Intelligenza Artificiale II

Logica del Primo Ordine

Parte 1

Marco Piastra

Logica del Primo Ordine, Parte 1

1. Linguaggio e semantica
2. Conseguenza, assiomi, derivazione

1

Linguaggio e semantica

La logica proposizionale

- Un linguaggio logico, una struttura semantica
  - Linguaggio $\mathscr{L}_P$ (con le regole per le fbf)
  - Struttura semantica $<\{0, 1\}, v>$
- Interessanti proprietà:
  - è *completa*
    - tutte le *conseguenze logiche* sono anche *derivabili* e viceversa
  - è *decidibile* in modo automatico

- Il difetto principale è la limitata capacità di rappresentazione:
  - non è possibile rappresentare la struttura interna delle affermazioni
    - e quindi mettere in evidenza legami logici più sottili
  - semantica basata su una struttura molto semplice
    - nessuna possibilità di caratterizzare strutture più complesse

La logica proposizionale (2)

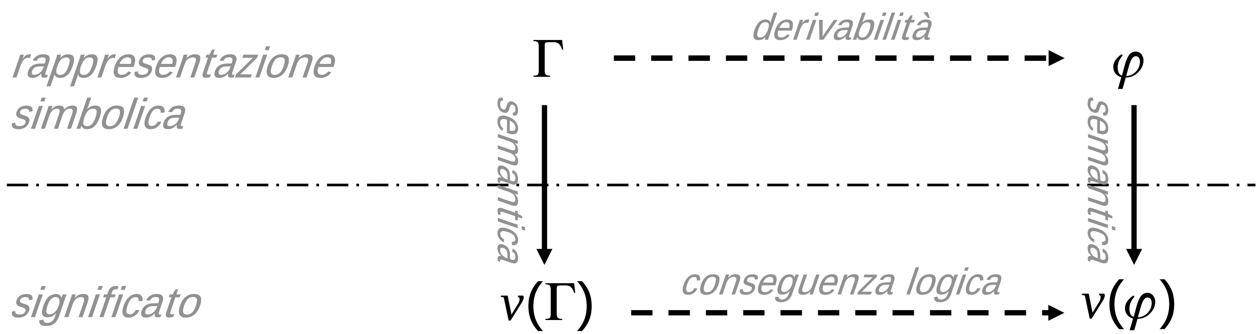
- *Esempio* :
  - "Ogni essere umano è mortale"
  - "Socrate è un essere umano"
  - "Socrate è mortale"
- Il legame logico (informale) è evidente

Schema del *modus ponens*	$a \rightarrow b$ a ――― b	(Essere umano) implica (essere mortale) *Socrate* è un essere umano *Socrate* è mortale	$a \rightarrow b$ c ――― d

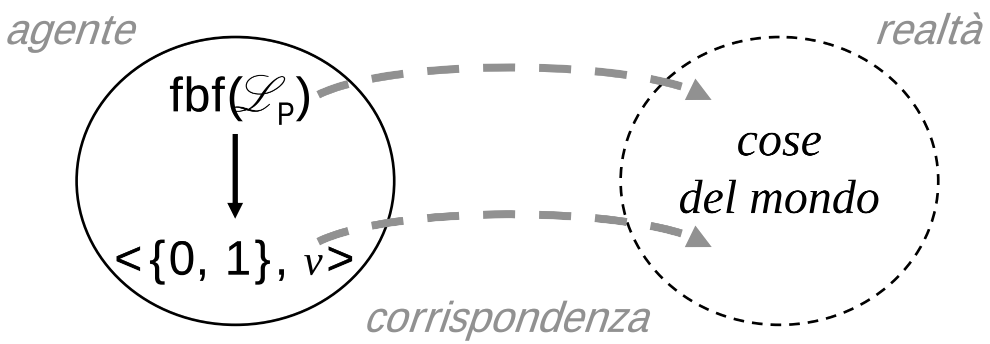
- Tuttavia, nella traduzione logico-proposizionale, 'a', 'b', 'c' e 'd' non hanno alcun legame (formale)

Linguaggio, interpretazione e realtà

- Una logica descrive la relazione tra formule (o insiemi di formule)



- La corrispondenza con la realtà è su entrambi i piani



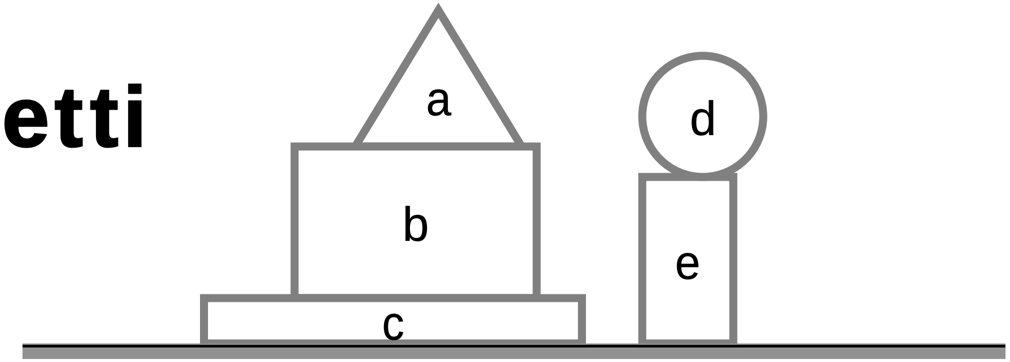
Si pensi ad un robot:
la *corrispondenza*
è definita dai sensori ...

