

Intelligenza Artificiale II

Logica del primo ordine Elementi di base

Marco Piastra

Limiti del linguaggio proposizionale

- *Esempio:*

“Ogni essere umano è mortale”

“Socrate è un essere umano”

“Socrate è mortale”

Il legame logico (intuitivo) è evidente

(Essere umano) implica (essere mortale)	$A \rightarrow B$	Schema del	$\varphi \rightarrow \psi$
<i>Socrate</i> è un essere umano	C	<i>modus ponens</i>	φ
<i>Socrate</i> è mortale	D		ψ

Nella traduzione logico-proposizionale A , B , C e D non hanno alcun legame

- Altri esempi ‘intraducibili’:

“Quando capra e cavolo stanno sulla stessa riva, la capra mangia il cavolo”

“Il cacciatore sente una brezza quando si trova sul ciglio di una trappola”

Logica del primo ordine

- **Logica proposizionale**

Rappresentazione del mondo come sulla base di **fatti** atomici (proposizioni)

- **Logica del primo ordine**

Una base più complessa e articolata per la rappresentazione

Oggetti

persone, numeri, costruzioni, colori, storie, percorsi, pezzi di legno, ...

Proprietà (di oggetti) e relazioni (tra oggetti)

rosso, grande, primo, fratello di, maggiore di, compreso tra, ...

Funzioni (di oggetti)

successore, padre di, ...

Linguaggio del primo ordine

Costanti, predicati, funzioni

▪ Simboli del linguaggio L_{PO}

Costanti individuali (singoli oggetti)

Esempi: *Socrate*, *Sfera1*, *MickeyMouse*, *Amelia*, ...

In generale: a , b , c , ...

Predicati

Esempi: *Red/1*, *Large/1*, *GreaterThan/2*, *=/2*

Ogni predicato ha un numero di argomenti prestabilito

In generale: P/n , Q/m , R/p , ...

Funzioni

Esempi: *sqrt/1*, *colorOf/1*, *greatestCommonDivisor/2*

Ogni funzione ha un numero di argomenti prestabilito

In generale: f/n , g/m , h/p , ...

Convenzionalmente,
per il predicato binario =
si usa la forma infissa
(p.es. ' $a = b$ ')


Linguaggio del primo ordine

Altri simboli

- Ulteriori simboli del linguaggio L_{PO}

Variabili

Convenzionalmente indicate come x, y, z, \dots

Connettivi

Come in logica proposizionale: $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow$

Parentesi e virgola

$() ,$

Quantificatori

Universale: \forall

Esistenziale: \exists

Si applicano **sempre** ad una ed una sola variabile

Esempi: $\forall x, \exists y, \forall x \forall y$

Si dice linguaggio **del primo ordine** in quanto i quantificatori agiscono solo sugli **oggetti**, vale a dire sulle variabili $x, y, z \dots$, e non sulle **relazioni e funzioni** (In una logica del secondo ordine si hanno formule del tipo: $\exists F F(a,b)$)

Esempi di formule

- “Essere fratelli significa essere parenti”

$$\forall x \forall y (Fratello(x, y) \rightarrow Parente(x, y))$$
- “La relazione di parentela è simmetrica”

$$\forall x \forall y (Parente(x, y) \leftrightarrow Parente(y, x))$$
- “Una madre è un genitore di sesso femminile”

$$\forall x \forall y (Madre(x, y) \leftrightarrow (Genitore(x, y) \wedge Femmina(x)))$$
- “Un cugino è figlio di un fratello o una sorella di uno dei genitori”

$$\forall x \forall y (Cugino(x, y) \leftrightarrow \exists z \exists w (Genitore(z, x) \wedge Genitore(w, y) \wedge (Fratello(z, w) \vee Sorella(z, w))))$$
- “Ciascuno ha una madre”

