A \vee B)$ era 0.55: la conoscenza di B diminuisce la somma che siete disposti a scommettere

Teorema di Bayes (T. Bayes, 1764)

- Definizione

Una relazione tra probabilità condizionali e marginali

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)\, P(A)}{P(B)}$$

Nelle applicazioni pratiche, $P(B \mid A)$ viene anche detta verosimiglianza *(likelihood)* $L(A \mid B)$

$$P(A \mid B) \propto L(A \mid B)\, P(A)$$

Corollario della definizione di probabilità condizionale *(chain rule)*

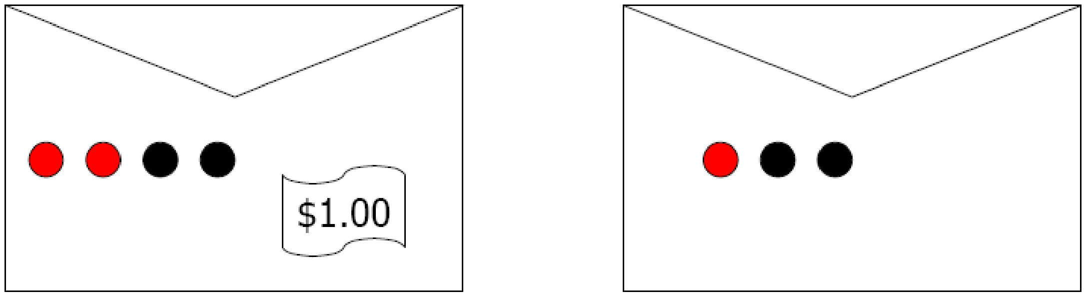
$$P(A, B) = P(B \mid A)\, P(A)$$

Per la definizione di marginalizzazione: $P(B) = \sum_A P(A, B) = \sum_A P(B \mid A)\, P(A)$

Da cui (Formulazione alternativa del teorema di Bayes):

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)\, P(A)}{\sum_A P(B \mid A)\, P(A)}$$

Esercizio: informazioni e scommesse



- Due buste, una viene estratta

  Una busta contiene due gettoni rossi e due neri, vale 1 euro
  Una busta contiene un gettone rosso e due neri, non vale nulla

  Prima di scommettere, potete estrarre un gettone

  a) Il gettone è nero. Quanto scommettete?

  b) Il gettone è rosso. Quanto scommettete?

Obiettivo: mostrare che il teorema di Bayes semplifica i calcoli

Indipendenza, indipendenza condizionale

- Indipendenza

  Due eventi sono indipendenti se la probabilità congiunta è uguale al prodotto delle probabilità marginali

$$\langle A \perp B \rangle \qquad \Rightarrow \; P(A, B) = P(A)\, P(B)$$

- Indipendenza condizionale

  Due eventi sono condizionalmente indipendenti (dato un terzo evento) se la probabilità condizionale congiunta è uguale al prodotto delle probabilità condizionali marginali

$$\langle A \perp B \mid C \rangle \quad \Rightarrow \; P(A, B \mid C) = P(A \mid C)\, P(B \mid C)$$

$$\Rightarrow \; P(A \mid B, C) = \frac{P(A, B \mid C)}{P(B \mid C)} = \frac{P(A \mid C)\, P(B \mid C)}{P(B \mid C)} = P(A \mid C)$$

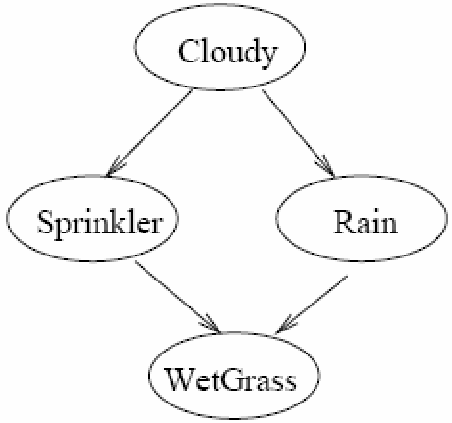
Questa è la proprietà più rilevante

Modelli grafici (anche *Bayesian Networks*)

