Intelligenza Artificiale II

Logiche multivalenti e sfumate (*Fuzzy Logics*)

Marco Piastra

1

Logiche multivalenti

Logiche multivalenti

- Origini storiche
  - il fatto che le logiche modali non siano vero-funzionali è stato dimostrato qualche tempo dopo la loro comparsa
  - agli inizi, si pensava che le logiche modali fossero vero-funzionali ma in riferimento ad un insieme di valori di verità con più di due valori (Lukasiewicz)
  - malgrado le origini comuni, le due linee si sono sviluppate in direzioni diverse

- Idea intuitiva
  - una logica a due soli valori rappresenta una sorta di certezza implicita riguardo alla *conoscibilità* del valore di verità
  - la presenza di ulteriori valori permette di rappresentare meglio situazioni di *incertezza* e/o di *ambiguità*

Logiche trivalenti

- Lukasiewicz (terzo valore: *unknown*)

∧	0	U	1
0	0	0	0
U	0	U	U
1	0	U	1

∨	0	U	1
0	0	U	1
U	U	U	1
1	1	1	1

→	0	U	1
0	1	1	1
U	U	1	1
1	0	U	1

¬	
0	1
U	U
1	0

- Bóchvar (terzo valore: *inconsistent*)

∧	0	N	1
0	0	N	0
N	N	N	N
1	0	N	1

∨	0	N	1
0	0	N	1
N	N	N	N
1	1	N	1

→	0	N	1
0	1	N	1
N	N	N	N
1	0	N	1

¬	
0	1
N	N
1	0

Logica a valori infiniti

- Lukasiewicz
  - una logica multivalente 'generica' che include anche la logica a valori infiniti (intervallo $[0, 1]$)
  - regole algebriche al posto delle tavole di verità:

$$|\neg\varphi| = 1 - |\varphi|$$
$$|\varphi \to \psi| = \min(1 - |\varphi| + |\psi|, 1)$$
$$|\varphi \wedge \psi| = \min(|\varphi|, |\psi|)$$
$$|\varphi \vee \psi| = \max(|\varphi|, |\psi|)$$
$$|\varphi \leftrightarrow \psi| = \min(1 - |\varphi| + |\psi|, 1 - |\psi| + |\varphi|)$$

- In tutte queste logiche:

  $\varphi \vee \neg\varphi$ non è una *tautologia*

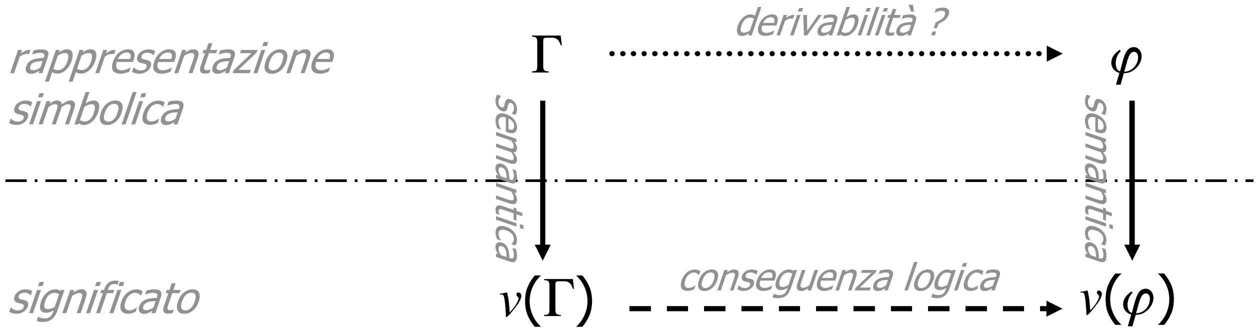
  $\varphi \wedge \neg\varphi$ non è una *contraddizione*

  $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$ rimane una *tautologia*

  - i valori in $[0, 1]$ non possono essere probabilità:
    una logica probabilistica non può essere vero-funzionale

Sistemi logici multivalenti

- Sono sistemi logici *diversi* dalla logica **classica**
- non tutte le *tautologie* e le *contraddizioni* classiche sono preservate



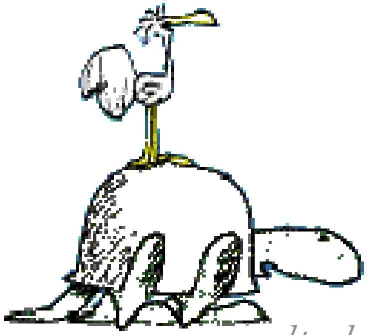
- Inoltre:
  - viene progressivamente indebolito il ruolo del linguaggio
    - nel caso di valori infiniti, la definizione è persino problematica
  - e quindi la rilevanza della relazione di *derivabilità*
  - ci si deve affidare al calcolo semantico (regole algebriche)
  - sono logiche per usi ‘ad hoc’ (comunque pochi)

