

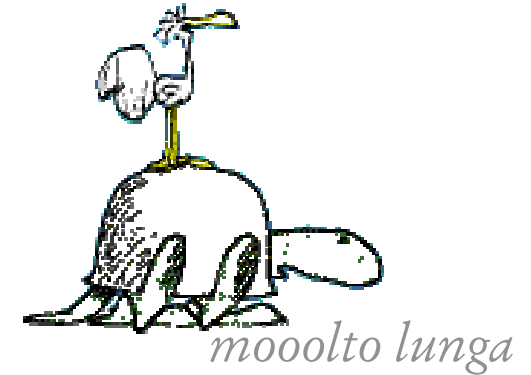
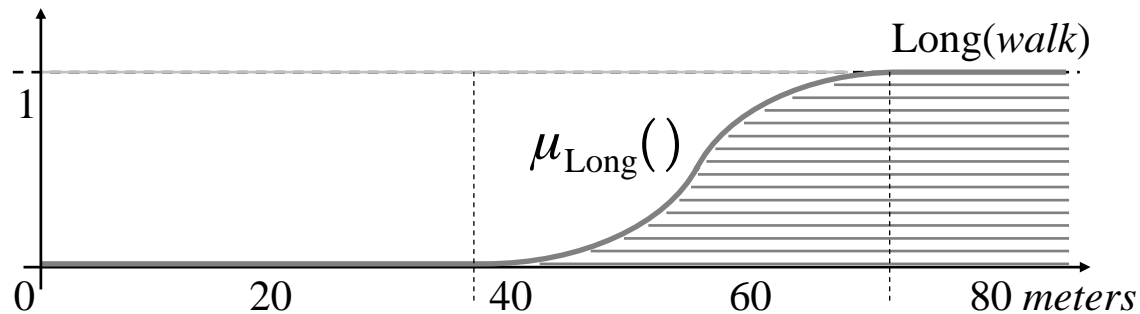
Intelligenza Artificiale

Logiche sfumate (Fuzzy Logics)

Marco Piastra

Insiemi sfumati – idea intuitiva

- “E la tartaruga fece una lunga camminata ...”
 - ma quant'è lunga, una lunga camminata ...
 - per una tartaruga?

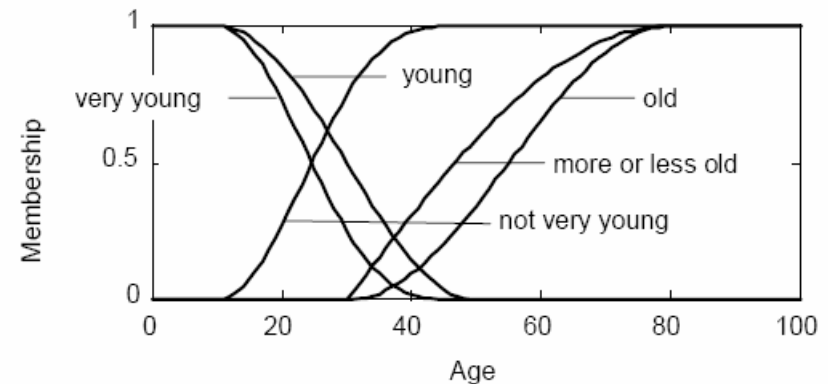


- La funzione caratteristica μ di un insieme non sfumato è del tipo:

$$\mu : U \rightarrow \{0, 1\}$$
- La funzione caratteristica μ di un insieme *sfumato* (*fuzzy set*) è del tipo:

$$\mu : U \rightarrow [0, 1] \quad (\text{tutto l'intervallo, non solo i valori estremi})$$

Concetti di base



- **Universo, insieme sfumato**

- L'**universo** di un insieme sfumato è un insieme di oggetti o intervallo di valori
 - (insieme o intervallo classico, non sfumato)
 - Esempi: età di una persona in anni, lunghezza di un cammino in metri
- Un **insieme sfumato** (fuzzy set) è definito da una funzione caratteristica a valori continui $[0,1]$ su un determinato universo

$$\langle U, \mu(U) \rangle$$

- Diversi insiemi sfumati possono essere definiti sullo stesso universo

- **Termini** (labels)

- Convenzionalmente, si denota un insieme sfumato con un **termine** (linguistico)
 - Esempi: young, old, very young

Variabili linguistiche

- Una **variabile linguistica**
 - è definita su un determinato universo U
 - assume come insiemi sfumati come valori
 - per convenzione, si dice la variabile linguistica assume come valori i **termini** che denotano gli insiemi sfumati