Superare la logica proposizionale

- La semantica di una logica come ‘specchio della realtà’
  - la ricchezza delle strutture semantiche è indicativa delle capacità rappresentative di una logica
    - Maggiore capacità rappresentativa $\Rightarrow$ esplicitazione di ulteriori relazioni logiche
  - con strutture del tipo $<\{0, 1\}, v>$ non si va molto lontano …
- Estensione semantica
  - per superare la logica proposizionale, adotteremo strutture più complesse
  - classe di riferimento: la teoria degli insiemi

- Non dimentichiamo le qualità della logica proposizionale
  - l’impianto *formale* del sistema logico-simbolico
  - correttezza
  - completezza
  - decidibilità

Semantica ad oggetti



- (oggetti sul tavolo)

- **Universo del discorso** **U** (insieme di oggetti)

  {a, b, c, d, e}

- **Relazioni**: es. “x sta sopra y”

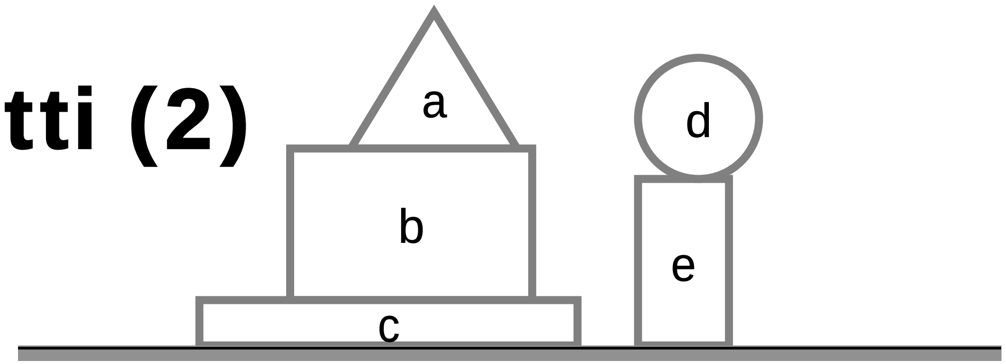
  {<a,b>, <b,c>, <d,e>}

- **Funzioni**: es. “y = oggetto più vicino a x’
  (a parità, vale l’ordine alfabetico)

  {<b,a>, <a,b>, <b,c>, <e,d>, <d,e>}

- Notare la descrizione *estensionale*
  - Le relazioni binarie sono descritte da *sottoinsiemi* (qualsiasi) di $\mathbf{U}^2$
  - Le funzioni unarie sono descritte da *sottoinsiemi* particolari di $\mathbf{U}^2$
    - Una coppia per ciascun elemento di **U**, ogni elemento occorre una sola volta
    - Il solito concetto di “funzione ad un sol valore” …

Semantica ad oggetti (2)



- (altri esempi)

- **Relazioni** a tre: es. “z sta tra x e y” (si intende a contatto)
  {<b,a,c>}
- **Funzioni** a due argomenti: es. “z = oggetto più vicino a x e y’
  (si intende la distanza totale)
  – {<b,a,a>, <d,a,b>, <b,a,c>, <b,a,d>, <b,a,e>, <b,b,a>, <d,b,b>, <b,b,c>, <a,b,d>, <c,b,e>, <b,c,a>, <e,c,b>, <b,c,c>, <b,c,d>, <b,c,e>, <b,d,a>, <a,d,b>, <b,d,c>, <e,d,d>, <b,d,e>, <b,e,a>, <d,e,b>, <b,e,c>, <b,e,d>, <d,e,e>}

- Generalizzazione:
  – Le relazioni a n sono descritte da *sottoinsiemi* (qualsiasi) di $\mathbf{U}^n$
  – Le funzioni n - 1 argomenti sono descritte da *sottoinsiemi* particolari di $\mathbf{U}^n$
    - I vincoli di “funzione ad un sol valore”

Linguaggio

- Un **linguaggio predicativo** $\mathscr{L}_{PO}$ comprende:
  - un insieme di **simboli predicativi**, aventi un numero prestabilito di argomenti
    - esempio: P(x), G(x, y), Q(x, y, z), etc.
    - unica eccezione (per comodità) '='
      (e.g. x = y ; ma si tratta di un *predicato*)
  - un insieme di **simboli funzionali**, aventi un numero prestabilito di *argomenti*
    - esempio: f(x), g(x, y), h(x, y, z), ...
  - un insieme di **variabili**
    - esempio: x, y, z, ...
  - un insieme di **costanti individuali**
    - esempio: a, b, c, ...
  - i **connettivi** primari $\neg$, $\rightarrow$ e derivati $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$
  - il **quantificatore universale** $\forall$ ed il **quantificatore esistenziale** $\exists$
  - le due parentesi (e)

Termini e formule atomiche

- **Termini**
  - ogni *variabile* o *costante individuale* è un **termine**
  - se f è un *simbolo funzionale* a *n* argomenti e t_1, …, t_n sono *termini*, allora f(t_1, …, t_n) è un **termine**
    - esempi: *x*, a, f(y), g(b, c), g(f(x), c)
- **Formula atomica**
  - se P è un *simbolo predicativo* a *n* argomenti e t_1, …, t_n sono termini, allora P(t_1, …, t_n) è una **formula atomica**
    - esempi: P(x), Q(y, a), R(b, c, x), P(f(x)), Q(g(y, a), a)

Regole di buona formazione

- **Formule ben formate (fbf)**
  - regole sintattiche:
    - l'insieme di tutte le fbf di $\mathscr{L}_{PO}$ si indica con fbf($\mathscr{L}_{PO}$)
    - ogni *formula atomica* è una fbf
    - $\varphi \in \text{fbf}(\mathscr{L}_{PO}) \;\Rightarrow\; (\neg\varphi) \in \text{fbf}(\mathscr{L}_{PO})$
    - $\varphi, \psi \in \text{fbf}(\mathscr{L}_{PO}) \;\Rightarrow\; (\varphi \to \psi) \in \text{fbf}(\mathscr{L}_{PO})$
    - $\varphi \in \text{fbf}(\mathscr{L}_{PO}) \;\Rightarrow\; (\forall x\, \varphi) \in \text{fbf}(\mathscr{L}_{PO})$ (questa è nuova)
    - $\varphi \in \text{fbf}(\mathscr{L}_{PO}) \;\Rightarrow\; (\exists x\, \varphi) \in \text{fbf}(\mathscr{L}_{PO})$ (questa è nuova)

