Intelligenza Artificiale II

Logica del Primo Ordine

Parte 1.3 - Teoria

Marco Piastra

3

Conseguenza, assiomi, derivazione

Conseguenza logica

- Definizione generale
  - $\Gamma \models \varphi$ (φ è **conseguenza logica** di Γ)
  - sse per qualsiasi $<\mathbf{U},v>$ $[s]$ tale che $<\mathbf{U},v>$ $[s] \models \Gamma$ si ha $<\mathbf{U},v>$ $[s] \models \varphi$
    - notare che la definizione vale per qualsiasi insieme di fbf Γ e fbf φ
  - sse ogni **modello** di Γ è anche **modello** di φ

Sostituibilità

- **Sostituibilità**
  - di una variabile x con un generico termine t in una formula φ
    - intuitivamente: sempre possibile se non si modificano le 'libertà' ed i 'vincoli'
  - una variabile libera è sempre **sostituibile** da un termine che contiene solo variabili libere (o nessuna variabile)
  - altrimenti: x è **sostituibile** con t in $\forall y\ \varphi$
    - se x non è libera in φ e t non introduce altre variabili libere
    - oppure se y non occorre in t e t è sostituibile in φ
      - Esempi positivi: $\forall x\ P(x)\ [x/f(x)]$
        $G(a,y)\ [y/f(z)]$
      - *Esempio negativo: $\forall y\ G(x,y)\ [x/f(y)]$
  - una variabile è sempre **sostituibile** da un termine chiuso (=senza variabili)
- **Istanziazione**

  $<\mathbf{U},v>\ [s] \models \varphi[x/t] \Leftrightarrow\ <\mathbf{U},v>\ [s,(x{:}\underline{s(t)})] \models \varphi$ (se x è sostituibile con t in φ)
  - in particolare

  $<\mathbf{U},v> \models \forall x\ \varphi\ \Rightarrow\ <\mathbf{U},v> \models \varphi[x/t]$ (se x è sostituibile con t in φ)

Generalizzazione

- **Generalizzazione** (semantica)
  - Aggiunta di quantificatori ad una fbf φ valida in $<\mathbf{U},v>$

    $<\mathbf{U},v> \models \varphi \;\Rightarrow\; <\mathbf{U},v> \models \forall x\, \varphi$
  - **La chiusura universale** di una fbf φ valida in $<\mathbf{U},v>$
    è l'aggiunta dei vincoli $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n$ necessari a trasformare φ in una fbf **chiusa**

    $<\mathbf{U},v> \models \varphi \;\Rightarrow\; <\mathbf{U},v> \models \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n\, \varphi$

Sistema di assiomi (Metodo a la Hilbert)

- Sei **schemi di assioma** per L_{PO}:

Gli stessi di L_{P}

Ax1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

Ax2 $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

Ax3 $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

Ax4 $\forall x\, \varphi \to \varphi[x/t]$ se il termine t è **sostituibile** per x in φ

Ax5 $\forall x\, (\varphi \to \psi) \to (\forall x\, \varphi \to \forall x\, \psi)$

Ax6 $\varphi \to \forall x\, \varphi$ se x non occorre libera in φ

  - ogni sostituzione di φ, ψ e χ con una fbf qualsiasi è un assioma
  - ogni generalizzazione di un assioma è un assioma

- Altri due *schemi di assioma* se si usa l'identità:

Ax7 $t = t$

Ax8 $(t = u) \to (\varphi[x/t] \leftrightarrow \varphi[x/u])$

Derivabilità, dimostrazione

- Definizione identica al caso proposizionale
- **Derivabilità**

  $\Gamma \vdash \chi$ sse esiste una **dimostrazione** di χ a partire da Γ
- **Regola di inferenza**
  - una sola regola di inferenza, il *modus ponens*
    $\varphi \to \psi, \varphi \vdash \psi$
- **Dimostrazione**
  - di $\Gamma \vdash \chi$
  - è una successione *finita* di passi $<\alpha_1, \ldots, \alpha_n>$
  - per ogni passo α_i si hanno tre alternative:
    1) $\alpha_i \in$ istanza di $\mathrm{Ax}n$
    2) $\alpha_i \in \Gamma$
    3) α_i è ottenibile dai passi precedenti, tramite *modus ponens* $\varphi \to \psi, \varphi \vdash \psi$
  - $\alpha_n = \chi$