Example 6 (term set) *Let x be a linguistic variable with the label “Age”. Terms of this linguistic variable, which are fuzzy sets, could be “old”, “young”, “very old” from the term set*

$$T = \{Old, VeryOld, NotSoOld, MoreOrLessYoung, QuiteYoung, VeryYoung\}$$

- Insiemi sfumati come **distribuzioni di possibilità**
 - Ciascun termine (o insieme sfumato) può essere visto come la descrizione (graduata) dei **possibili** valori effettivi che la variabile linguistica può assumere
 - Non è (non intende, non potrebbe) essere una probabilità

Funzioni caratteristiche

- L'intento è qualitativo, piuttosto che quantitativo
(in pratica si scelgono le forme che semplificano i calcoli)

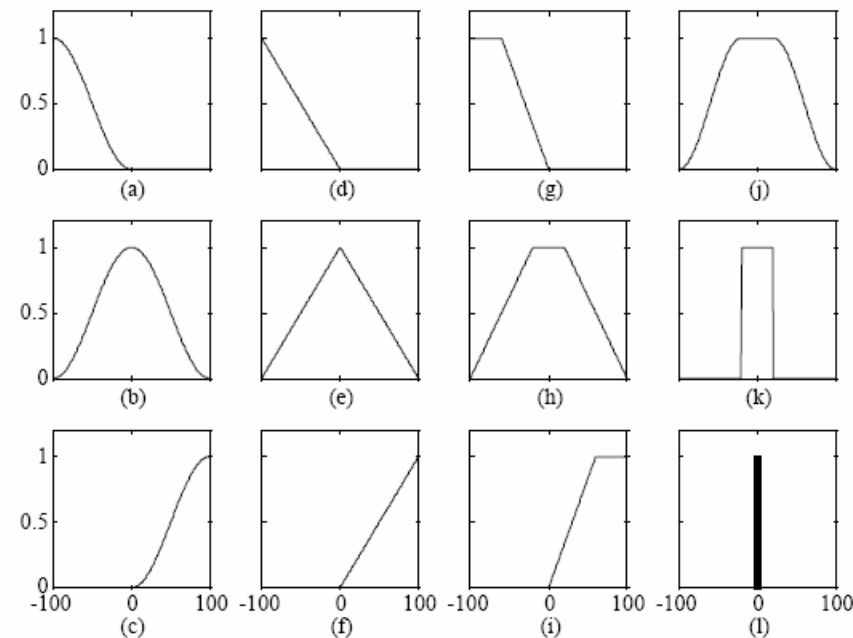


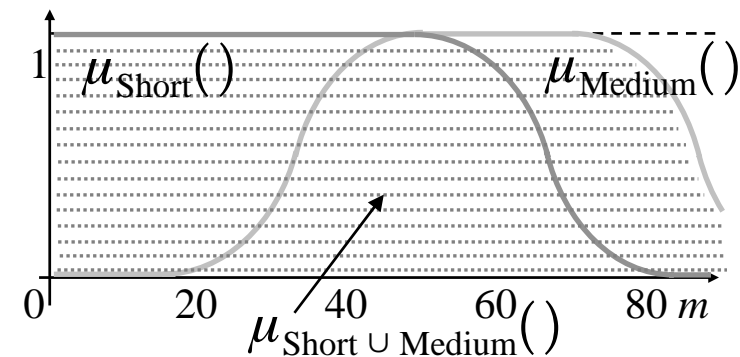
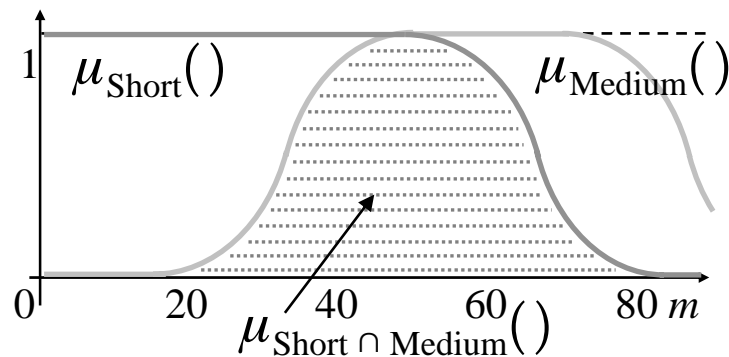
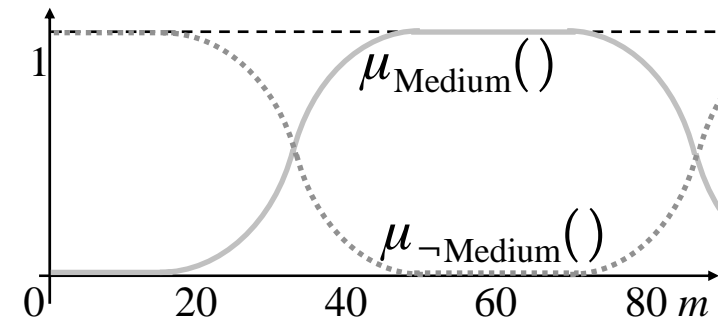
Figure 6: Examples of membership functions. Read from top to bottom, left to right: (a) z-function, (b) π -function, (c) s-function, (d-f) triangular versions, (g-i) trapezoidal versions, (j) flat π -function, (k) rectangle, (l) singleton.