2

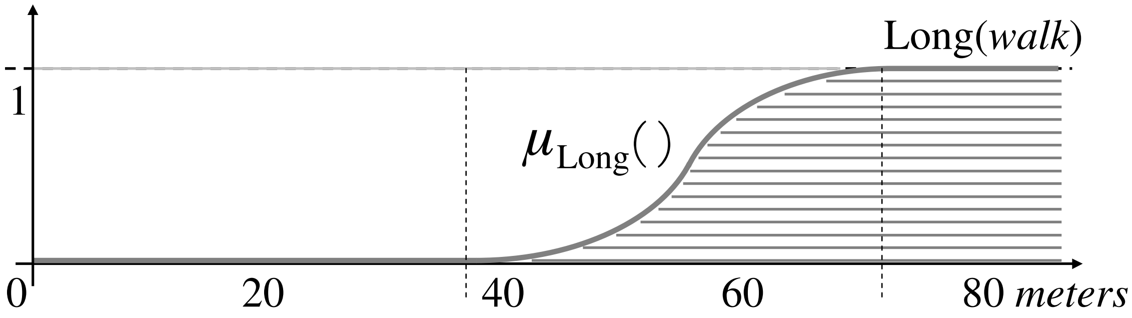
Logiche sfumate
(*Fuzzy Logics*)

Insiemi sfumati – idea intuitiva

- "E la tartaruga fece una lunga camminata ..."
  - ma quant'è lunga, una lunga camminata ...
    - per una tartaruga?



mooolto lunga

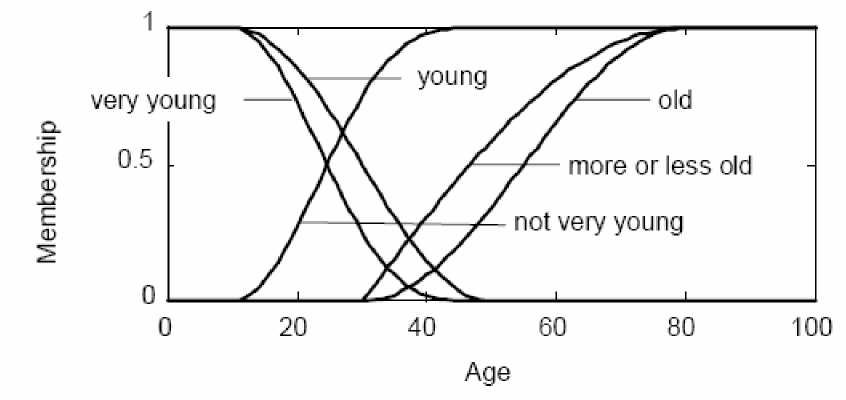


- La funzione caratteristica μ di un insieme non sfumato è del tipo:

  $\mu : \mathbf{U} \rightarrow \{0, 1\}$
- La funzione caratteristica μ di un insieme *sfumato (fuzzy set)* è del tipo:

  $\mu : \mathbf{U} \rightarrow [0, 1]$ (tutto l'intervallo, non solo i valori estremi)

Concetti di base



- **Universo**, **insieme sfumato**
  - L'**universo** di un insieme sfumato è un insieme di oggetti o intervallo di valori
    - (insieme o intervallo classico, non sfumato)
    - Esempi: età di una persona in anni, lunghezza di un cammino in metri
  - Un **insieme sfumato** (fuzzy set) è definito da una funzione caratteristica a valori continui $[0,1]$ su un determinato universo $\mathbf{U}$

    $<\mathbf{U}, \mu : \mathbf{U} \rightarrow [0, 1]>$

    - Diversi insiemi sfumati possono essere definiti sullo stesso universo
- **Termini** (labels)
  - Si denota un insieme sfumato con un **termine** (linguistico)
    - Esempi: young, old, very young

Variabili linguistiche

- Una **variabile linguistica**
  - è definita su un determinato universo **U**
  - assume come insiemi sfumati come valori
    - per convenzione, si dice la variabile linguistica assume come valori i **termini** che denotano gli insiemi sfumati

Example 6 (term set) *Let x be a linguistic variable with the label "Age". Terms of this linguistic variable, which are fuzzy sets, could be "old", "young", "very old" from the term set*

$$T = \{Old, VeryOld, NotSoOld, MoreOrLessYoung, QuiteYoung, VeryYoung\}$$

- Insiemi sfumati come **distribuzioni di possibilità**
  - Ciascun termine (o insieme sfumato) può essere visto come la descrizione dei **possibili** valori effettivi che la variabile linguistica può assumere
    - Non è (=non intende, non potrebbe) essere una <u>probabilità</u>

Funzioni caratteristiche

- L'intento è qualitativo, piuttosto che quantitativo
  (in pratica si scelgono le forme che semplificano i calcoli)