Esempio 5

- Derivazione: "Socrate è mortale":

  $\forall x\,(Umano(x) \rightarrow Mortale(x)),\ Umano(socrate) \vdash Mortale(socrate)$

  1: $\forall x\,(Umano(x) \rightarrow Mortale(x))$ (premessa)
  2: $\forall x\,(Umano(x) \rightarrow Mortale(x)) \rightarrow (Umano(socrate) \rightarrow Mortale(socrate))$
  ($\mathrm{Ax4}$ su regola e $[x/socrate]$)
  3: $Umano(socrate) \rightarrow Mortale(socrate)$ (mp 1, 2)
  4: $Umano(socrate)$ (premessa)
  5: $Mortale(socrate)$ (mp 3, 4)

Regole aggiuntive

- Regole 'ereditate' da L_P
  - *Riflessività*

    $\varphi \vdash \varphi$
  - *Monotonia sintattica*

    se $\Gamma \subseteq \Sigma,\ \Gamma \vdash \varphi$ allora $\Sigma \vdash \varphi$
  - *Transitività*

    se per ogni $\varphi \in \Delta$ si ha che $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta \vdash \psi$ allora $\Gamma \vdash \psi$
  - *Regola di deduzione*

    $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ equivale a $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$
  - *Congiunzione / separazione*

    $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \psi$ equivalgono a $\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)$

  - Dato che le regole aggiuntive coinvolgono le premesse Γ, i passi α_i si indicano come $\Gamma \vdash \varphi$ (*si esplicitano le premesse*)

Regole aggiuntive (2)

- Regole specifiche di L_{PO}
  - *Ridenominazione delle variabili*

    se $\Gamma \vdash \varphi$, x è vincolata in φ e y non occorre φ, allora $\Gamma \vdash \varphi[x/y]$

    Esempio:

    1: $\Gamma \vdash \exists x\, P(x) \rightarrow \forall y\, Q(y)$

    2: $\Gamma \vdash \exists z\, P(z) \rightarrow \forall t\, Q(t)$
  - *Introduzione dell'esistenziale*

    se $\Gamma \vdash \varphi[x/t]$ e t è sostituibile a x in φ, allora $\Gamma \vdash \exists x\, \varphi$

    Esempio:

    1: $\Gamma \vdash P(a)$

    2: $\Gamma \vdash \exists x\, P(x)$
  - *Eliminazione dell'universale*

    se $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$ e t è sostituibile a x in φ, allora $\Gamma \vdash \varphi[x/t]$

    Esempio:

    1: $\Gamma \vdash \forall x\, P(x)$

    2: $\Gamma \vdash P(a)$

Regole aggiuntive (3)

- Regole specifiche di L_{PO}
  - *Generalizzazione* (*sintattica*)

    se $\Gamma \vdash \varphi$ e x non occorre libera in Γ, allora $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$

    - Esempio di errore (perchè si impone il vincolo):

1:	$P(x) \vdash P(x)$	(riflessività)
2:	$P(x) \vdash \forall x\, P(x)$	(*generalizzazione)
3:	$\vdash P(x) \rightarrow \forall x\, P(x)$	(deduzione)
4:	$\vdash P(x) \rightarrow \forall y\, P(y)$	(ridenominazione)
5:	$\vdash \forall x\, (P(x) \rightarrow \forall y\, P(y))$	(generalizzazione)
6:	$\vdash P(a) \rightarrow \forall y\, P(y)$	(eliminazione $\forall$)
		(*NON CORRETTA)

Esempio 6

- Derivazione: "Alba è sorella di Amelia"

  Regola:

  $\forall x \forall y\, ((Femmina(x) \land \exists z\, (Genitore(z,x) \land Genitore(z,y))) \rightarrow Sorella(x,y))$

  Fatti:

  $Femmina(alba)$, $Femmina(amelia)$, $Genitore(mario,alba)$, $Genitore(mario,amelia)$