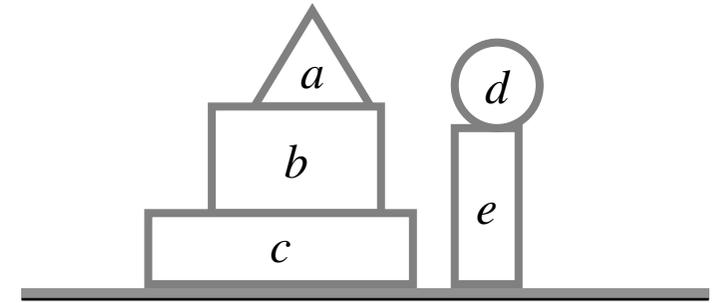
$$\forall x \exists y Madre(y, x)$$

Fare attenzione all'ordine dei quantificatori

$$\exists y \forall x Madre(y, x)$$

“Esiste una madre di tutti”

Descrivere un mondo



■ Insiemi

$Pyramid(a)$

$Parallelepiped(b) \wedge Parallelepiped(c) \wedge Parallelepiped(e)$

$Sphere(d)$

$Ontable(c) \wedge Ontable(e)$

■ Relazioni

$Above(a,b) \wedge Above(b,c) \wedge Above(a,c) \wedge Above(d,e)$

$Clear(a) \wedge Clear(d)$

■ Definizioni

$\forall x \forall y (On(x,y) \leftrightarrow (Above(x,y) \wedge \neg \exists z (Above(x,z) \wedge Above(z,y))))$

$\forall x (Ontable(x) \leftrightarrow \neg \exists z Above(x,z))$

$\forall x (Clear(x) \leftrightarrow \neg \exists z Above(z,x))$

Termini e formule atomiche

Termini

Ogni *variabile* o *costante individuale* è un **termine**

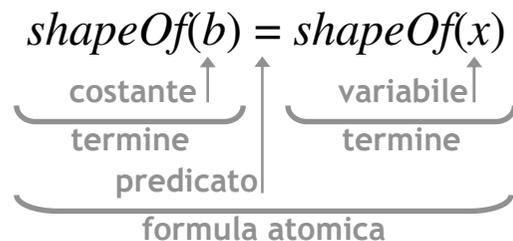
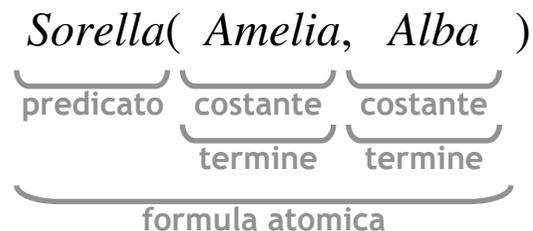
Se f è un *simbolo funzionale* a n argomenti e t_1, \dots, t_n sono **termini**, allora $f(t_1, \dots, t_n)$ è un **termine**

Un termine **chiuso** (*ground*) non contiene variabili

Formula atomica

Se P è un *simbolo predicativo* a n argomenti e t_1, \dots, t_n sono **termini**, allora $P(t_1, \dots, t_n)$ è una **formula atomica**

Esempi:



Regole di buona formazione

- Formule ben formate di L_{PO}

Ogni *formula atomica* è una fbf

$$\varphi \in \text{fbf}(L_{PO}) \Rightarrow (\neg\varphi) \in \text{fbf}(L_{PO})$$

$$\varphi, \psi \in \text{fbf}(L_{PO}) \Rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \in \text{fbf}(L_{PO})$$

$$\varphi \in \text{fbf}(L_{PO}) \Rightarrow (\forall x \varphi) \in \text{fbf}(L_{PO})$$

$$\varphi, \psi \in \text{fbf}(L_{PO}), \quad (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow ((\neg\varphi) \rightarrow \psi)$$

$$\varphi, \psi \in \text{fbf}(L_{PO}), \quad (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi)))$$

$$\varphi, \psi \in \text{fbf}(L_{PO}), \quad (\varphi \leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$$

$$\varphi \in \text{fbf}(L_{PO}) \quad (\exists x \varphi) \Leftrightarrow (\neg\forall x \neg\varphi)$$

Formule aperte, enunciati

▪ Variabili libere e vincolate

una variabile (in una fbf) è **vincolata** se si trova nel raggio di azione di un **quantificatore** per quella variabile

una variabile è **libera** se non è *vincolata*

esempi di variabile vincolata:

$$\forall x P(x)$$

$$\exists x (P(x) \rightarrow (A(x) \wedge B(x)))$$

esempi di variabile libera:

$$P(x)$$

$$\exists y (P(y) \rightarrow (A(x,y) \wedge B(y)))$$

▪ Formule aperte e chiuse

Una fbf è **aperta** se in essa vi è almeno una variabile libera

Una fbf è **chiusa** (anche **enunciato** - *sentence*) in caso contrario

solo le fbf *chiuse*, cioè gli *enunciati*, hanno un valore di verità (in quanto rappresentano delle *affermazioni* ...)