Operatori insiemistici

- Complemento, intersezione, unione
 - sono definiti per analogia con gli operatori non sfumati
 - non è necessario tuttavia che gli insiemi sfumati siano definiti sullo stesso universo ...

- Alcune scelte comuni

- complemento: $\mu_{\neg A}() = 1 - \mu_A()$
- intersezione: $\mu_{A \cap B}() = \min(\mu_A(), \mu_B())$
- unione: $\mu_{A \cup B}() = \max(\mu_A(), \mu_B())$



Requisiti per gli operatori insiemistici

- La scelta degli operatori insiemistici per gli insiemi sfumati non è affatto ovvia
- Si possono identificare dei requisiti:
 - norme e co-norme triangolari

intersezione
AND

T-norm (Dubois & Prade)

boundary: $T(0,0) = 0; T(1,a) = a$

monotonicity: $a \geq c; b \geq d \Rightarrow T(a,b) \geq T(c,d)$

commutativity: $T(a,b) = T(b,a)$

associativity: $T(a,T(b,c)) = T(T(a,b),c)$

unione
OR

T-conorm (Dubois & Prade)

boundary: $S(1,1) = 1; S(0,a) = a$

monotonicity: $a \geq c; b \geq d \Rightarrow S(a,b) \geq S(c,d)$

commutativity: $S(a,b) = S(b,a)$

associativity: $S(a,S(b,c)) = S(S(a,b),c)$

Scelta degli operatori insiemistici

- Esistono infinite norme e co-norme triangolari
- Esempi:

intersezione
AND

T-norm

Minimum: $\min(a, b)$

Algebraic product: ab

Bounded product: $\max(a + b - 1, 0)$

unione
OR

T-conorm

Maximum: $\max(a, b)$

Algebraic sum: $a + b - ab$

Bounded sum: $\max(a + b, 1)$

Qual'è la scelta giusta per la passeggiata della tartaruga?

$\text{Long}(\text{walk}) \vee (\text{Medium}(\text{walk}) \wedge \text{Flat}(\text{walk}))$

Sistemi inferenziali sfumati

- La risposta (o forse la domanda) relativa alla scelta degli operatori insiemistici può essere meglio inquadrata considerando i sistemi inferenziali sfumati
 - (*fuzzy inference systems*)
- Sono sistemi a regole
 - in cui si usa una rappresentazione tramite insiemi sfumati
 - per le *premesse* e le *conseguenze*
- Molto usati nei sistemi di controllo automatico

Partizioni sfumate

- Un'aggregazione di insiemi sfumati che ricopre interamente un universo

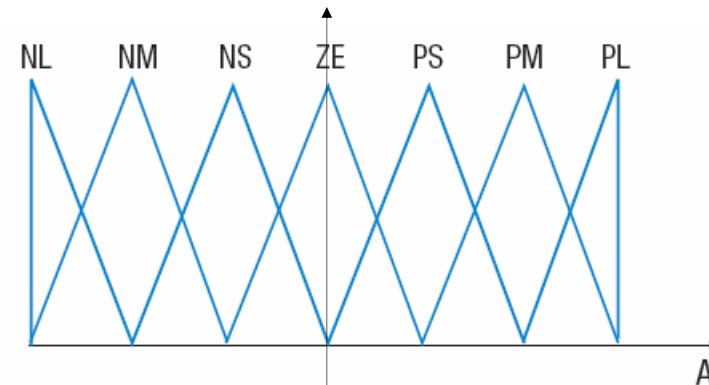
- **Partizione**

$$\langle \mathbf{U}, \{\mu_i(\mathbf{U})\} \rangle$$

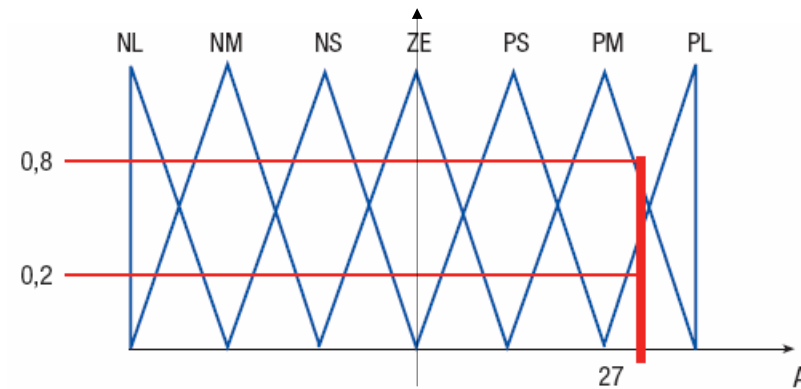
$$\forall x \in \mathbf{U}, \sum_I \mu_i(x) = 1$$