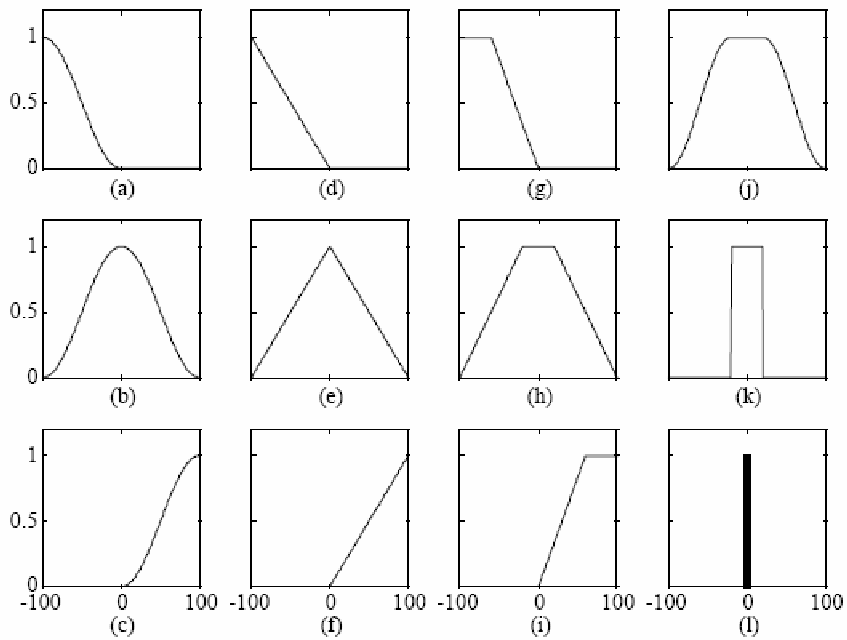
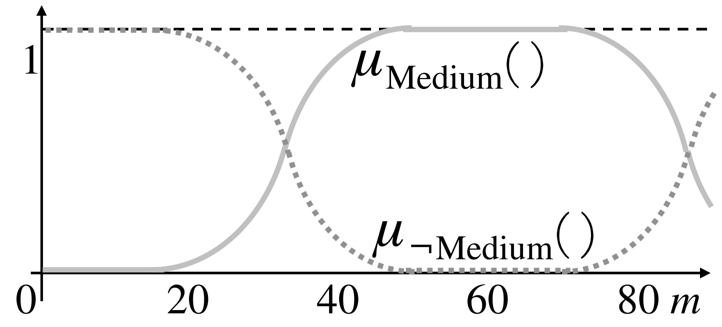


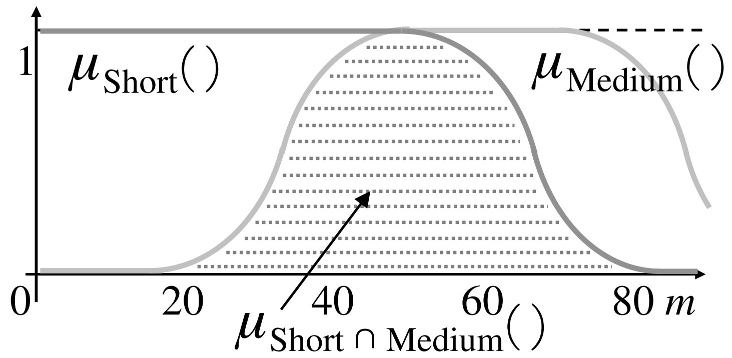
Figure 6: Examples of membership functions. Read from top to bottom, left to right: (a) z−function, (b) $\pi-$ function, (c) s−function, (d-f) triangular versions, (g-i) trapezoidal versions, (j) flat $\pi-$ function, (k) rectangle, (l) singleton.

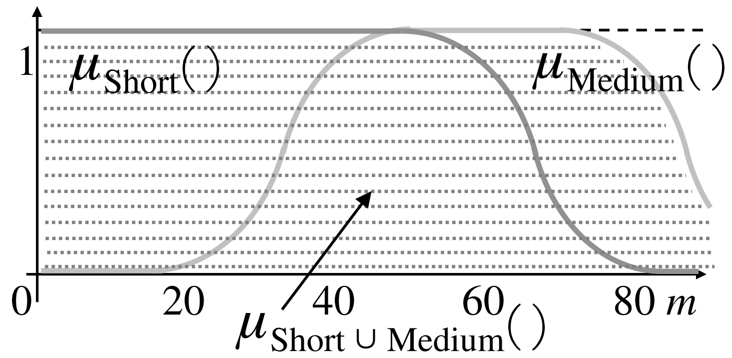
Operatori insiemistici

- Complemento, intersezione, unione
  - sono definiti per analogia con gli operatori non sfumati
    - non è necessario tuttavia che gli insiemi sfumati siano definiti sullo stesso universo …



- Alcune scelte comuni
  - complemento: $\mu_{\neg A}(\,) = 1 - \mu_A(\,)$
  - intersezione: $\mu_{A \cap B}(\,) = \min(\mu_A(\,), \mu_B(\,))$
  - unione: $\mu_{A \cup B}(\,) = \max(\mu_A(\,), \mu_B(\,))$





Requisiti per gli operatori insiemistici

- La scelta degli operatori insiemistici per gli insiemi sfumati non è affatto ovvia
- Requisiti generali:

intersezione (AND)

T-norm (Dubois & Prade)

boundary:	$T(0,0) = 0$; $T(1,a) = a$
monotonicity:	$a \geq c$; $b \geq d \Rightarrow T(a,b) \geq T(c,d)$
commutativity:	$T(a,b) = T(b,a)$
associativity:	$T(a,T(b,c)) = T(T(a,b),c)$
special elements:	$T(a,0) = 0$, $T(a,1) = a$

unione (OR)