Struttura + numeri, invece di soli numeri

- Un modo per rappresentare una distribuzione di probabilità congiunta
  - I nodi sono variabili aleatorie
  - Gli archi (orientati) rappresentano *dipendenza*

P(C=F)	P(C=T)
0.5	0.5



C	P(S=F)	P(S=T)
F	0.5	0.5
T	0.9	0.1

C	P(R=F)	P(R=T)
F	0.8	0.2
T	0.2	0.8

S	R	P(W=F)	P(W=T)
F	F	1.0	0.0
T	F	0.1	0.9
F	T	0.1	0.9
T	T	0.01	0.99

Notare che la specifica di una distribuzione congiunta di quattro v.a. richiederebbe $2^4 = 16$ valori

In figura i valori sono solo 9

Da un modello grafico alla probabilità congiunta

- Distribuzione congiunta

  Può essere espressa come prodotto di probabilità condizionali

  (estensione della *chain rule*)

  Esempio:

  $$P(C, S, R, W) = P(C)P(S \mid C)P(R \mid S, C)P(W \mid R, S, C)$$

  In un modello grafico, la distribuzione congiunta è un prodotto delle probabilità condizionali dei nodi

  $$P(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \prod_i P(X_i \mid parents(X_i))$$

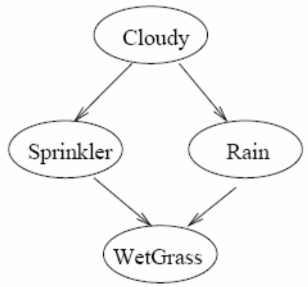
  Dove $parents(X_i)$ sono i nodi afferenti (diretti) del grafo orientato

  Nell'esempio:

  $$P(C, S, R, W) = P(C)P(S \mid C)P(R \mid C)P(W \mid R, S)$$

  Assunzioni implicite: $\langle R \perp S \mid C \rangle$, $\langle W \perp C \mid R, S \rangle$

P(C=F)	P(C=T)
0.5	0.5



C	P(S=F)	P(S=T)
F	0.5	0.5
T	0.9	0.1

C	P(R=F)	P(R=T)
F	0.8	0.2
T	0.2	0.8

S	R	P(W=F)	P(W=T)
F	F	1.0	0.0
T	F	0.1	0.9
F	T	0.1	0.9
T	T	0.01	0.99

Modello grafico e indipendenze condizionali

- *D-separation*

  Come si 'legge' l'indipendenza condizionale in un modello grafico

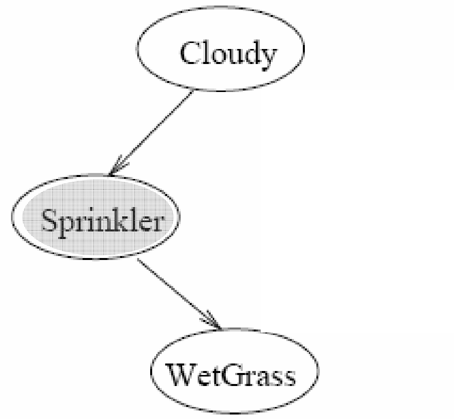
  In un modello grafico

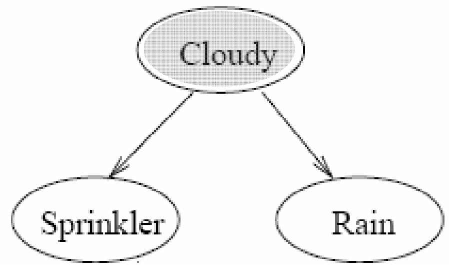
  Due nodi X e Y sono condizionalmente indipendenti dato un insieme di nodi $\{Z_k\}$ se tutti i percorsi tra X e Y sono bloccati

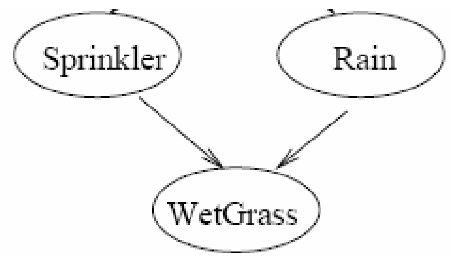
  Nel determinare i possibili percorsi tra due nodi, si ignora il verso degli archi