- **Sfumatura** (fuzzification)

- Qualsiasi valore $x \in \mathbf{U}$ può essere trasformato in una **combinazione** di gradi di appartenenza

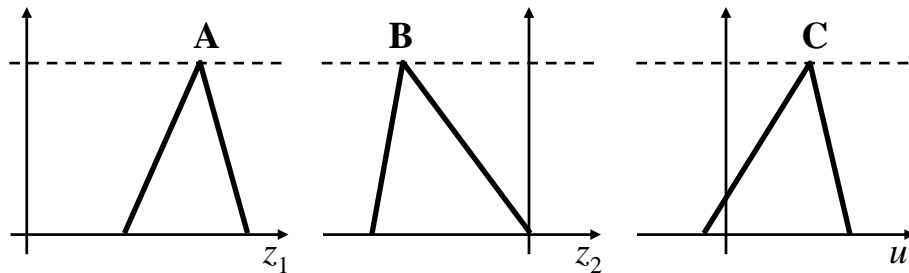


$T = \{ \text{Negative Large (NL), Negative Medium (NM), Negative Small (NS), Zero (ZE), Positive Small (PS), Positive Medium (PM), Positive Large (PL)} \}$



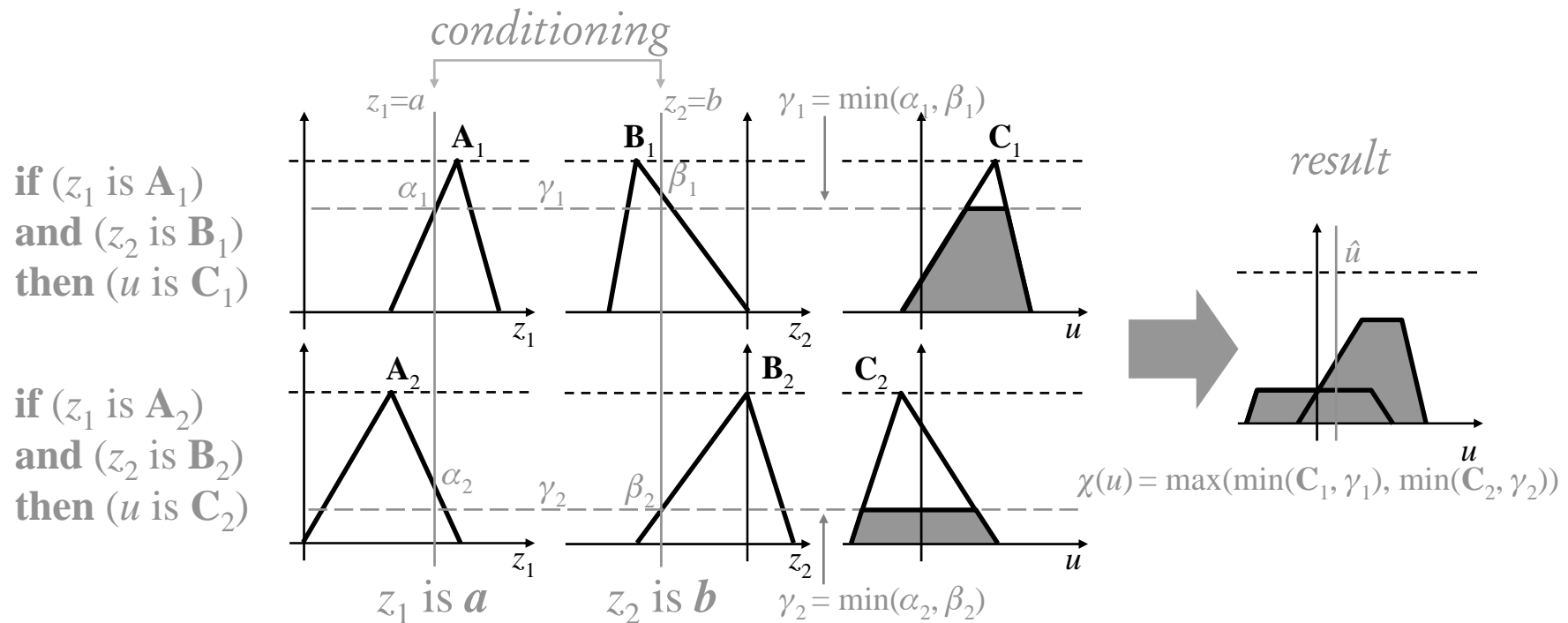
Regole fuzzy

- Struttura generale (Mamdani - esempio)
if (z_1 is **A**) **and** (z_2 is **B**) **then** (u is **C**)
 - (le parti linguistiche hanno un valore solo convenzionale)
 - z_1 , z_2 e u sono **variabili linguistiche**
 - non necessariamente sullo stesso universo
anzi, generalmente su universi *diversi*
 - **A**, **B** e **C** sono **termini**, tipicamente in una **partizione**