    - $\varphi, \psi \in \text{fbf}(\mathscr{L}_{P}),\quad (\varphi \lor \psi) \;\Leftrightarrow\; ((\neg\varphi) \to \psi)$
    - $\varphi, \psi \in \text{fbf}(\mathscr{L}_{P}),\quad (\varphi \land \psi) \;\Leftrightarrow\; (\neg(\varphi \to (\neg\psi)))$
    - $\varphi, \psi \in \text{fbf}(\mathscr{L}_{P}),\quad (\varphi \leftrightarrow \psi) \;\Leftrightarrow\; ((\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi))$

Formule aperte, enunciati

- Variabili **libere** e **vincolate**
  - una variabile (in una fbf) è **vincolata** se si trova nel raggio di azione di un **quantificatore** per quella variabile
  - una variabile è **libera** se non è *vincolata*
    - esempi di variabile vincolata:
      $\forall x\ P(x)$
      $\exists x\ (P(x) \rightarrow (A(x) \wedge B(x))$
    - esempi di variabile libera:
      $P(\mathbf{x})$
      $\exists y\ (P(y) \rightarrow (A(\mathbf{x}, y) \wedge B(y)))$

In un linguaggio del primo ordine i quantificatori si applicano solo alle variabili

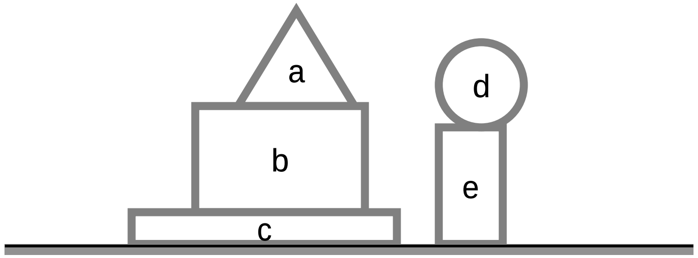
- **Formule aperte** e **chiuse**
  - si dice **aperta** una fbf in cui occorre almeno una variabile libera
  - si dice **chiusa** o anche **enunciato** in caso contrario
  - solo le fbf *chiuse*, cioè gli *enunciati*, hanno un valore di verità
    (in quanto rappresentano delle *affermazioni* ...)

Strutture e interpretazioni

- Una struttura <**U**, v > per un linguaggio $\mathscr{L}_{PO}$ contiene:
  - un **insieme di oggetti** **U** (l'universo del discorso)
  - un'**interpretazione** v, cioè una *funzione* che associa
    - ad ogni *simbolo predicativo* a *n* argomenti una **relazione** *n*-aria in $\mathbf{U}^n$
    - ad ogni *simbolo funzionale* a *n* argomenti una **funzione** *n*-aria in $\mathbf{U}^n$
    - ad ogni *costante individuale* un **elemento** di **U**

Ai *simboli predicativi* unari sono associati *sottoinsiemi* di **U**

- Esempi (nel mondo degli oggetti)
  - Sopra predicato binario, es. Sopra(x,y)
    - v(Sopra) = {<a,b>, <b,c>, <d,e>}
  - vicinoDi funzione unaria, es. vicinoDi(x)
    - v(vicinoDi) = {<b,a>, <a,b>, <b,c>, <d,e>, <e,d>}
  - a, b, c, d, e costanti individuali
    - v(a) = a, v(b) = b, v(c) = c, v(d) = d, v(e) = e



Non confondere costanti ed oggetti (anche se i simboli coincidono)

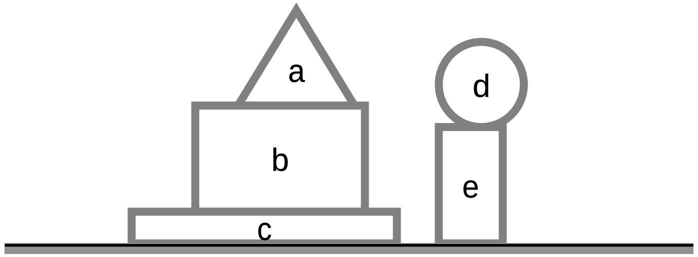
Assegnazioni

- (ed il significato delle variabili?)

- Per le *variabili*
  - data una struttura $<\mathbf{U}, v>$, un'**assegnazione** s è una funzione che associa ad ogni *variabile* un elemento di $\mathbf{U}$
  - in altre parole, data $<\mathbf{U}, v>$, un'assegnazione s *trasforma le variabili in costanti individuali* *Aaaargh!*

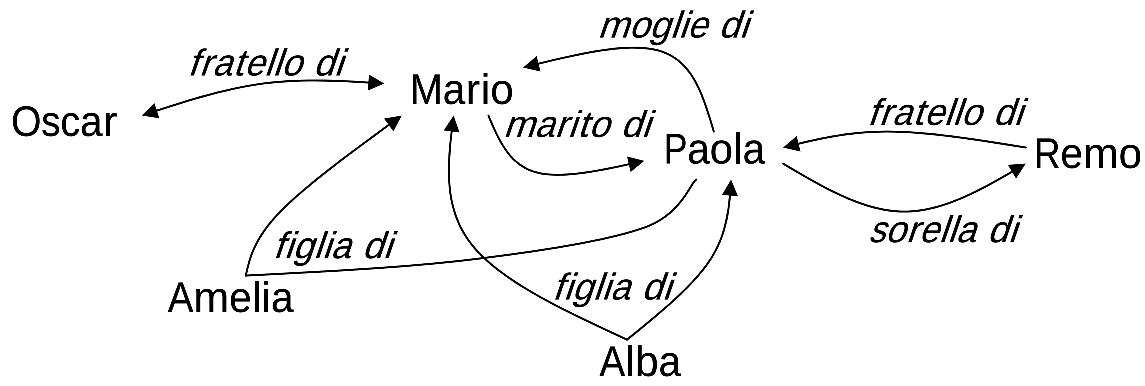
- *La distinzione tra interpretazione ed assegnazione è un tecnicismo tipico della logica del primo ordine*
  - *serve per definire la semantica delle formule, aperte e chiuse*