  1: $\forall y\, ((Femmina(alba) \land \exists z\, (Genitore(z,alba) \land Genitore(z,y))) \rightarrow Sorella(alba,y))$

  (Ax4 su Regola e $[x/alba]$)

  2: $(Femmina(alba) \land \exists z\, (Genitore(z,alba) \land Genitore(z,amelia))) \rightarrow Sorella(alba,amelia)$

  (Ax4 su 1 con $[y/amelia]$)

  4: $Genitore(mario,alba) \land Genitore(mario,amelia)$ (congiunzione)

  5: $\exists z\, (Genitore(z,alba) \land Genitore(z,amelia))$ (introd. esistenziale)

  6: $Femmina(alba)$ (fatti)

  7: $(Femmina(alba) \land \exists z\, (Genitore(z,alba) \land Genitore(z,amelia)))$ (5 + 6)

  8: $Sorella(alba,amelia)$ (mp 2, 7)

Teorie, assiomatizzazioni

- Definizione identica al caso proposizionale

- Una **teoria** è un insieme di fbf Σ (qualsiasi)
- Dato una teoria Γ (un insieme di fbf),
l'insieme dei **teoremi** di Γ è l'insieme di tutte le fbf *derivabili* da Γ

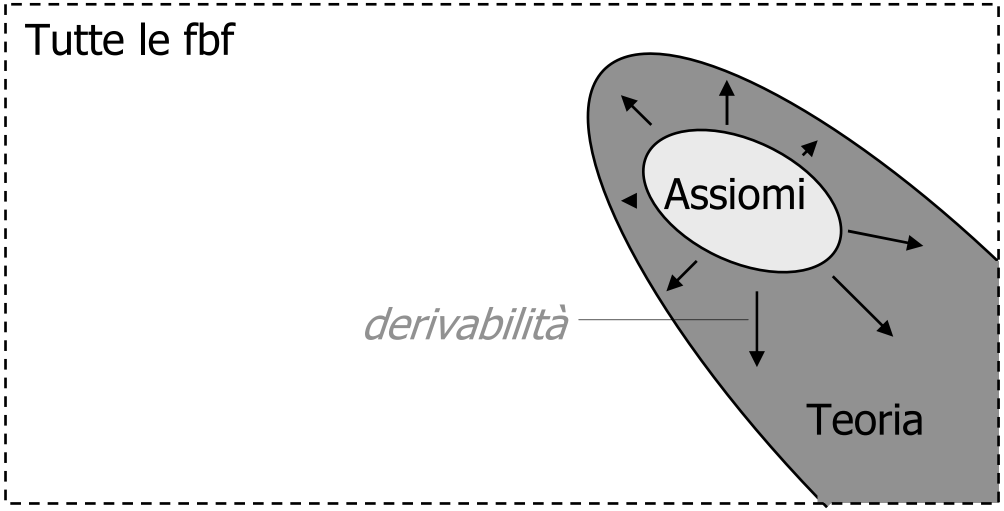
$$\text{Teoremi}(\Gamma) = \{\varphi : \Gamma \vdash \varphi\}$$