Sistema di Mamdani

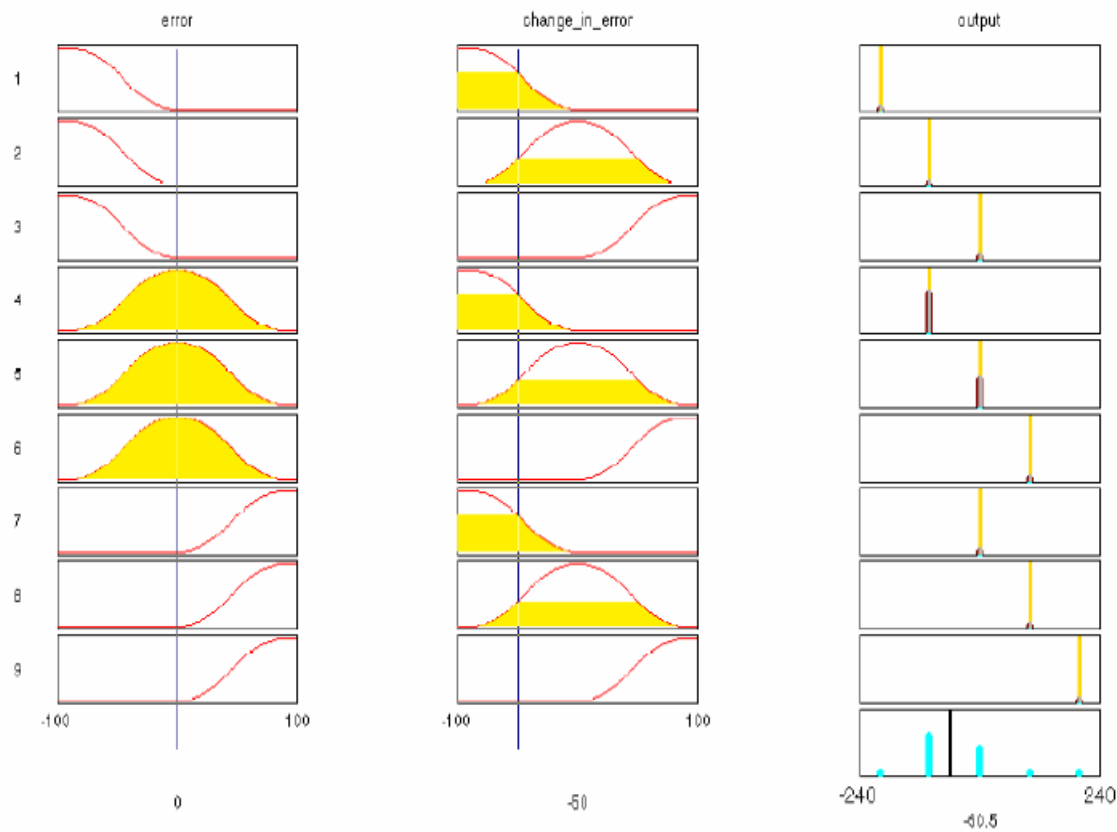
- Una base di regole sfumate



- le premesse vengono intersecate con le osservazioni
- i *degrees of fulfillment* γ vengono propagati ai conseguenti
- si calcola l'unione delle conseguenze