Esempio 1



- Linguaggio
  - simboli predicativi: Parallelepipedo(.), Piramide(.), Sfera(.), Sopra(..)
  - simboli funzionali: vicinoDi()
  - variabili: x, y, z, ...
  - costanti individuali: a, b, c, d, e
- Interpretazione
  - universo del discorso **U**: {$\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$, $\underline{e}$}
  - interpretazione v:
    - costanti individuali: v(a) = $\underline{a}$, v(b) = $\underline{b}$, v(c) = $\underline{c}$, v(d) = $\underline{d}$, v(e) = $\underline{e}$
    - simboli predicativi:
      v(Parallelepipedo) = {$\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{e}$}, v(Piramide) = {$\underline{a}$}, v(Sfera) = {$\underline{a}$},
      v(Sopra) = {<a,b>, <b,c>, <d,e>}
    - funzioni: v(vicinoDi) = {<b,a>, <a,b>, <b,c>, <d,e>, <e,d>}
- Assegnazione
  - esempio: s ={[x/$\underline{a}$], [y/$\underline{b}$], [z/$\underline{a}$] ...} (per *tutte* le variabili)

Esempio 2



- Linguaggio
  - simboli predicativi: Uomo(.), Donna(.), Fratello(..), Sorella(..)
  - simboli funzionali: madre(.), padre(.)
  - variabili: x, y, z, …
  - costanti individuali: Mario, Paola, Remo, Oscar, Amelia, Alba
- Semantica
  - universo del discorso **U**: {Mario, Paola, Remo, Oscar, Amelia, Alba}
  - interpretazione *v*:
    - costanti individuali: v(Mario) = Mario, v(Paola) = Paola, etc.
    - simboli predicativi:
      v(Uomo(.)) = {Mario, Remo, Oscar}
      v(Donna(.)) = {Paola, Amelia, Alba}
      v(Fratello(..)) = {<Oscar, Mario>, <Mario, Oscar>, <Remo, Paola>}
      v(Sorella(..)) = {<Paola, Remo>, <Alba, Amelia>, <Amelia, Alba>}
    - simboli funzionali:
      v(madre(.)) = {<Paola, Alba>, <Paola, Amelia>}
      v(padre(.)) = {<Mario, Alba>, <Mario, Amelia>}

Soddisfacimento (forma intuitiva)

- Una fbf φ è soddisfatta da (vera in) una terna $<\mathbf{U}, v>, s$ sse φ afferma una cosa vera in $<\mathbf{U}, v>, s$

- Esempi (mondo degli oggetti, Esempio 1)

  Piramide(a)
  - è vera perchè: v(a) = a $\in$ v(Piramide) = {a}

  Parallelepipedo(d)
  - non è vera perchè: v(d) = d $\notin$ v(Parallelepipedo) = {b, c, e}

  Parallelepipedo(b) $\wedge$ $\neg$Parallelepipedo(vicinoDi(b))
  - è vera perchè: v(b) = b $\in$ v(Parallelepipedo) = {b, c, e}
    e anche v(vicinoDi(b)) = a $\notin$ v(Parallelepipedo) = {b, c, e}

  $\neg\exists$x (Parallelepipedo(x) $\wedge$ Sfera(x))
  - è vera perchè ...

Soddisfacimento

- Formule atomiche
  - data una struttura $<\mathbf{U}, v>$, un'assegnazione s ed una formula atomica φ
  - si ha che $<\mathbf{U}, v> \models \varphi\ [s]$ sse
    - se φ ha la forma $t_1 = t_2$ allora $v(t_1)\ [s] \equiv v(t_2)\ [s]$ (se si usa l'identità)
    - se φ ha la forma $P(t_1, \ldots, t_n)$ allora $<v(t_1)\ [s], \ldots, v(t_n)\ [s]> \in v(P)\ [s]$
- Fbf qualsiasi
  - si ha che $<\mathbf{U}, v> \models \varphi\ [s]$ sse
    - se φ è una formula atomica, vedi sopra

Come per LP

- se $\neg\varphi$ allora $<\mathbf{U}, i> \not\models \varphi\ [s]$
- se $\varphi \wedge \psi$ allora $<\mathbf{U}, i> \models \varphi\ [s]$ e $<\mathbf{U}, i> \models \psi\ [s]$
- se $\varphi \vee \psi$ allora $<\mathbf{U}, i> \models \varphi\ [s]$ o $<\mathbf{U}, i> \models \psi\ [s]$
- se $\varphi \to \psi$ allora non $<\mathbf{U}, i> \models \varphi\ [s]$ e $<\mathbf{U}, i> \not\models \psi\ [s]$

Esempio 3

- (in riferimento alla interpretazione dell'Esempio 2)
- Soddisfacimento

  $< \mathbf{U}, v > \models$ Uomo(Mario)

  - in quanto <u>Mario</u> $\in v$(Uomo)

  $< \mathbf{U}, v > \models$ Uomo(padre(Alba))

  - in quanto <<u>Mario</u>, <u>Alba</u>> $\in v$(padre) e <u>Mario</u> $\in v$(Uomo)

  $< \mathbf{U}, v > \models \neg$Uomo(Paola)

  - in quanto <u>Paola</u> $\notin v$(Uomo(.))

  $< \mathbf{U}, v > \models$ Uomo(Mario) $\wedge$ Fratello(Remo, Paola)

  - in quanto <u>Remo</u> $\in v$(Uomo(.)) e <<u>Remo</u>, <u>Paola</u>> $\in v$(Genitore)
- Soddisfacimento ed assegnazione
  - $< \mathbf{U}, v > \models$ Donna(x)[x/<u>Paola</u>, …]
  - $< \mathbf{U}, v > \not\models$ Donna(x)[x/<u>Mario</u>, …]
  - Intuitivamente, le formule chiuse non dipendono dalle assegnazioni

Soddisfacimento e quantificatori

- Assegnazioni
  - date due assegnazioni s_1 e s_2
    - se $\forall v \in \mathrm{Var}(\mathscr{L}_{PO})$, $s_1(v) \equiv s_2(v)$ allora $s_1 = s_2$
    - si scrive $[s_1, x/d] = s_2$, $(d \in \mathbf{U})$
      quando $\forall v \in \mathrm{Var}(\mathscr{L}_{PO})$, $v \neq x$, $s_1(v) \equiv s_2(v)$ e $s_2(x) = d$