- Un'insieme di fbf Γ è un'**assiomatizzazione** di Σ sse

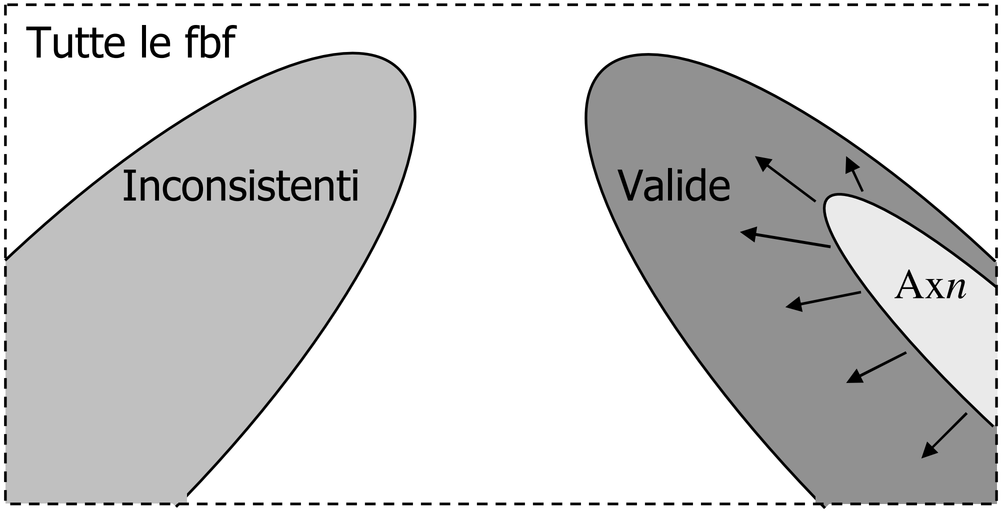
$$\Sigma \equiv \text{Teoremi}(\Gamma)$$

Enunciati e teorie

- Una **teoria** può essere quindi definita tramite **assiomi**
  - Tale teoria coincide con i **teoremi** (fbf derivabili dagli assiomi)



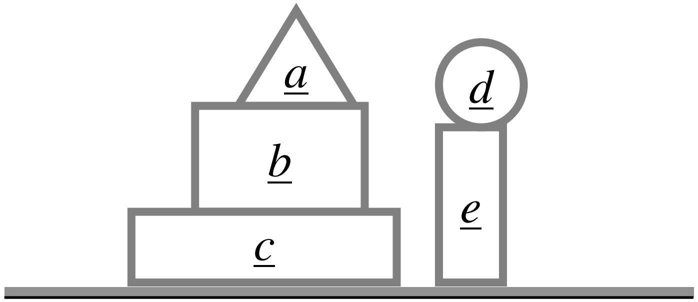
- Nel caso di $\mathrm{Ax}n$ per L_{PO}
  - L'insieme di assiomi è infinito (esistono assiomatizzazioni finite)
  - La teoria è l'insieme delle fbf **valide**



Costruzione e uso di teorie in L_{PO}

- Il sistema di assiomi Ax descrive la *teoria* delle fbf *valide*
  - le fbf *valide* si applicano a qualsiasi ragionamento (sono 'leggi logiche' o, meglio, leggi di L_{PO})
- Costruzione assiomatica di *teorie* particolari
  - si definisce un insieme K di fbf (assiomi) che descrive le proprietà degli oggetti di cui si parla
- La derivazione di *teoremi* serve a 'scoprire', cioè a rendere espliciti, gli elementi di una teoria
  - Vale a dire, gli elementi *implicitamente* descritti dai suoi assiomi

Esempio 7



- **Definizioni**

  $\forall x \forall y\ (On(x,y) \leftrightarrow (Above(x,y) \wedge \neg \exists z\ (Above(x,z) \wedge Above(z,y))))$

  $\forall x\ (Ontable(x) \leftrightarrow \neg \exists \mathrm{y}\ Above(x,y))$

  $\forall \mathrm{x}\ (Clear(x) \leftrightarrow \neg \exists \mathrm{y}\ Above(y,x))$

- **Assiomi** **AxBW** (Cook & Liu, 2002)

  1: $\forall x\ \neg Above(x,x)$

  2: $\forall x \forall y \forall z\ ((Above(x,z) \wedge Above(z,y)) \rightarrow Above(x,y))$

  3: $\forall x \forall y \forall z\ ((Above(x,y) \wedge Above(x,z)) \rightarrow (y = z \vee Above(z,y) \vee Above(y,z)))$

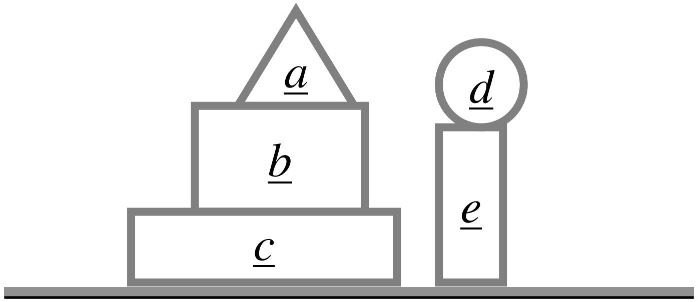
  4: $\forall x \forall y \forall z\ ((Above(y,x) \wedge Above(z,x)) \rightarrow (y = z \vee Above(z,y) \vee Above(y,z)))$