T-conorm (Dubois & Prade)

boundary:	$S(1,1) = 1$; $S(0,a) = a$
monotonicity:	$a \geq c$; $b \geq d \Rightarrow S(a,b) \geq S(c,d)$
commutativity:	$S(a,b) = S(b,a)$
associativity:	$S(a,S(b,c)) = S(S(a,b),c)$
special elements:	$S(a,0) = a$, $S(a,1) = 1$

Scelta degli operatori insiemistici

– Esistono infinite norme e co-norme triangolari

- Esempi:

intersezione (AND)

T-norm	
Minimum:	$\min(a, b)$
Algebraic product:	ab
Bounded product:	$\max(\mathrm{a} + \mathrm{b} - 1, 0)$

unione (OR)

T-conorm	
Maximum:	$\max(a, b)$
Algebraic sum:	$\mathrm{a} + \mathrm{b} - ab$
Bounded sum:	$\max(\mathrm{a} + \mathrm{b}, 1)$

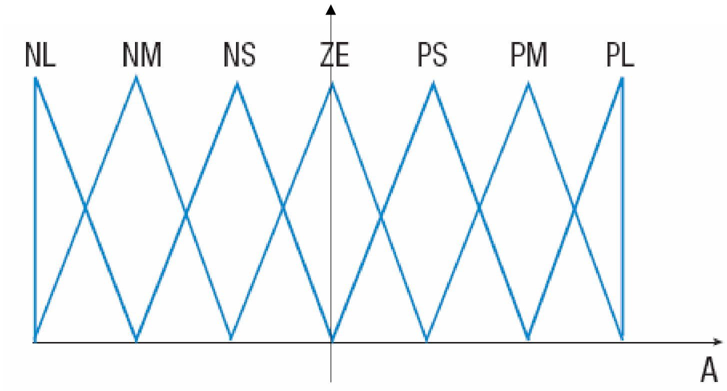
Qual'è la scelta giusta per la passeggiata della tartaruga?

$$\mathrm{Long}(walk) \vee (\mathrm{Medium}(walk) \wedge \mathrm{Flat}(walk))$$

Sistemi inferenziali sfumati

- La risposta (o forse la domanda) relativa alla scelta degli operatori insiemistici può essere meglio inquadrata considerando i sistemi inferenziali sfumati
  - (*fuzzy inference systems*)
- Sono sistemi a regole
  - in cui si usa una rappresentazione tramite insiemi sfumati
  - per le *premesse* e le *conseguenze*
- Molto usati nei sistemi di controllo automatico

Partizioni sfumate



T = {*Negative Large* (NL), *Negative Medium* (NM), *Negative Small* (NS), *Zero* (ZE), *Positive Small* (PS) *Positive Medium* (PM), *Positive Large* (PL)}

- Un'aggregazione di insiemi sfumati che ricopre interamente un universo
- **Partizione**

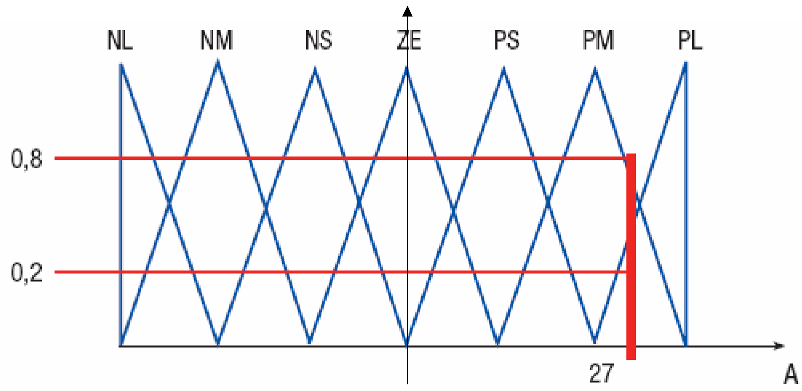
  $<\mathbf{U}, \{\mu_i(\ )\}>$

  (aggregazione di insiemi sfumati μ_i)

  $\forall x \in \mathbf{U},\ \Sigma_i\ \mu_i(x) = 1$

  (la somma dei valori di appartenenza è 1)

- **Sfumatura** (*fuzzification*)
  - Qualsiasi valore $x \in \mathbf{U}$ può essere trasformato in una **combinazione** di gradi di appartenenza



Regole fuzzy

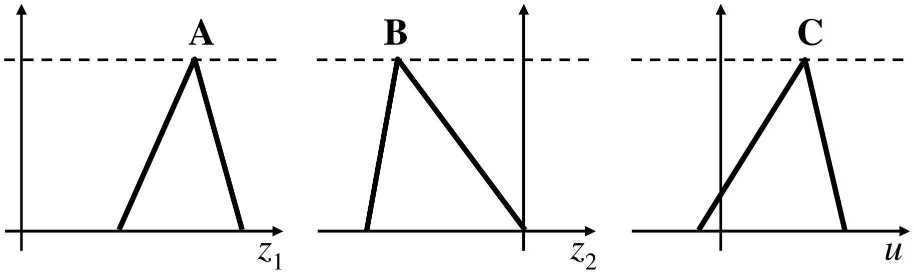
- Struttura generale delle regole (Mamdani)

  if (z_1 is **A**) **and** (z_2 is **B**) **then** (u is **C**)