Semantica estensionale

▪ Universo del discorso U

Un insieme di oggetti di base

$\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}, \underline{e}, \underline{nil}\}$

Le costanti individuali indicano oggetti di U

Esempi: $v(a) = \underline{a}$, $v(b) = \underline{b}$

▪ Relazioni

Insiemi di tuple formate a partire da U

Ontable : $\{\underline{c}, \underline{e}\}$

Above : $\{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle, \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle, \langle \underline{b}, \underline{c} \rangle, \langle \underline{d}, \underline{e} \rangle\}$

On : $\{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle, \langle \underline{b}, \underline{c} \rangle, \langle \underline{d}, \underline{e} \rangle\}$

Between : $\{\langle \underline{b}, \underline{a}, \underline{c} \rangle\}$

▪ Funzioni

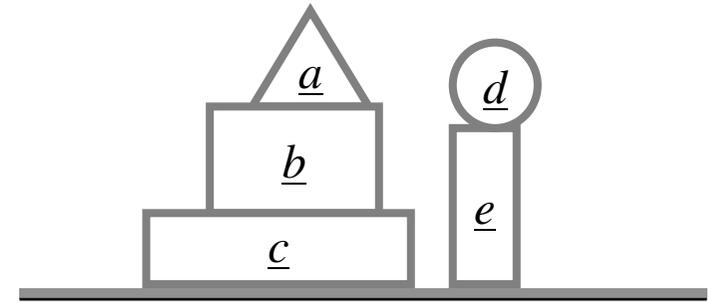
Insiemi di tuple formate a partire da U , tali

on : $\{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle, \langle \underline{b}, \underline{c} \rangle, \langle \underline{c}, \underline{nil} \rangle, \langle \underline{d}, \underline{e} \rangle, \langle \underline{e}, \underline{nil} \rangle\}$

▪ Predicati e funzioni indicano relazioni e funzioni in U

$v(\text{Above}/2)$: $\{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle, \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle, \langle \underline{b}, \underline{c} \rangle, \langle \underline{d}, \underline{e} \rangle\}$

$v(\text{on}/2)$: $\{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle, \langle \underline{b}, \underline{c} \rangle, \langle \underline{c}, \underline{nil} \rangle, \langle \underline{d}, \underline{e} \rangle, \langle \underline{e}, \underline{nil} \rangle\}$



Si usa a per indicare la costante ed \underline{a} per indicare l'oggetto (*solo per comodità)

Strutture, interpretazioni e assegnazioni

- Una **struttura** $\langle U, \nu \rangle$ per L_{PO} contiene:

Un insieme di oggetti U (l'universo del discorso)

Un'interpretazione ν che associa

ad ogni costante c un oggetto di U

$\nu(c) \in U$

ad ogni predicato P a n argomenti una relazione n -aria in U^n

$\nu(P) \subseteq U^n$

ad ogni funzione f a n argomenti una funzione da U^n a U

$\nu(f) \subseteq U^n \rightarrow U$

Un'interpretazione (ovviamente) non fissa il valore delle variabili

- **Assegnazione**

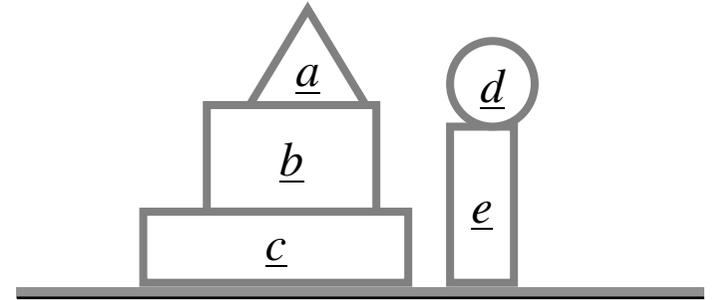
Data una struttura $\langle U, \nu \rangle$, un'assegnazione (*valuation*) s