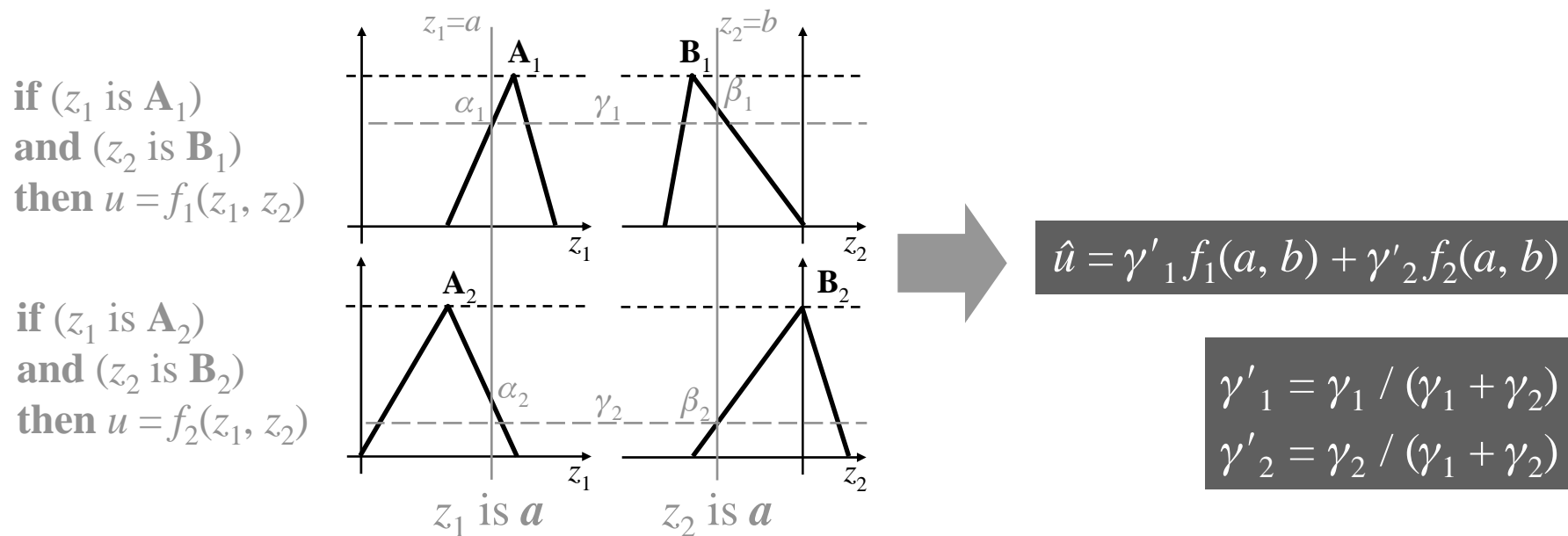
Sistema completo

- Un sistema di inferenza sfumata
 - che contiene un certo numero di regole



Sistema di Sugeno

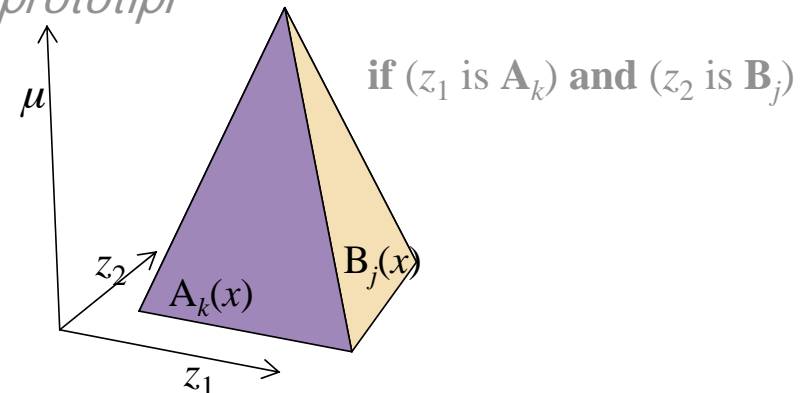
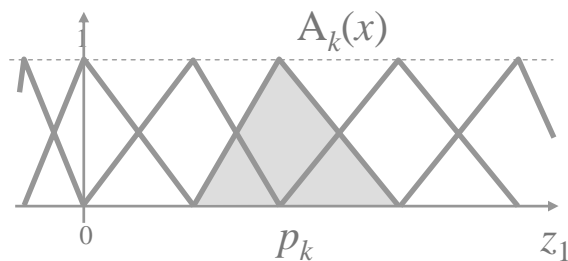
- Una base di regole sfumate



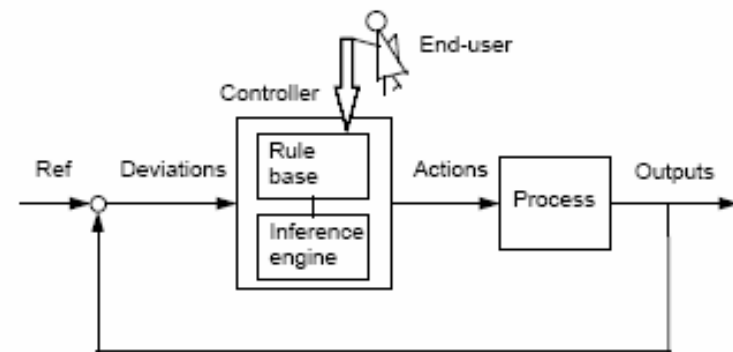
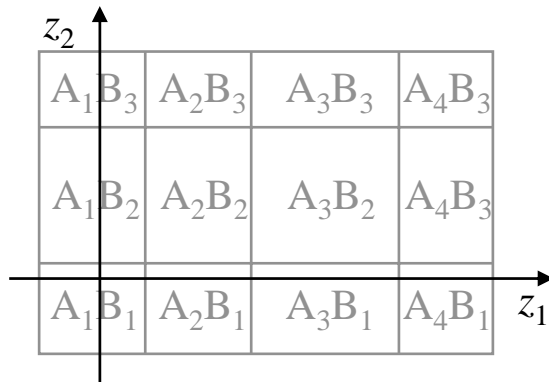
- il calcolo dei *degrees of fulfillment* γ è identico al caso di Mamdani
- ma l'unione dei γ è calcolata in modo diverso