  5: $\forall x\ (Ontable(x) \vee \exists y\ (Above(x,y) \wedge Ontable(y)))$

  6: $\forall x\ (Clear(x) \vee \exists y\ (Above(y,x) \wedge Clear(y)))$

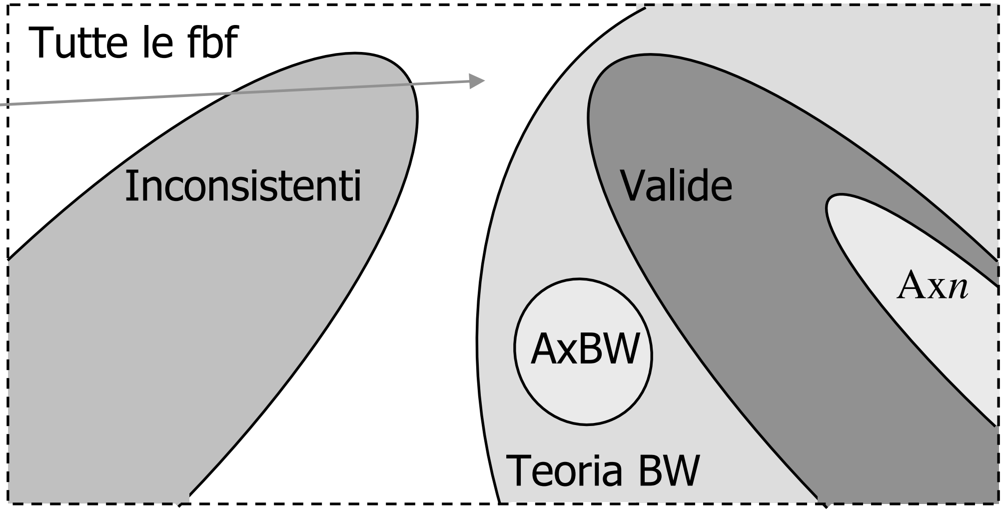
  7: $\forall x \forall y\ (Above(x,y) \rightarrow (\exists z\ On(x,z) \wedge \exists v\ On(v,y)))$

Esempio 7 (2)

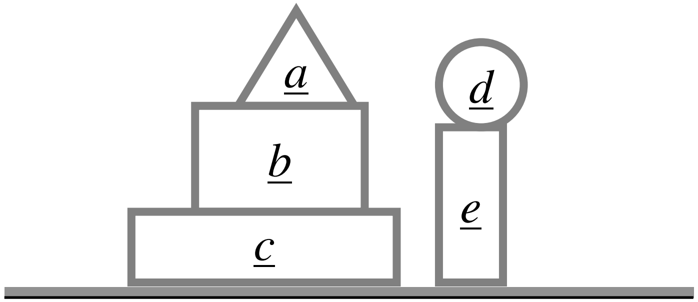


- La Teoria BW è definita dagli assiomi AxBW
  - coincide con l'insieme di fbf **derivabili** da AxBW
- La Teoria BW include Axn e tutte le tautologie (o fbf valide)
  - si rammenti la definizione di derivazione
  - non può contenere fbf inconsistenti
    - altrimenti includerebbe *tutte* le fbf

- Non tutte le fbf sono un teorema o la negazione di un teorema



Esempio 7 (3)



- Le fbf della teoria BW si dividono in due categorie
  - fbf che contengono variabili
  - fbf che contengono solo costanti (equivalenti a forme proposizionali)
- Le fbf che contengono variabili descrivono generalizzazioni
  - Esempio: stabilire se la seguente fbf $\in$ BW

    $\forall x \forall y \, ((Ontable(x) \wedge Ontable(y)) \rightarrow x = y)$

    - Non è un teorema di BW (né la negazione di un teorema)
- Le fbf proposizionali descrivono fatti (o situazioni) effettive
  - Esempio: stabilire se la seguente fbf $\in$ BW