Questa è
la novità
rispetto ad LP

- Fbf con quantificatori
  - si ha che $<\mathbf{U}, v> \models \forall x\, \varphi\ [s]$ sse
    - se per ogni $d \in \mathbf{U}$ si ha $<\mathbf{U}, v> \models \varphi\ [s, x/d]$
  - per definizione $\exists x\, \varphi \equiv \neg\forall x\, \neg\varphi$
  - quindi: $<\mathbf{U}, v> \models \exists x\, \varphi\ [s]$
    - se esiste un $d \in \mathbf{U}$ per cui si ha $<\mathbf{U}, v> \models \varphi\ [s, x/d]$

Esempio 4

- (in riferimento alla interpretazione dell'Esempio 2)
- Soddisfacimento

  $<\mathbf{U}, v> \models \forall x\ (Uomo(x) \lor Donna(x))$
  - in quanto per ogni $d \in \mathbf{U}$ si ha che $<\mathbf{U}, v> \models (Uomo(x) \lor Donna(x))\ [x/d]$
  - cioè $d \in v(Uomo)$ oppure $d \in v(Donna)$

  $<\mathbf{U}, v> \not\models \forall x\ (Uomo(x))$
  - in quanto non per ogni $d \in \mathbf{U}$ si ha che $<\mathbf{U}, v> \models (Uomo(x))\ [x/d]$
  - infatti Paola

  $<\mathbf{U}, v> \models \forall x\ \forall y\ (Fratello(x, y) \rightarrow Uomo(x))$
  - in quanto in ogni tupla $<d_1, d_2> \in v(Fratello)$, si ha che $d_1 \in v(Uomo)$

  $<\mathbf{U}, v> \models \forall x\ \forall y\ (Fratello(x, y) \rightarrow Fratello(y, x))$
  - in quanto per ogni tupla $<d_1, d_2> \in v(Fratello)$,
    si ha che $<d_2, d_1> \in v(Fratello)$

Modelli

- Verità e modelli
  - un **enunciato** φ è *vero* in una struttura $<\mathbf{U}, v>$ sse
    - esiste un'assegnazione s tale per cui $<\mathbf{U}, v> \models \varphi[s]$
    - per un enunciato, l'esistenza di una s equivale a "per ogni s"
  - una struttura $<\mathbf{U}, v>$ tale da rendere *vero* un enunciato φ è detta **modello** di φ
    - si scrive allora $<\mathbf{U}, v> \models \varphi$
  - una struttura $<\mathbf{U}, v>$ è detta **modello** di un *insieme di enunciati* Γ sse rende *veri* tutti gli enunciati in Γ
    - si scrive allora $<\mathbf{U}, v> \models \Gamma$

Validità

- Validità
  - un enunciato φ è **valido** se è *vero* in qualunque struttura $<\mathbf{U}, v>$
    - si scrive allora $\models \varphi$
    - Esempi:

      $\forall x\, (P(x) \lor \neg P(x))$ (generalizzazione di tautologia)

      $\forall x\, \forall y\, (G(x, y) \rightarrow (H(x, y) \rightarrow G(x, y)))$ (generalizzazione di assioma – vedi oltre)

- Inconsistenza
  - un enunciato φ è **inconsistente** se non ha un *modello*
    - Esempi:

      $\forall x\, (P(x) \land \neg P(x))$ (generalizzazione di contraddizione)

2

Conseguenza, assiomi, derivazione

Conseguenza logica

- Quasi identica al caso proposizionale
- Definizione
  - $\Gamma \models \varphi$ (φ è **conseguenza logica** di Γ)
  - sse per qualsiasi struttura $<\mathbf{U}, v>$ tale che $<\mathbf{U}, v> \models \Gamma$ si ha $<\mathbf{U}, v> \models \varphi$
  - sse ogni **modello** di Γ è anche **modello** di φ

Sostituibilità, generalizzazione

- (due utili *metateoremi*)
- **Sostituibilità**
  - di una variabile x con un generico termine t in una formula φ
  - intuitivamente: sempre possibile se non modificano ‘libertà’ e ‘vincoli’
  - una variabile libera è sempre sostituibile da un termine che contiene solo variabili libere (o nessuna variabile)
  - altrimenti: x è sostituibile con t in $\forall y\ \varphi$
    - se x non è libera in φ e t non introduce variabili libere
    - oppure se y non occorre in t e t è sostituibile in φ
      - Esempi positivi: $\forall x\ P(x)\ [x/f(x)]$, $G(a, y)\ [y/f(z)]$
      - Esempi negativi: $\forall y\ G(x, y)\ [x/f(y)]$
  - Preservazione dei modelli: $<\mathbf{U}, v> \models \psi \Rightarrow <\mathbf{U}, v> \models \psi\ [x/t]$ (se sostituibile)
- **Generalizzazione**
  - Aggiunta di quantificatori a una fbf φ : $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ \varphi$
  - Si preservano i modelli solo se $x_1 \ldots x_n$ non occorrono libere in φ

Sistema di assiomi

- Sei *schemi di assioma* per LPO:

Gli stessi di LP

Ax1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

Ax2 $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

Ax3 $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

Ax4 $\forall x\, \varphi \to \varphi[x/t]$
se il termine t è sostituibile per x in φ

Ax5 $\forall x\, (\varphi \to \psi) \to (\forall x\, \varphi \to \forall x\, \psi)$

Ax6 $\varphi \to \forall x\, \varphi$
se x non occorre libera in φ

  - ogni sostituzione di φ, ψ e χ con una fbf (chiusa) è un assioma
  - ogni generalizzazione (chiusa) è un assioma

- Altri due *schemi di assioma* se si usa l'identità:

Ax7 $t = t$

Ax8 $(t = u) \to (\varphi[x/t] \leftrightarrow \varphi[x/u])$

Derivabilità, dimostrazione

- Definizione identica al caso proposizionale
- **Derivabilità**

  $\Gamma \vdash \chi$ sse esiste una **dimostrazione** di χ a partire da Γ
- **Regola di inferenza**
  - una sola regola di inferenza, il *modus ponens*