è una *funzione* che associa ad ogni variabile x un oggetto di U

$s(x) \in U$

La combinazione di una $\langle U, \nu \rangle$ e di una s determina univocamente gli oggetti associati a ciascun elemento di L_{PO}

Il mondo dei blocchi



▪ Linguaggio

simboli predicativi: *Ontable(.)*, *Above(..)*, *On(..)*, *Between(...)*

variabili: x , y , z , ...

costanti individuali: a , b , c , d , e

▪ Interpretazione

Universo del discorso

$$U = \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}, \underline{e}\}$$

Predicati

$$v(\textit{Ontable}) = \{\underline{c}, \underline{e}\}$$

$$v(\textit{Above}) = \{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle, \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle, \langle \underline{b}, \underline{c} \rangle, \langle \underline{d}, \underline{e} \rangle\}$$

$$v(\textit{On}) = \{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle, \langle \underline{b}, \underline{c} \rangle, \langle \underline{d}, \underline{e} \rangle\}$$

$$v(\textit{Between}) = \{\langle \underline{b}, \underline{a}, \underline{c} \rangle\}$$

Costanti individuali

$$v(a) = \underline{a}, v(b) = \underline{b}, v(c) = \underline{c}, v(d) = \underline{d}, v(e) = \underline{e}$$

▪ Assegnazione

Esempio: $s = \{(x:\underline{a}), (y:\underline{b}), (z:\underline{a}) \dots\}$ (per *tutte* le variabili del linguaggio)

Si usa a per indicare la costante ed \underline{a} per indicare l'oggetto (*solo per comodità)

Soddisfacimento (forma intuitiva)

- Una fbf φ è soddisfatta da $\langle U, v \rangle [s]$ sse φ afferma una cosa vera in $\langle U, v \rangle [s]$

- Nel mondo dei blocchi

Pyramid(a)

è vera perchè: $(v(a) = \underline{a}) \in v(\text{Pyramid}(\cdot)) = \{\underline{a}\}$

Parallelepiped(d)

non è vera perchè: $(v(d) = \underline{d}) \notin v(\text{Parallelepiped}(\cdot)) = \{\underline{b}, \underline{c}, \underline{e}\}$

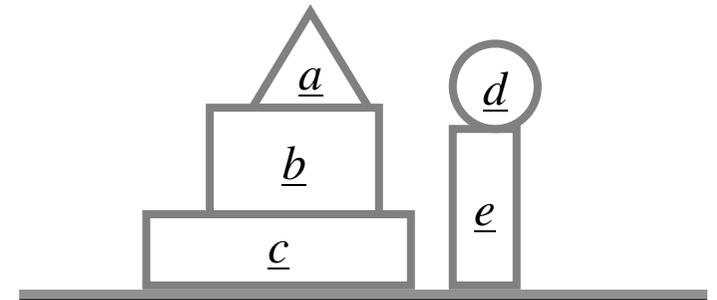
$\neg \exists x (\text{Parallelepiped}(x) \wedge \text{Sphere}(x))$

è vera perchè: $((v(\text{Parallelepiped}(\cdot)) = \{\underline{b}, \underline{c}, \underline{e}\}) \cap (v(\text{Sphere}(\cdot)) = \{\underline{d}\})) \equiv \emptyset$

$\forall x (\text{Pyramid}(x) \vee \text{Parallelepiped}(x) \vee \text{Sphere}(x))$

è vera perchè:

$((v(\text{Pyramid}(\cdot)) = \{\underline{a}\}) \cup (v(\text{Parallelepiped}(\cdot)) = \{\underline{b}, \underline{c}, \underline{e}\}) \cup (v(\text{Sphere}(\cdot)) = \{\underline{d}\})) \equiv \mathbf{U}$