Progetto di sistemi inferenziali sfumati

- Partizionamento del dominio delle variabili di input
 - l'ambito di interesse viene suddiviso in insiemi sfumati
 - ad esempio, usando punti noti come *prototipi*

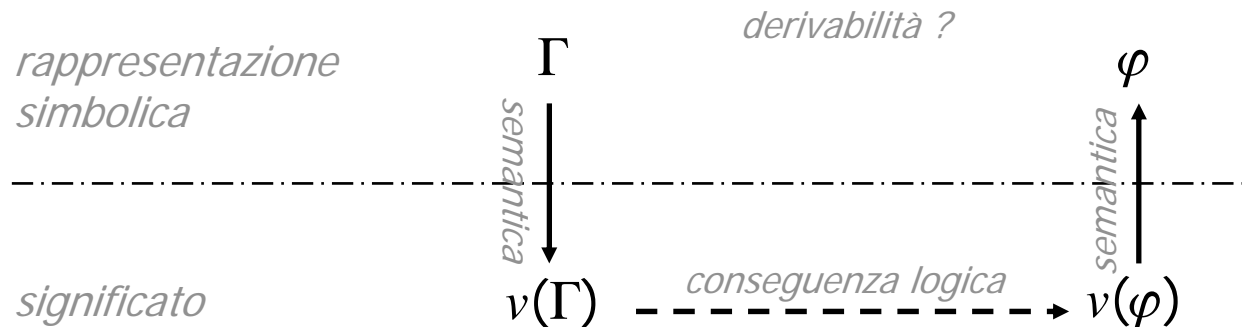


- Per ciascuna area, si definisce una regola di inferenza



Sistemi logici sfumati

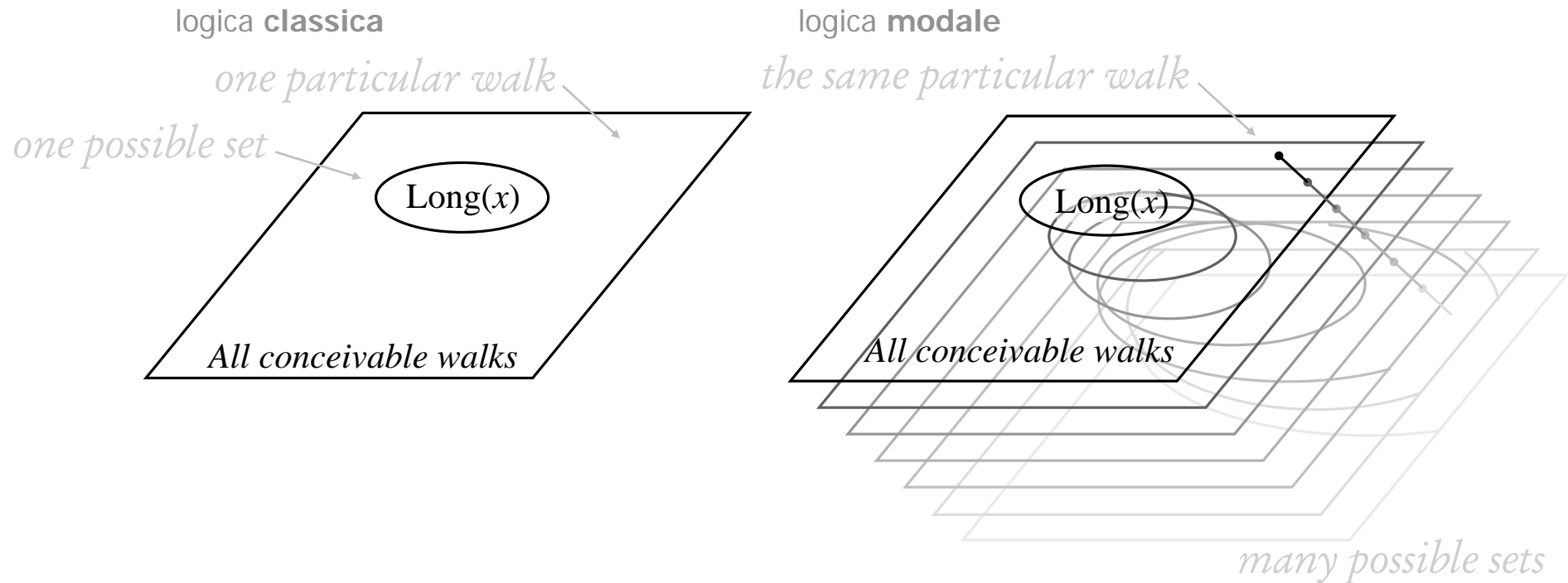
- Sono sistemi *molto diversi* dalla logica **classica**