  - (il linguaggio usato ha solo un valore convenzionale)

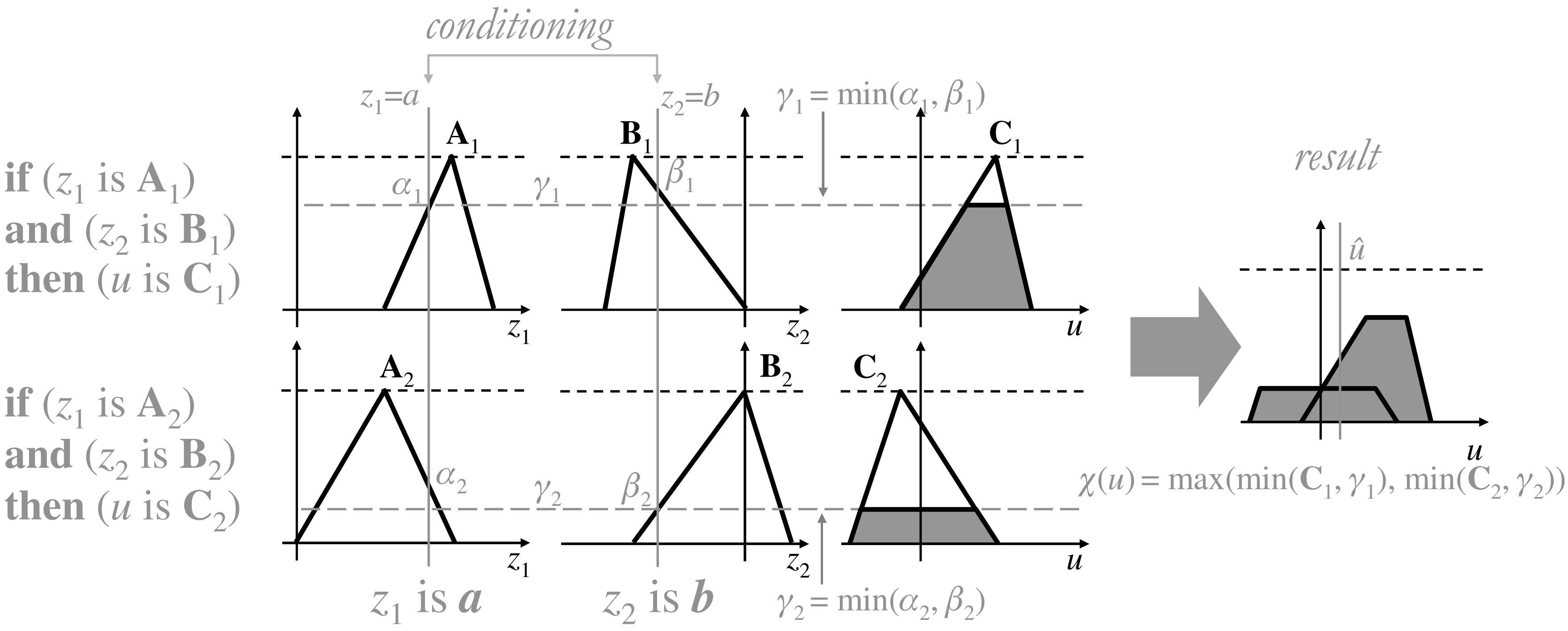
  – z_1, z_2 e u sono **variabili linguistiche**
    - non necessariamente sullo stesso universo
      anzi, generalmente su universi *diversi*