Soddisfacimento

- Data una struttura $\langle \mathbf{U}, \nu \rangle$ un'assegnazione s

Se φ è una formula atomica, $\langle \mathbf{U}, \nu \rangle [s] \models \varphi$ sse

se φ ha la forma $P(t_1, \dots, t_n)$ allora $\langle \nu(t_1) [s], \dots, \nu(t_n) [s] \rangle \in \nu(P) [s]$

Se φ e ψ sono fbf qualsiasi

$\langle \mathbf{U}, \nu \rangle [s] \models (\neg \varphi)$ sse $\langle \mathbf{U}, \nu \rangle [s] \not\models \varphi$

$\langle \mathbf{U}, \nu \rangle [s] \models (\varphi \wedge \psi)$ sse $\langle \mathbf{U}, \nu \rangle [s] \models \varphi$ e $\langle \mathbf{U}, \nu \rangle [s] \models \psi$

$\langle \mathbf{U}, \nu \rangle [s] \models (\varphi \vee \psi)$ sse $\langle \mathbf{U}, \nu \rangle [s] \models \varphi$ o $\langle \mathbf{U}, \nu \rangle [s] \models \psi$

$\langle \mathbf{U}, \nu \rangle [s] \models (\varphi \rightarrow \psi)$ allora non $\langle \mathbf{U}, \nu \rangle [s] \models \varphi$ e $\langle \mathbf{U}, \nu \rangle [s] \not\models \psi$

Formule con quantificatori

$\langle \mathbf{U}, \nu \rangle [s] \models \forall x \varphi$ sse per ogni $\underline{d} \in \mathbf{U}$ si ha $\langle \mathbf{U}, \nu \rangle [s](x:\underline{d}) \models \varphi$

$\langle \mathbf{U}, \nu \rangle [s] \models \exists x \varphi$ sse esiste un $\underline{d} \in \mathbf{U}$ per cui si ha $\langle \mathbf{U}, \nu \rangle [s](x:\underline{d}) \models \varphi$

Modelli

▪ Validità in un'interpretazione, modello

Una fbf φ tale per cui si ha $\langle U, v \rangle [s] \models \varphi$ per qualsiasi assegnazione s è detta **valida** in $\langle U, v \rangle$

Si dice anche che $\langle U, v \rangle$ è un **modello** di φ

si scrive $\langle U, v \rangle \models \varphi$ (si elimina il riferimento a s)

Una struttura $\langle U, v \rangle$ è detta **modello** di un *insieme di fbf* Γ sse è un modello di tutte le fbf in Γ

si scrive allora $\langle U, v \rangle \models \Gamma$

▪ Verità

Un enunciato ψ si dice **vero** in $\langle U, v \rangle$ se è **valido** in $\langle U, v \rangle$

per un enunciato, basta l'esistenza di un'assegnazione s per cui $\langle U, v \rangle [s] \models \psi$

Validità

▪ Validità e verità logiche

Una fbf (aperta o chiusa) è **valida** (o **logicamente valida**)
se è **valida** in qualsiasi $\langle U, v \rangle$

Esempi:

$$(P(x) \vee \neg P(x))$$

(tautologia come formula aperta)

Un enunciato ψ è **vero** (o **logicamente vero**)
se è **vero** in qualsiasi $\langle U, v \rangle$

si scrive allora $\models \psi$ (si elimina il riferimento a $\langle U, v \rangle$)

Esempi:

$$\forall x (P(x) \vee \neg P(x))$$

(generalizzazione di una tautologia)

$$\forall x \forall y (G(x,y) \rightarrow (H(x,y) \rightarrow G(x,y)))$$

(generalizzazione di assioma - vedi oltre)

▪ Inconsistenza

Una fbf (aperta o chiusa) è **inconsistente** se non è soddisfacibile

Un enunciato ψ è **inconsistente** se non ha un *modello*

Esempi:

$$\forall x (P(x) \wedge \neg P(x))$$

(generalizzazione di una contraddizione)

Conseguenza logica

- Definizione

Dato un insieme di fbf Γ ed una fbf φ di L_{PO} si ha

$$\Gamma \models \varphi$$

sse tutte le $\langle \mathbf{U}, \nu \rangle [s]$ che soddisfano Γ soddisfano anche φ

- Osservazioni

La definizione si estende a tutte le possibili $\langle \mathbf{U}, \nu \rangle [s]$

Quindi, a tutti i possibili insiemi \mathbf{U} , alle relazioni e funzioni in \mathbf{U} ed alle associazioni di oggetti di \mathbf{U} a variabili e costanti

Il calcolo diretto della conseguenza logica in L_{PO} è impossibile anche nelle forme più semplici

FAQ 1

- Funzioni o predicati (i.e. relazioni)?

