Intelligenza Artificiale II

Logica del Primo Ordine

Parte 1.1 - Teoria

Marco Piastra

1

Concetti generali

Logica proposizionale

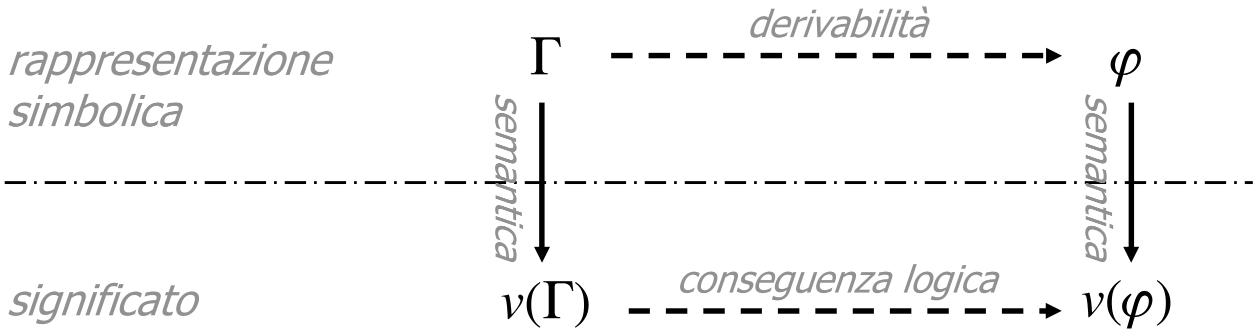
- **Linguaggio logico** + **Struttura semantica**
  - Linguaggio L_P
    - (simboli proposizionali, connettivi, parentesi e regole per le fbf)
  - Struttura semantica
    - $<\{0, 1\}, v>$
- Interessanti proprietà:
  - La relazione tra **conseguenza logica** e **derivabilità** è *completa*
    - tutte le *conseguenze logiche* sono anche *derivabili* e viceversa
  - $\Gamma \models \varphi$? è *decidibile* in modo automatico
- Il limite principale è la capacità di rappresentazione:
  - non è possibile rappresentare la struttura interna delle affermazioni
    - e quindi mettere in evidenza legami logici più sottili
  - semantica basata su una struttura molto semplice
    - $\{0, 1\}$: nessuna possibilità di caratterizzare strutture più complesse

Linguaggio logico e semantica

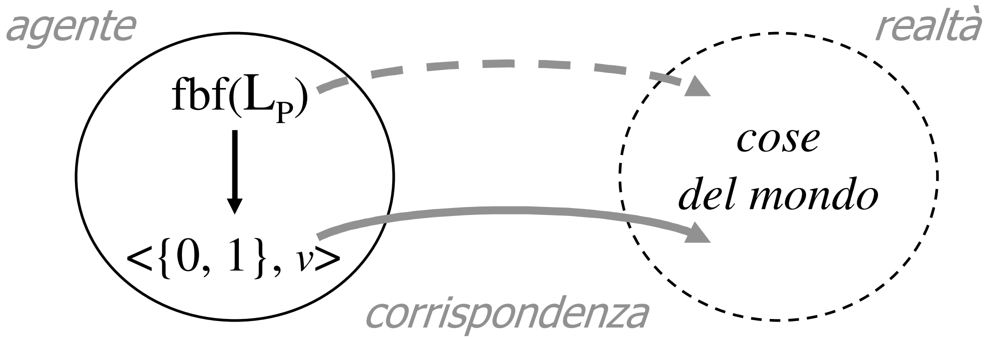
- Linguaggio **dichiarativo**
  - Le formule sono asserzioni dichiarative, ciascun simbolo proposizionale rappresenta un fatto atomico
    - A ("Socrate è mortale")
    - $A \wedge B$ ("Socrate è mortale" e "Ogni uomo è mortale")
    - $B \rightarrow A$ ("Ogni uomo è mortale" implica "Socrate è mortale")
- Formule composite $\Rightarrow$ informazioni complesse
  - Si possono rappresentare regole, fatti, ipotesi, disgiunzioni
    - $A \rightarrow ((B \vee C) \wedge \neg(B \wedge C))$ (A implica B oppure C, ma non entrambi)
- Semantica **composizionale**
  - Dal valore di verità dei fatti atomici si deriva il valore di qualsiasi fbf
- **Conseguenza logica** come **proprietà strutturale**
  - La formalizzazione dipende dal contesto, le proprietà formali no
    - $\{(A \vee \neg B) \rightarrow C, C \rightarrow (B \vee D), \neg D \rightarrow A, \neg B\} \models D$
      (indipendentemente dal significato inteso di A, B, C e D)

Linguaggio, interpretazione e realtà

- Una logica descrive la relazione tra formule (o insiemi di formule)



- La corrispondenza con la realtà è su entrambi i piani



Si pensi ad un robot:
la *corrispondenza* semantica
è definita dai sensori …

… il linguaggio logico
permette di ragionare
(p.es. arricchire)
i dati dei sensori