  – **A**, **B** e **C** sono **termini**, tipicamente in una **partizione**



Sistema inferenziale di Mamdani

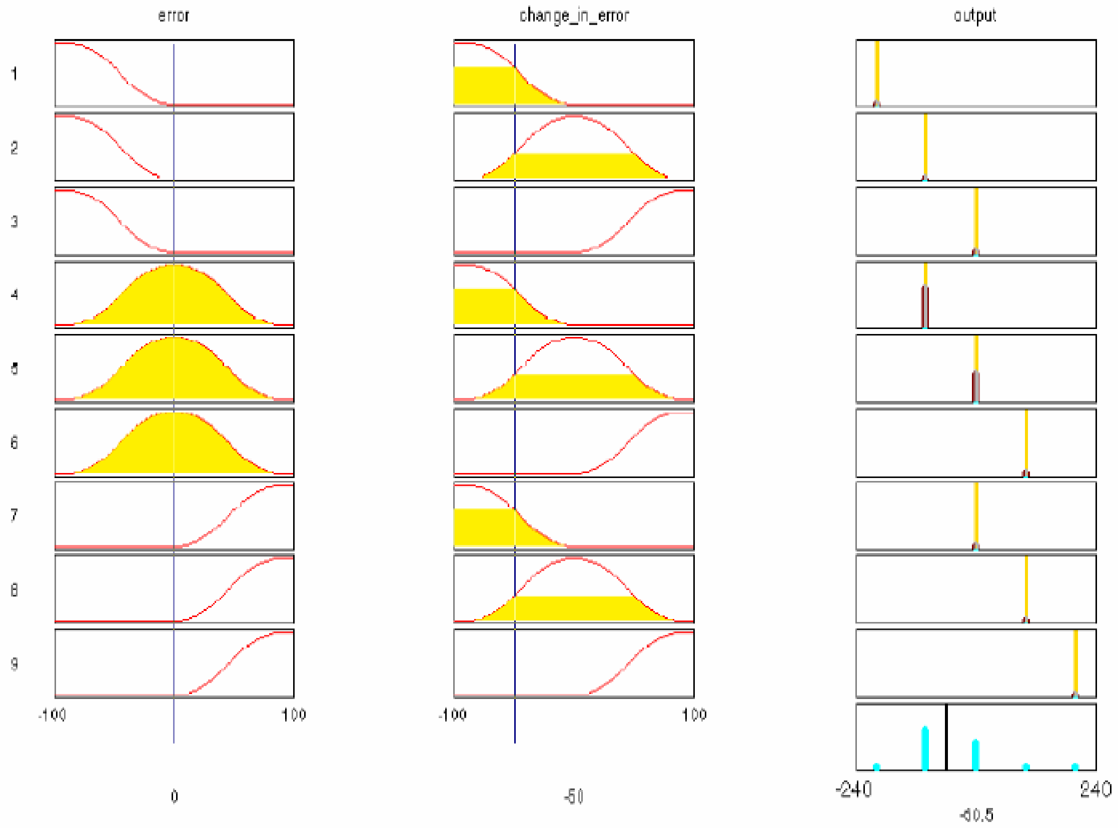
- Una base di regole sfumate



  - le premesse vengono intersecate con le osservazioni (*fuzzification*)
  - i *degrees of fulfillment* γ vengono propagati ai conseguenti
  - si calcola l'unione delle conseguenze e si effettua la *defuzzification*

Sistema completo

- Un sistema di inferenza sfumata
  - che contiene un certo numero di regole

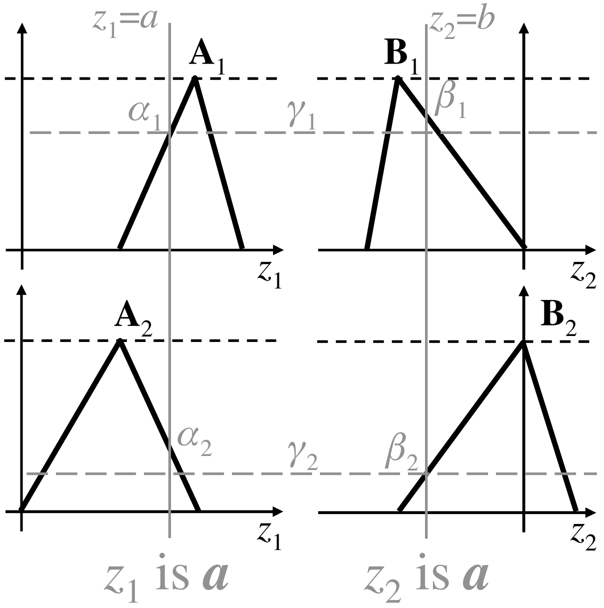


Sistema inferenziale di Sugeno

- Una base di regole sfumate

if (z_1 is $\mathbf{A}_1$)
and (z_2 is $\mathbf{B}_1$)
then $u = f_1(z_1, z_2)$

if (z_1 is $\mathbf{A}_2$)
and (z_2 is $\mathbf{B}_2$)
then $u = f_2(z_1, z_2)$



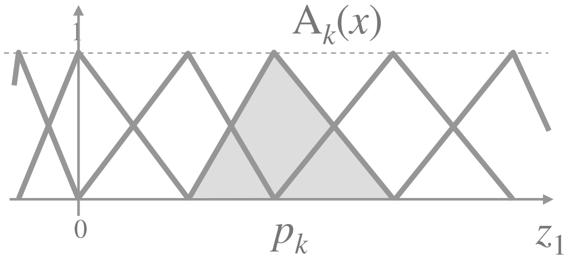
$$\hat{u} = \gamma'_1 f_1(a, b) + \gamma'_2 f_2(a, b)$$

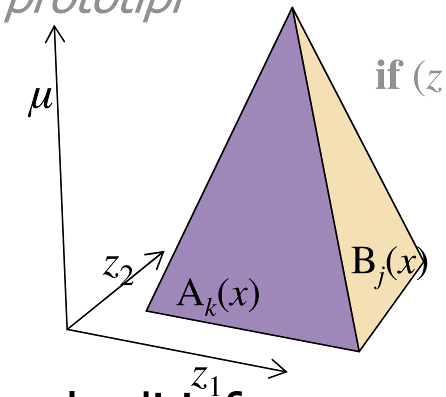
$$\gamma'_1 = \gamma_1 / (\gamma_1 + \gamma_2)$$
$$\gamma'_2 = \gamma_2 / (\gamma_1 + \gamma_2)$$

- il calcolo dei *degrees of fulfillment* γ è identico al caso di Mamdani
- ma l'unione dei γ è calcolata in modo diverso (niente *defuzzification*)