I due oggetti semantici sono molto simili, si può fare a meno delle funzioni?

- Le funzioni (come oggetti semantici) si possono *rappresentare* anche tramite predicati

ad esempio, la validità dell'enunciato:

$$\forall x \forall y \forall z ((\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z)) \rightarrow (y = z))$$

indica che l'interpretazione di $\varphi(..)$ (in generale, una relazione $v(\varphi) \subseteq U^2$) è anche una funzione $U \rightarrow U$

La presenza delle funzioni arricchisce il linguaggio in modo sostanziale: a differenza dei predicati, le funzioni si possono nidificare (nei termini)

Di conseguenza, viene grandemente aumentata la portata del calcolo logico-simbolico (con un corrispondente aumento della complessità di calcolo ...)

Esempio

- Il mondo delle liste di oggetti $[a, b, c, \dots]$

$cons(s, x)$

funzione, associa ad un oggetto (es. a) ed una lista (es. $[b, c]$) la lista ottenuta inserendo l'oggetto all'inizio (es. $[a, b, c]$)

$Append(x, y, z)$

predicato, associa alle liste x e y la concatenazione z

nil

costante, indica la lista vuota.

Notazione abbreviata:

$$[] \Leftrightarrow nil$$

$$[a] \Leftrightarrow cons(a, nil)$$

$$[a, b] \Leftrightarrow cons(a, cons(b, nil))$$

$$[a|[b, c]] \Leftrightarrow cons(a, [b, c])$$

Assiomi (AL)

$$\forall x Append(nil, x, x)$$

$$\forall x \forall y \forall z (Append(x, y, z) \rightarrow \forall s Append(cons(s, x), y, cons(s, z)))$$

Esempi (conseguenze logiche)

$AL + \exists z Append([a], [b, c], z)$	$\models Append([a], [b, c], [a, b, c])$	$= [z/[a, b, c]]$
$AL + \exists x \exists y Append(x, y, [a, b])$	$\models Append([a], [b], [a, b])$	$= [x/[a], y/[b]]$
	$\models Append(nil, [a, b], [a, b])$	$= [x/nil, y/[a, b]]$
	$\models Append([a, b], nil, [a, b])$	$= [x/[a, b], y/nil]$

Linguaggio e funzioni

- Ricchezza espressiva

Basta una sola funzione in L_{PO} per creare un'infinità (numerabile) di termini
 Ad esempio, la sola funzione $s/1$ (=successore) è sufficiente per definire l'aritmetica
 (*la teoria delle proprietà dei numeri naturali*)

- Assiomi ricorsivi

Esempio: (*postulati di Peano - secondo Mendelson, 1972*)

S1: $\forall x \forall y \forall z ((x = y) \rightarrow ((x = z) \rightarrow (y = z)))$

S2: $\forall x \forall y ((x = y) \rightarrow (s(x) = s(y)))$

S3: $\neg \exists x (s(x) = 0)$

S4: $\forall x \forall y ((s(x) = s(y)) \rightarrow (x = y))$

S5: $\forall x (x + 0 = x)$

S6: $\forall x \forall y ((x + s(y)) = s(x + y))$

S7: $\forall x (x \cdot 1 = x)$

S8: $\forall x \forall y ((x \cdot s(y)) = ((x \cdot y) + x))$

S9: *Per qualsiasi fbf $\varphi(x)$: $\varphi(0) \rightarrow (\forall x (\varphi(x) \rightarrow \varphi(s(x))) \rightarrow \forall x \varphi(x)$*

(~principio di induzione matematica)