- Infatti:
 - il linguaggio formale perde completamente rilevanza
 - tuttavia rimane il concetto di *simbolo* (long, short, medium) ...
 - il calcolo inferenziale si effettua per via semantica
 - il livello di generalità è scarsissimo
 - si tratta di fatto di sistemi 'ad hoc'
 - una logica per ogni problema
 - però i sistemi funzionano ...

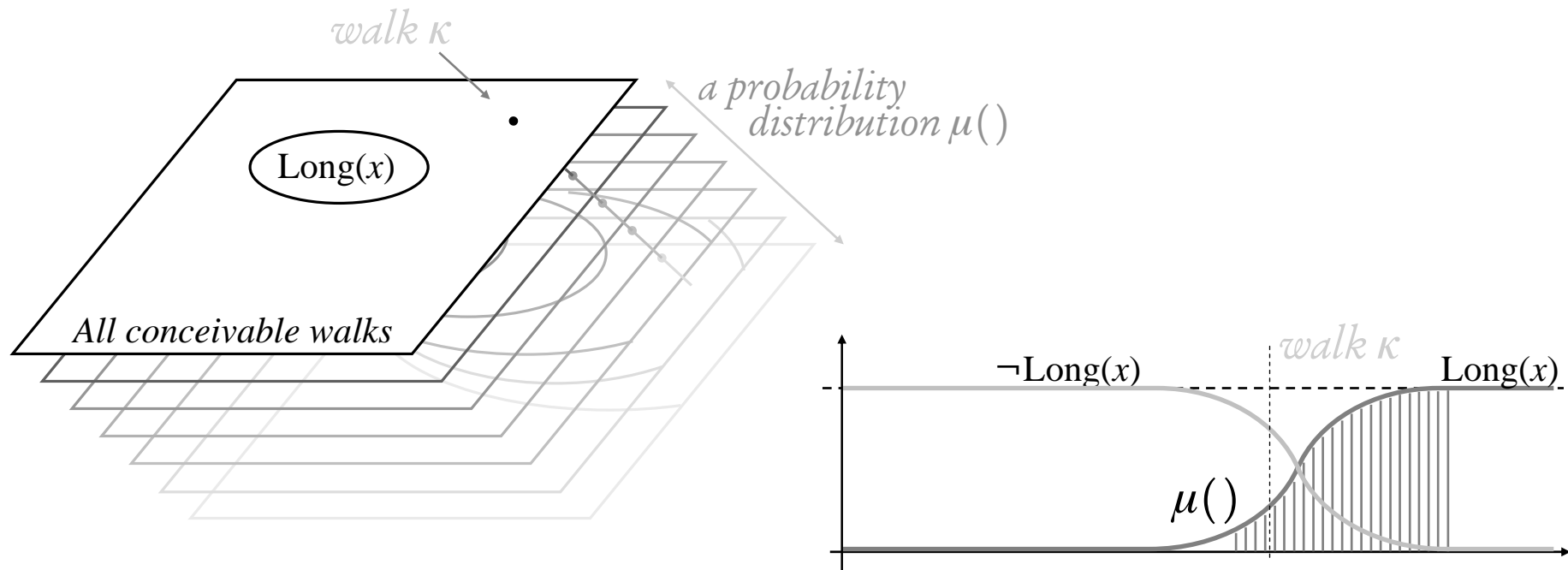
Un'ipotesi esplicativa

- La logica sfumata potrebbe essere un incontro tra:
 - logica modale
 - probabilità



Un'ipotesi esplicativa (2)

- La probabilità misura l'appropriatezza delle descrizioni
 - dal punto di vista del soggetto che ne fa uso



$$\chi_{\text{Long}}(m) = \mu(\text{Long}(x) \wedge (\text{length}(x) = m))$$

Riferimenti

- Il programma dimostrativo dei *fuzzy inference systems* si trova al sito:
http://ai.iit.nrc.ca/IR_public/fuzzy/fuzzyJToolkit.html
- Il sistema si integra anche con Jess