Progetto di sistemi inferenziali sfumati

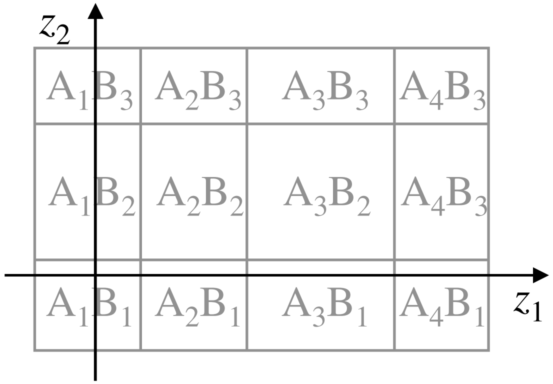
- Partizionamento del dominio delle variabili di input
  - l'ambito di interesse viene suddiviso in insiemi sfumati
  - ad esempio, usando punti noti come *prototipi*

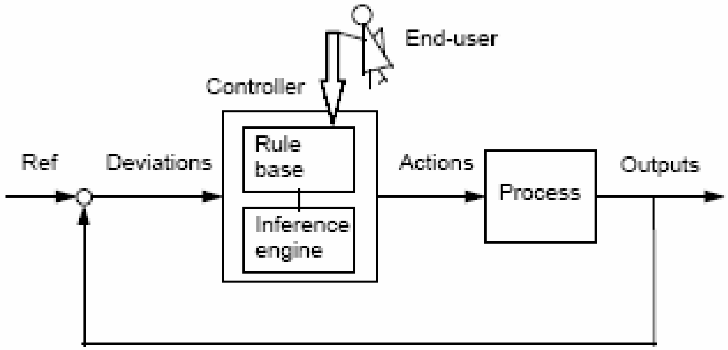




if $(z_1$ is $\mathbf{A}_k)$ **and** $(z_2$ is $\mathbf{B}_j)$

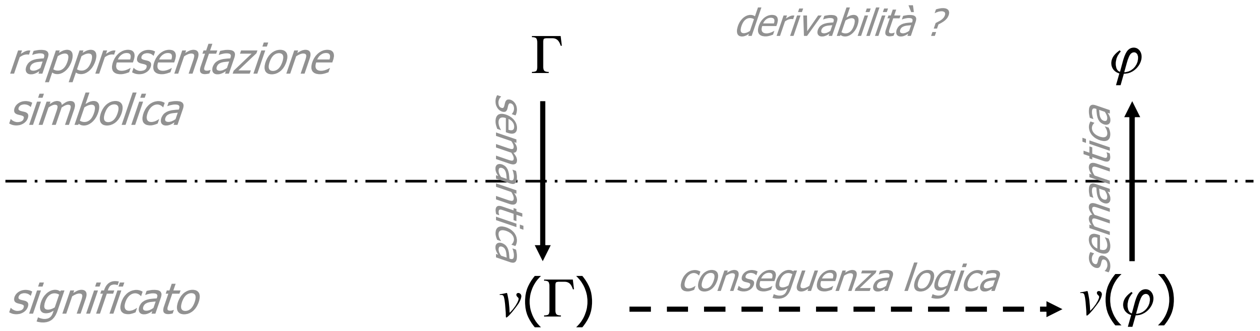
- Per ciascuna area, si definisce una regola di inferenza





Sistemi logici sfumati

- Sono sistemi *molto diversi* dalla logica **classica**

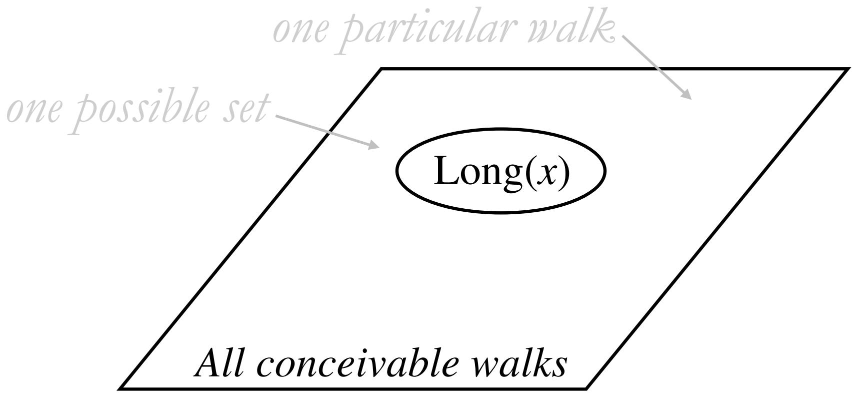


- Infatti:
  - il linguaggio formale perde completamente rilevanza
    - tuttavia rimane il concetto di *simbolo* (long, short, medium) ...
  - il calcolo inferenziale si effettua per via semantica
  - il livello di generalità è scarsissimo
    - si tratta di fatto di sistemi 'ad hoc':
      "una logica per ogni problema"
  - però i sistemi funzionano ...