    $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \vdash \psi$
- **Dimostrazione**
  - è una successione *finita* di passi $<\alpha_1, ..., \alpha_n>$
  - per ogni passo α_i si hanno tre alternative:

    1) $\alpha_i \in$ istanza di $\mathrm{Ax}n$

    2) $\alpha_i \in \Gamma$

    3) α_i è ottenibile dai passi precedenti, tramite *modus ponens* $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \vdash \psi$
  - $\alpha_n = \chi$

Esempio 5

- Derivazione: “Socrate è mortale”:

  $\{\forall x\ (Umano(x) \rightarrow Mortale(x)), Umano(Socrate)\} \vdash Mortale(Socrate)$

  1: $\forall x\ (Umano(x) \rightarrow Mortale(x))$ (premessa)
  2: $\forall x\ (Umano(x) \rightarrow Mortale(x)) \rightarrow (Umano(Socrate) \rightarrow Mortale(Socrate))$
  (Ax4 con [x/Socrate])
  3: $Umano(Socrate) \rightarrow Mortale(Socrate)$ (mp 1, 2)
  4: $Umano(Socrate)$ (premessa)
  5: $Mortale(Socrate)$ (mp 3, 4)

Esempio 6

- Derivazione: “Alba è sorella di Amelia”

Regole:
$\forall x\, \forall y\, ((\text{Donna}(x) \wedge \exists z\, (\text{Genitore}(z, x) \wedge \text{Genitore}(z, y))) \rightarrow \text{Sorella}(x, y))$

Fatti:
Donna(Alba), Donna(Amelia), Genitore(Mario, Alba), Genitore(Mario, Amelia)

1: $\forall y\, ((\text{Donna}(\text{Alba}) \wedge \exists z\, (\text{Genitore}(z,\text{Alba}) \wedge \text{Genitore}(z,y))) \rightarrow \text{Sorella}(\text{Alba},y))$ (Ax4 con [x/Alba])

2: $(\text{Donna}(\text{Alba}) \wedge \exists z\, (\text{Genitore}(z, \text{Alba}) \wedge \text{Genitore}(z, \text{Amelia}))) \rightarrow \text{Sorella}(\text{Alba}, \text{Amelia})$ (Ax4 con [y/Amelia])

3: $(\text{Genitore}(\text{Mario}, \text{Alba}) \wedge \text{Genitore}(\text{Mario}, \text{Amelia})) \rightarrow \exists z\, (\text{Genitore}(z, \text{Alba}) \wedge \text{Genitore}(z, \text{Amelia}))$ (teorema)

4: $\text{Genitore}(\text{Mario}, \text{Alba}) \wedge \text{Genitore}(\text{Mario}, \text{Amelia})$ (premesse)

5: $\exists z\, (\text{Genitore}(z, \text{Alba}) \wedge \text{Genitore}(z, \text{Amelia}))$ (mp 3, 4)

6: Donna(Alba) (premesse)

7: $(\text{Donna}(\text{Alba}) \wedge \exists z\, (\text{Genitore}(z, \text{Alba}) \wedge \text{Genitore}(z, \text{Amelia})))$ (5 + 6)

8: Sorella(Alba, Amelia) (mp 2, 7)

Teorie, assiomatizzazioni

- Definizione identica al caso proposizionale

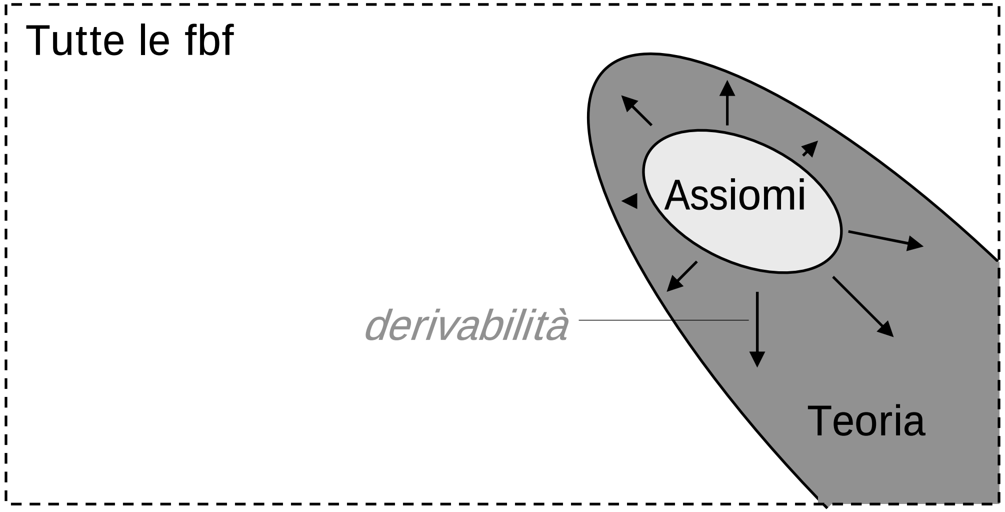
- Un qualsiasi insieme di fbf Σ può essere detto una **teoria**
- Dato un insieme di fbf Γ, l'insieme dei **teoremi** di Γ è l'insieme di tutte le fbf *derivabili* a partire da Γ

  $\textit{teoremi}(\Gamma) = \{\varphi : \Gamma \vdash \varphi\}$
- Un Γ è una **assiomatizzazione** di Σ sse