  Un percorso tra X e Y è bloccato se:

  1) Il percorso contiene una sequenza $X \rightarrow Z_i \rightarrow Y$ oppure una diramazione (*fork*) $X \leftarrow Z_i \rightarrow Y$ $(Z_i \in \{Z_k\})$
  2) Il percorso contiene una confluenza (*join*) $X \rightarrow N \leftarrow Y$ in cui N e tutti i discendenti di N <u>non</u> appartengono a $\{Z_k\}$

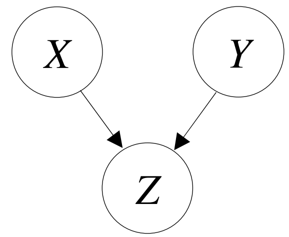






Explaining Away

Ulteriori osservazioni sulla condizione 2) della *D-separation*



Modello grafico con un *join*

Probabilità congiunta:

$$P(X, Y, Z) = P(X)P(Y)P(Z|X,Y)$$

Probabilità marginale rispetto a X e Y (valore di Z incognito):

$$P(X, Y) = P(X)P(Y) \sum_{Z} P(Z|X,Y) = P(X)P(Y)$$

Quindi X e Y sono marginalmente indipendenti

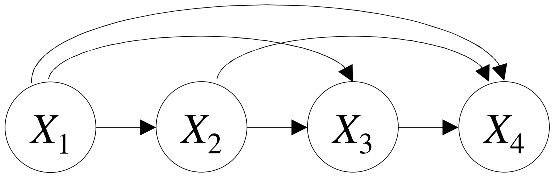
Ma se il valore di Z è noto, allora X e Y sono ***dipendenti***:

$$P(X, Y | Z=v) = \frac{P(X,Y,Z=v)}{P(Z=v)} = \frac{P(X)P(Y)P(Z=v|X,Y)}{\sum_{X,Y} P(X)P(Y)P(Z=v|X,Y)}$$

Non è un paradosso.
Esempio:
X e Y sono due lanci della stessa moneta, Z=1 se il risultato è lo stesso, Z=0 altrimenti.

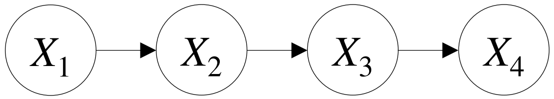
Esempi di modelli grafici

- Dipendenza completa



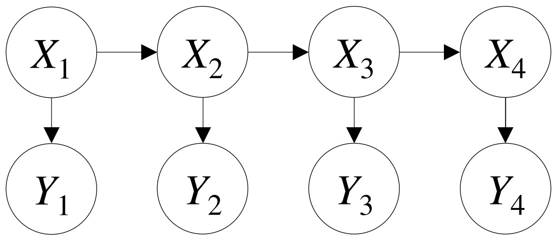
$$P(X_1, X_2, X_3, X_4) = P(X_1)P(X_2 \mid X_1)P(X_3 \mid X_1, X_2)P(X_4 \mid X_1, X_2, X_3)$$

- Modello di Markov



$$P(X_1, X_2, X_3, X_4) = P(X_1)P(X_2 \mid X_1)P(X_3 \mid X_2)P(X_4 \mid X_3) = P(X_1)\prod_{i=2}^{n} P(X_i \mid X_{i-1})$$

- Modello 'Hidden Markov'



In genere, i nodi X_i sono *hidden*, nel senso di *non-osservabili*

$$P(X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = P(X_1)P(Y_1 \mid X_1)P(X_2 \mid X_1)P(Y_2 \mid X_2)P(X_3 \mid X_2)P(Y_3 \mid X_3)P(X_4 \mid X_3)P(Y_4 \mid X_4)$$
$$= P(X_1)P(Y_1 \mid X_1)\prod_{i=2}^{n} P(X_i \mid X_{i-1})P(Y_i \mid X_i)$$