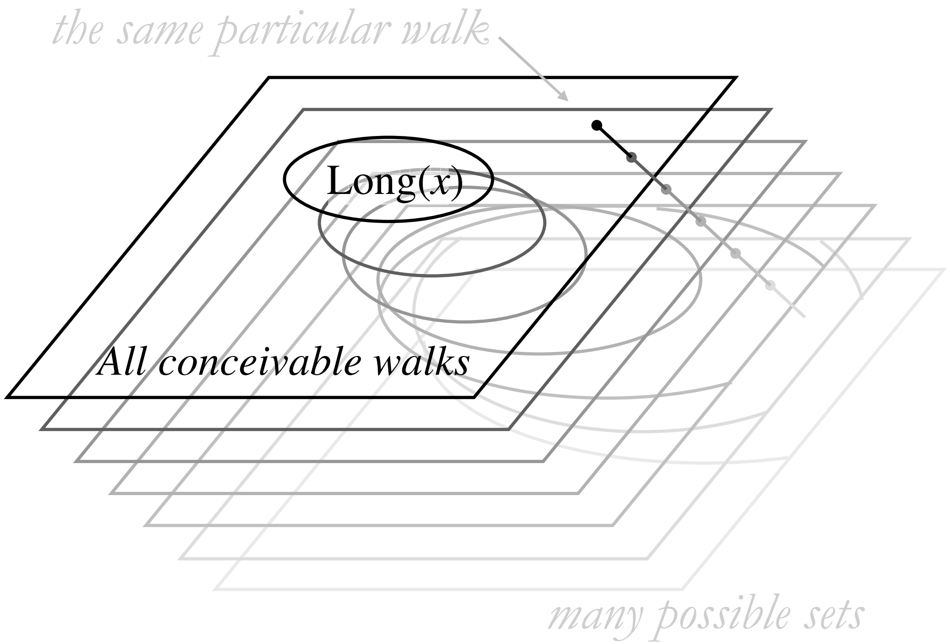
Fuzzy Logics ed altre logiche

- La logica sfumata può essere vista come un incontro tra:
  - logica modale
  - probabilità

logica **classica**

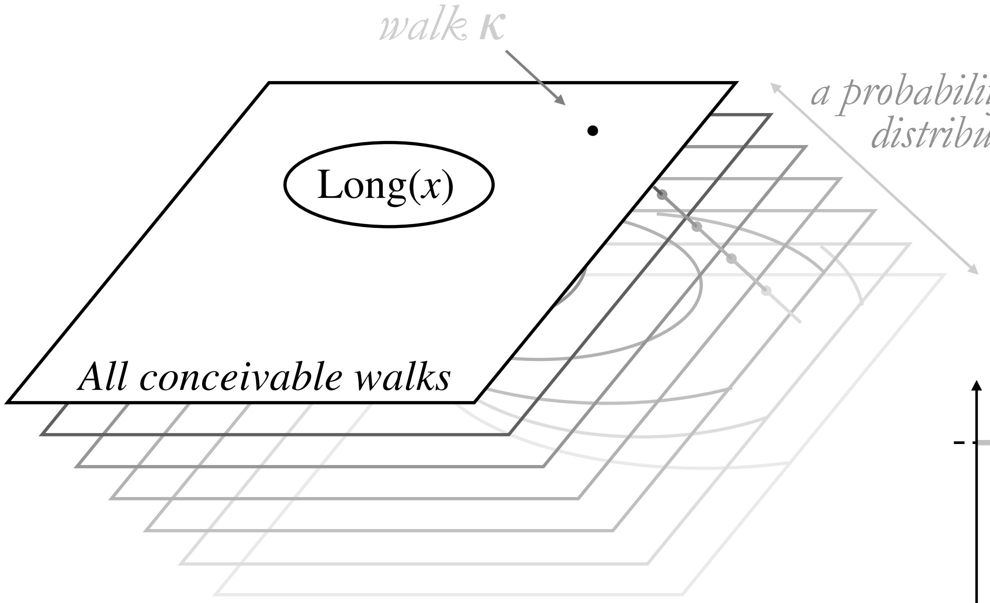


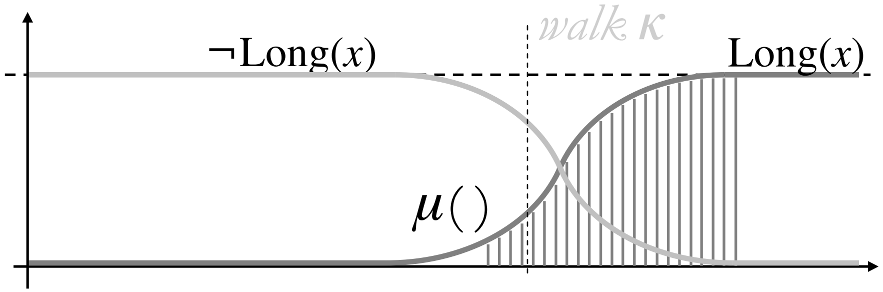
logica **modale**



Fuzzy Sets e probabilità

- La probabilità misura l'appropriatezza delle descrizioni
  - dal punto di vista del soggetto che ne fa uso





$$\chi_{\mathrm{Long}}(m) = \mu(\mathrm{Long}(x) \wedge (\mathrm{length}(x) = m))$$

Riferimenti

- Il programma dimostrativo dei *fuzzy inference systems* si trova al sito:

  http://www.iit.nrc.ca/IR_public/fuzzy/fuzzyJToolkit2.html

- Il sistema si integra anche con Jess