Limiti: fatti ed astrazioni

- *Esempio* :
  - "Ogni essere umano è mortale"
  - "Socrate è un essere umano"
  - "Socrate è mortale"
- Il legame logico (informale) è evidente

Schema del *modus ponens*			
	$\varphi \rightarrow \psi$	(Essere umano) implica (essere mortale)	$A \rightarrow B$
	φ	*Socrate* è un essere umano	C
	ψ	*Socrate* è mortale	D

- Nella traduzione logico-proposizionale, a, b, c e d non hanno alcun legame (formale)
- Altri esempi:
  - "Quando capra e cavolo stanno sulla stessa riva, la capra mangia il cavolo"
  - "Il cacciatore sente una brezza quando si trova sul ciglio di una trappola"

Logica del primo ordine

- **Logica proposizionale**
  - Rappresenta il mondo come insieme di **fatti**

- **Logica del primo ordine**
  - Rappresentazione più articolata
  - **Oggetti**
    - persone, numeri, costruzioni, colori, storie, percorsi, pezzi di legno, …
  - **Relazioni** (tra oggetti)
    - rosso, grande, primo, fratello di, maggiore di, compreso tra, …
  - **Funzioni** (o **proprietà** di oggetti)
    - colore di, successore, padre di, …

Linguaggio del primo ordine

- Simboli
  - **Costanti** individuali (singoli oggetti)
    - Esempi: *Socrate*, *Sfera1*, *MickeyMouse*, *Amelia*, ...
    - Convenzionalmente indicate come a, b, c, ...
  - **Predicati**
    - Esempi: *Red*(.), *Large*(.), *GreaterThan*(..), =
    - Ogni predicato ha un numero di argomenti prestabilito
    - Convenzionalmente indicati come $P(.)$, $Q(.)$, $R(..)$, ... (spesso si omettono parentesi e puntini)
  - **Funzioni**
    - Esempi: *sqrt*(.), *colorOf*(.), *GreaterThan*(..), =
    - Ogni funzione ha un numero di argomenti prestabilito
    - Convenzionalmente indicate come $f(.)$, $g(.)$, $h(..)$, ... (spesso si omettono parentesi e puntini)

Convenzionalmente, per il predicato binario = si usa la forma infissa (p.es. '$a = b$')

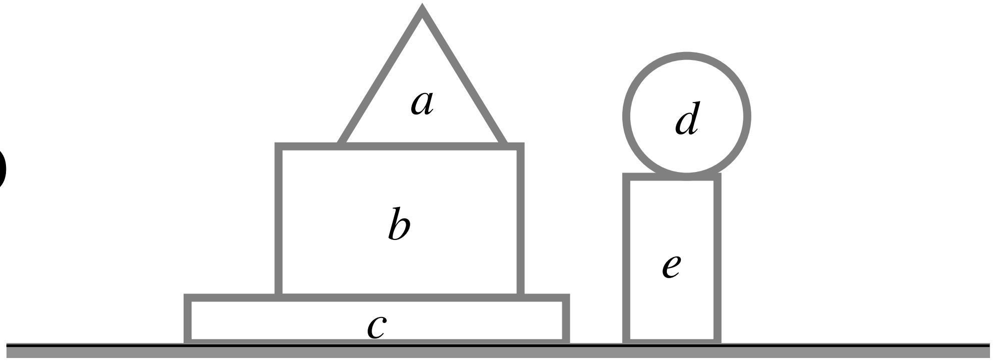
Linguaggio del primo ordine (2)

- Simboli (2)
  - **Variabili**
    - Convenzionalmente indicate come x, y, z, …
  - **Connettivi**
    - Come in logica proposizionale: $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$
  - **Parentesi e virgola**
    - (,), ,
  - **Quantificatori**
    - Universale: $\forall$
    - Esistenziale: $\exists$
    - Si applicano **sempre** ad una ed una sola variabile
      Esempi: $\forall x$, $\exists y$, $\forall x \forall y$

Esempi di formule

- "I fratelli sono parenti"
  $\forall x \forall y\ (Fratello(x,y) \rightarrow Parente(x,y))$
- "La relazione di parentela è simmetrica"
  $\forall x \forall y\ (Parente(x,y) \leftrightarrow Parente(y,x))$
- "La relazione di parentela è simmetrica"
  $\forall x \forall y\ (Parente(x,y) \leftrightarrow Parente(y,x))$
- "Una madre è un genitore di sesso femminile"
  $\forall x \forall y\ (Madre(x,y) \leftrightarrow (Genitore(x,y) \land Femmina(x)))$
- "Un cugino primo è figlio di un fratello o una sorella di uno dei genitori"
  $\forall x \forall y\ (Cugino(x,y) \leftrightarrow$
  $\exists z \exists w\ (Genitore(z,x) \land Genitore(w,y) \land (Fratello(z,w) \lor Sorella(z,w))))$