    $(Ontable(c) \wedge Above(a,c) \wedge On(a,b)) \rightarrow Above(b,c)$

    - E` un teorema di BW

Correttezza e completezza

- Correttezza di L_{PO}

  $\Gamma \vdash \varphi \;\Rightarrow\; \Gamma \models \varphi$ $\quad$ Γ e φ qualsiasi

  - Validità del sistema di assiomi
    - le fbf del sistema di assiomi Ax per L_{PO} sono *valide*

- Completezza (debole) di L_{PO}

  $\models \varphi \;\Rightarrow\; \vdash \varphi$ $\quad$ Ci si limita alle sole fbf *valide*

  - Completezza del sistema di assiomi
    - la *teoria* delle fbf *valide* di L_{PO} coincide con l'insieme dei *teoremi* del sistema di assiomi Ax

      $\varphi \in \mathrm{Teoremi}(Ax) \;\Leftrightarrow\; \models \varphi$

- Completezza (forte) di L_{PO}

  $\Gamma \models \varphi \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash \varphi$ $\quad$ Solo a determinate condizioni

  - <u>Non</u> vale per una teoria che include i numeri naturali e le relazioni ricorsive (*vedi oltre* – Teorema di Gödel)

Teorema di Gödel

- **Cosa dice**
  - ω-incompletezza
    - espressa come teoria in L_{PO}, l'**aritmetica** (la teoria che descrive *le proprietà dei numeri naturali*) contiene degli enunciati **veri** (nella struttura di riferimento) che non sono **dimostrabili**
    - per dimostrarlo, Gödel stabilisce una corrispondenza tra numeri naturali e fbf del linguaggio, in modo da rendere tale teoria *auto-referenziale*
    - quindi rappresenta, nella teoria, l'*auto-referenza* 'questo enunciato è falso'
- Cosa comporta
  - Non tutte le teorie specifiche espresse in L_{PO} sono complete
- Tuttavia
  - La teoria delle fbf logicamente valide, descritta dagli assiomi Ax, è invece **completa**
  - Non tutte le teorie che includono i numeri naturali sono incomplete
    - La teoria deve contenere anche la descrizione di un minimo di proprietà astratte (i.e. *rappresentabilità delle funzioni ricorsive*).
    - p.es. per essere incompleta, la teoria deve contenere gli assiomi di Peano

Altre limitazioni intrinseche di L_{PO}

- Indecidibilità di L_{PO} (Church)
  - Non esiste un algoritmo di validità generale in grado di stabilire se $\Gamma \models \varphi$
    - ma alcuni sottoinsiemi (non banali) di L_{PO} sono decidibili
    - inoltre, L_{PO} è *semi-decidibile* (si veda il capitolo successivo)
- Linguaggio e modelli:
  - Le teorie che includono il simbolo di identità sono sempre interpretabili in una struttura in cui la relazione corrispondente non è l'identità tra oggetti
  - Alcune proprietà non sono caratterizzabili da una teoria
    - ogni teoria che ammette un modello infinito ha anche un modello numerabile (Löwenheim-Skolem)

FAQ 3

- Il caso del predicato identità '='
  - Nella definizione degli schemi d'assioma Ax per L_{PO}, il predicato identità ha una caratterizzazione a parte (assiomi Ax7, Ax8)
  - Nella semantica dei termini si è introdotta una regola speciale (per $t_1 = t_2$)
    - Perché?
- L'identità può essere rappresentata come un predicato
  - Tuttavia, una teoria che rappresenta l'identità ha:
    - modelli $<\mathbf{U},v>$ (detti standard) in cui $v(=)$ è l'identità su $\mathbf{U}$
    - modelli $<\mathbf{U},v^*>$ (detti anche non-standard) in cui $v^*(=)$ non è l'identità su $\mathbf{U}$
  - Quest'anomalia è ineliminabile
- Gli assiomi speciali e la regola semantica eliminano l'anomalia
  - Ma queste regole comportano un trattamento esplicito (p.es. nella dimostrazione di completezza)