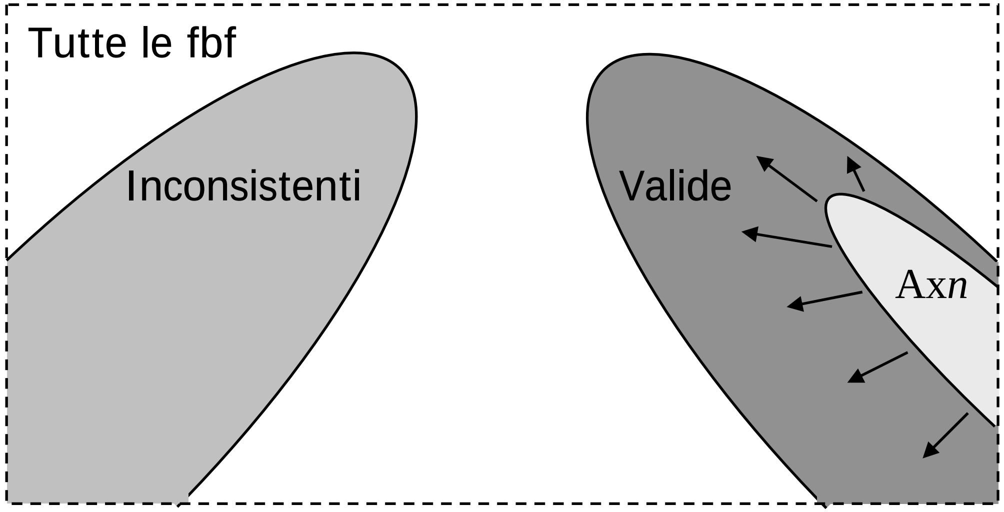
  $\Sigma \equiv \textit{teoremi}(\Gamma)$

Enunciati e teorie

- Una **teoria** può essere definita tramite **assiomi**
  - In questo caso, la teoria coincide con i **teoremi** (fbf derivabili dagli assiomi)



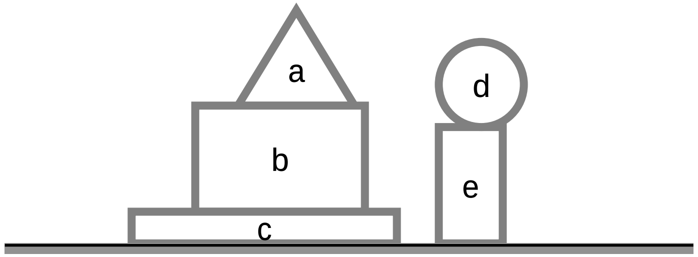
- Nel caso di $\mathrm{A}xn$ per LP
  - L'insieme di assiomi è infinito (esistono assiomatizzazioni finite)
  - La teoria è l'insieme delle tautologie (o fbf **valide**)



Costruzione e uso di teorie in LPO

- Il sistema di assiomi Ax descrive la *teoria* delle fbf *valide*
  - le fbf *valide* si applicano a qualsiasi ragionamento (sono 'leggi logiche' o, meglio, leggi di LPO)
- Costruzione assiomatica di *teorie* particolari
  - si definisce un insieme Γ di fbf (assiomi o fatti noti) che descrive le proprietà degli oggetti di cui si parla
- La derivazione di *teoremi* serve a 'scoprire', cioè a rendere espliciti, gli elementi di una teoria
  - in particolare quelli non direttamente descritti in Γ
- Due problemi per il calcolo
  - escludendo la possibilità di derivare 'a pioggia' tutti i teoremi
  - in che modo ipotizzare i *teoremi*
  - come dimostrare che lo sono (o che non lo sono)

Esempio 7



- **Definizioni**

  $\forall x\ \forall y\ (Sopra(x, y) \leftrightarrow (Sovrasta(x, y) \land \neg\exists z\ (Sovrasta(x, z) \land Sovrasta(z, y))))$

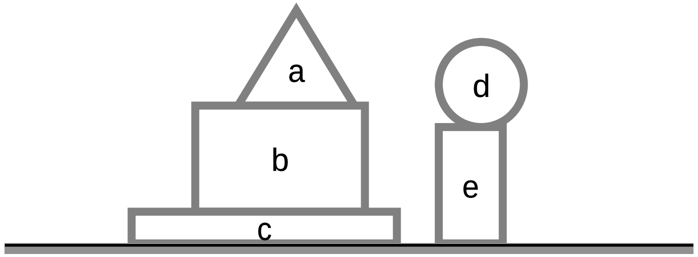
  $\forall x\ (SulPiano(x) \leftrightarrow \neg\exists y\ Sovrasta(x, y))$

  $\forall x\ (Libero(x) \leftrightarrow \neg\exists y\ Sovrasta(y, x))$

- **Assiomi AxBW** (Cook & Liu, 2002)

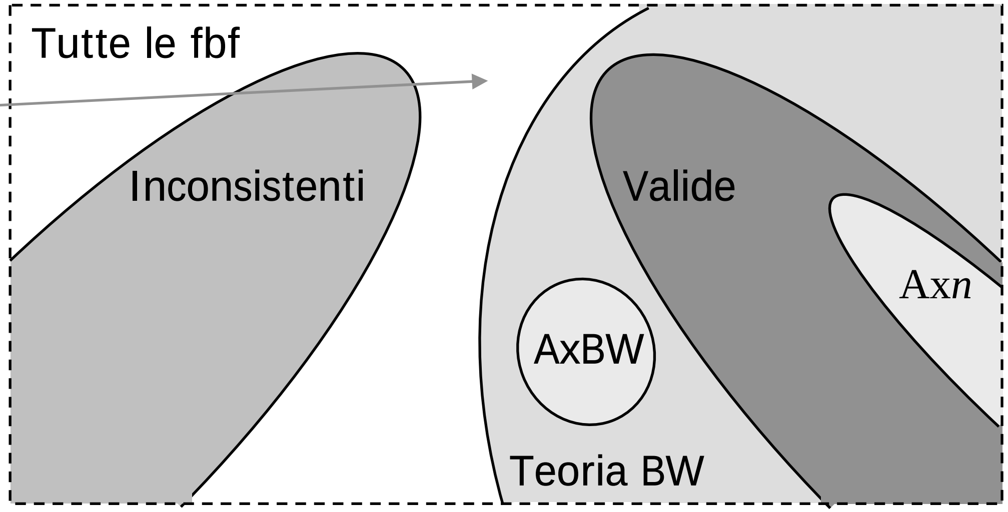
  1) $\forall x\ \neg Sovrasta(x, x)$
  2) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((Sovrasta(x, z) \land Sovrasta(z, y)) \rightarrow Sovrasta(x, y))$
  3) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((Sovrasta(x, y) \land Sovrasta(x, z)) \rightarrow (y = z \lor Sovrasta(z, y) \lor Sovrasta(y, z)))$
  4) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((Sovrasta(y, x) \land Sovrasta(z, x)) \rightarrow (y = z \lor Sovrasta(z, y) \lor Sovrasta(y, z)))$
  5) $\forall x\ (SulPiano(x) \lor \exists y\ (Sovrasta(x, y) \land SulPiano(y)))$
  6) $\forall x\ (Libero(x) \lor \exists y\ (Sovrasta(y, x) \land Libero(y)))$
  7) $\forall x\ \forall y\ (Sovrasta(x, y) \rightarrow (\exists z\ Sopra(x, z) \land \exists v\ Sopra(v, y)))$