Descrivere un mondo



- Fatti

$Pyramid(a)$
$Parallelepiped(b) \land Parallelepiped(c) \land Parallelepiped(e)$
$Sphere(d)$

- Relazioni

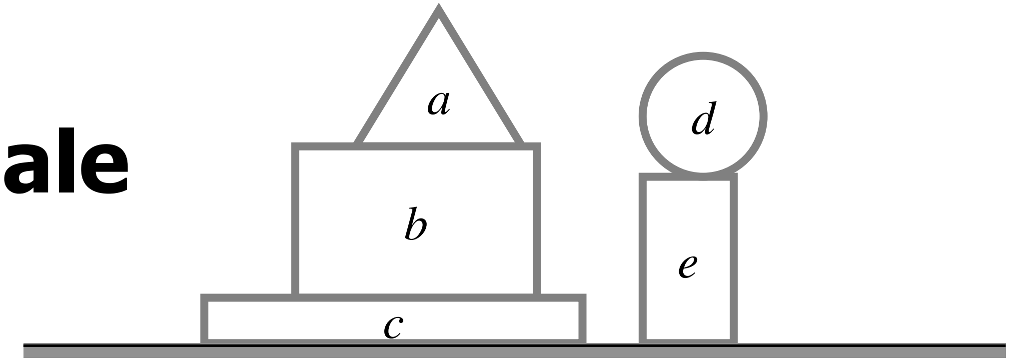
$Ontable(c) \land Ontable(e)$
$Above(a,b) \land Above(b,c) \land Above(a,c) \land Above(d,e)$
$Clear(a) \land Clear(d)$

- Regole

$\forall x \forall y\ (On(x,y) \leftrightarrow (Above(x,y) \land \neg \exists z\ (Above(x,z) \land Above(z,y))))$
$\forall x\ (Ontable(x) \leftrightarrow \neg \exists z\ Above(x,z))$
$\forall x\ (Clear(x) \leftrightarrow \neg \exists z\ Above(z,x))$

Si dice linguaggio **del primo ordine** in quanto
i quantificatori agiscono solo sugli oggetti,
i.e. sulle le variabili x, y, z ..., e non sulle **relazioni**
(*In una logica del secondo ordine si hanno formule del tipo*: $\exists F\ F(a,b)$)

Semantica estensionale



- **Universo del discorso U**
  - Un insieme di oggetti di base

    $\{a, b, c, d, e\}$
- **Relazioni**
  - Insiemi di tuple formate a partire da **U**

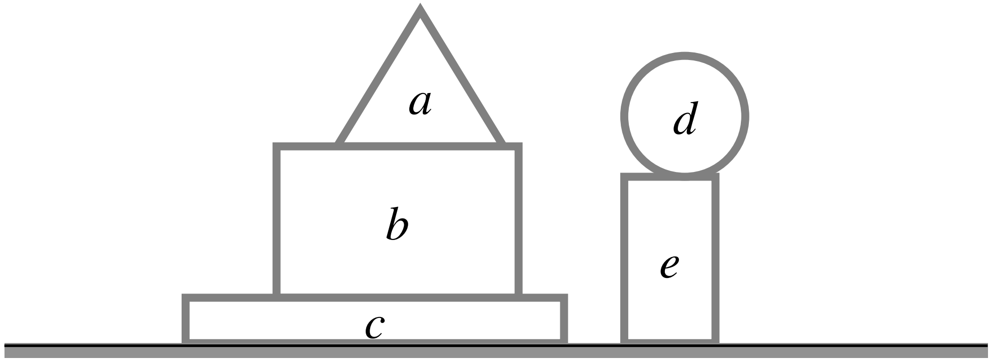
    Ontable: $\{<c>, <e>\} \Leftrightarrow \{c, e\}$

    Above: $\{<a,b>, <a,c>, <b,c>, <d,e>\}$

    On: $\{<a,b>, <b,c>, <d,e>\}$

    Between: $\{<b,a,c>\}$

Funzioni



- **Universo del discorso U**
  - Una diversa caratterizzazione

    {*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *pyramid*, *parallelepiped*, *sphere*, *flat*, *pointwise*}

- **Relazioni come tipi**

  Block: {*a*, *b*, *c*, *d*, *e*}

  Shape: {*pyramid*, *parallelepiped*, *sphere*}

  Contact: {*flat*, *pointwise*}

- **Funzioni**
  - Corrispondenze (tuple) ad un sol valore

    shapeOf: {<*a*,*pyramid*>, <*b*,*parallelepiped*>, <*c*,*parallelepiped*>,
    <*d*,*sphere*>,< *b*,*parallelepiped*>}
    contactBetween: {<*a*,*b*,*flat*>, <*b*,*c*,*flat*>, <*d*,*e*,*pointwise*>}

  - Esempi (formule):

    $\forall x \forall s\ ((shapeOf(x) = s) \rightarrow (Block(x) \wedge Shape(s)))$
    $\forall x\ (Block(x) \rightarrow \exists s\ (shapeOf(x) = s))$