Esempio 7 (2)

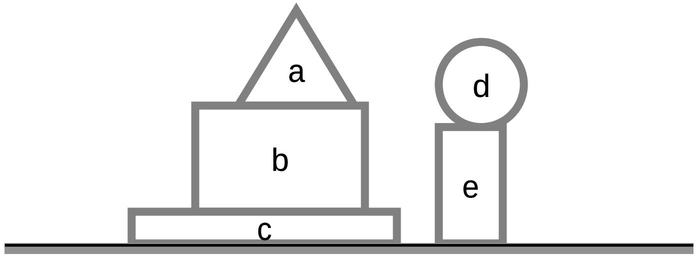


- La Teoria BW è definita dagli assiomi AxBW
  - coincide con l'insieme di fbf **derivabili** da AxBW
- La Teoria BW include Ax*n* e tutte le tautologie (o fbf valide)
  - si rammenti la definizione di derivazione
  - non può contenere fbf inconsistenti
    - altrimenti include *tutte* le fbf

- Non tutte le fbf sono un teorema o la negazione di un teorema



Esempio 7 (3)



- Le fbf della teoria BW si dividono in due categorie
  - fbf che contengono variabili
  - fbf che contengono solo costanti (equivalenti a forme proposizionali)
- Le fbf che contengono variabili descrivono generalizzazioni
  - Esempio: stabilire se la seguente fbf $\in$ BW

    $\forall x\ \forall y\ ((SulPiano(x) \land SulPiano(y)) \rightarrow x = y)$

    - Non è un teorema né la negazione di un teorema
- Le fbf proposizionali descrivono istanze (situazioni) effettive
  - Esempio: stabilire se la seguente fbf $\in$ BW

    $(SulPiano(c) \land Sovrasta(a, c) \land Sopra(a, b)) \rightarrow Sovrasta(b, c)$

    - E` un teorema

Correttezza e completezza

- Correttezza di LPO

  $\Gamma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \varphi$

- Completezza di LPO

  $\vdash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \varphi$ Si considerano in questo caso solo le fbf *valide*

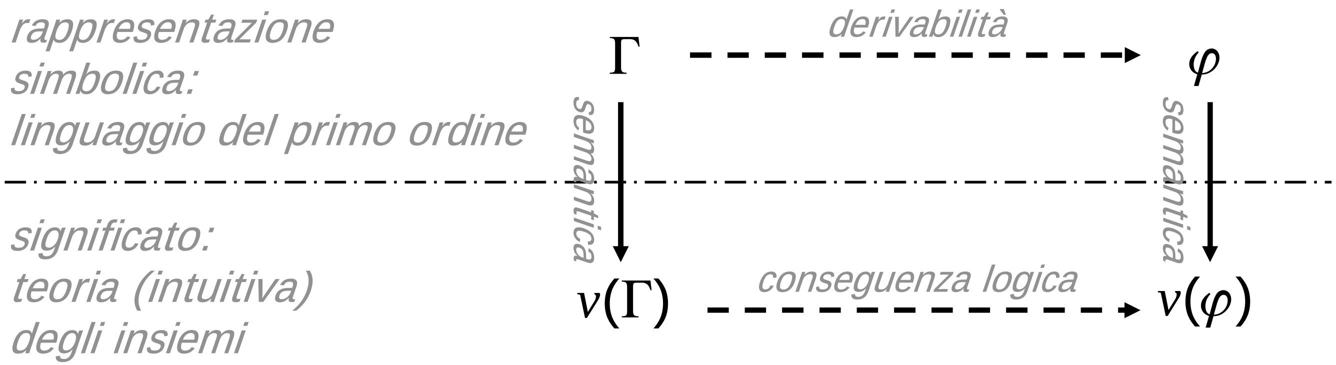
- Validità del sistema di assiomi
  - le fbf del sistema di assiomi Ax per LPO sono *valide*

- Completezza del sistema di assiomi
  - la *teoria* delle fbf *valide* di LPO coincide con l'insieme dei *teoremi* del sistema di assiomi Ax

    $\varphi \in$ *teoremi*$(\mathrm{Ax}) \quad \Leftrightarrow \quad \models \varphi$

Generalità

- Assumendo come riferimento la teoria (intuitiva) degli insiemi, la logica predicativa del primo ordine ha un raggio d'azione molto generale



- Il valore pragmatico è notevole
  - rappresentazione di ragionamenti in astratto
  - a patto di avere una 'macchina' efficiente
- Il valore filosofico è anche maggiore
  - possiamo fondare teorie tramite il linguaggio?

Limitazioni intrinseche

- Non tutte le teorie specifiche in LPO sono complete
  - ω-incompletezza (Gödel)
    - la *teoria* dei numeri contiene degli enunciati *veri* (nella struttura di riferimento) che sono tuttavia indimostrabili
- Indecidibilità di LPO (Church)
  - non esiste un algoritmo deterministico (di valore generale) in grado di stabilire se una fbf è un teorema
    - Ma alcuni sottoinsiemi (non proposizionali) di LPO sono decidibili
- Inoltre:
  - le teorie che includono il simbolo di identità sono sempre interpretabili in una struttura in cui la relazione corrispondente non è l'identità tra oggetti
  - alcune proprietà non sono caratterizzabili da una teoria
    - ogni teoria che ammette un modello infinito ha anche un modello numerabile (Löwenheim-Skolem)