Semi-decidibilità della logica del primo ordine

Marco Piastra

Decidibilità ed automazione di L_{PO}

- Indecidibilità di L_{PO}

  Non esiste un algoritmo in grado di stabilire, in generale, se $\Gamma \models \varphi$

  Al contrario del caso proposizionale, in L_{PO} non si possono verificare direttamente tutte le possibili interpretazioni

  Qual è quindi la speranza di avere un calcolo automatico?

- In realtà, L_{PO} è **semi-decidibile** **(Herbrand, 1930)**

  E\` possibile stabilire (in tempo finito) se

  $\Gamma \models \varphi$

  ... ma <u>non</u> se

  $\Gamma \not\models \varphi$

  In altri termini, esiste una macchina di Turing che:
  di fronte al problema "$\Gamma \models \varphi$?"

  a) Termina con successo se $\Gamma \models \varphi$

  b) Può divergere (i.e. girare all'infinito) se $\Gamma \not\models \varphi$

Sistemi di Herbrand

Dato un enunciato universale, della forma

$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \varphi$ (φ non contiene quantificatori)

il **Sistema di Herbrand** è l'insieme (anche infinito) di formule **chiuse** generato per sostituzione

$\varphi[x_1/t_1, x_2/t_2 \ldots x_n/t_n]$

con <u>tutte</u> le possibili combinazioni $<t_1, t_2 \ldots t_n>$ di $t_i \in \mathbf{U}_{\mathrm{H}}$

Esempi:

$\mathrm{H}(\forall x\, P(x) \rightarrow Q(x))) = \{P(f(a)) \rightarrow Q(f(a)), P(g(a, b)) \rightarrow Q(g(a, b)), \ldots \}$

$\mathrm{H}(\forall x\, \forall y\, R(x, y)) = \{R(f(a), f(a)), R(g(a, b), f(a)), R(f(a), g(a, b)), \ldots \}$

- **Sistema** di Herbrand di una teoria

Data una teoria Σ di enunciati universali
è l'unione $\mathrm{H}(\Sigma)$ di tutti i sistemi di Herbrand generati dagli enunciati Σ

Esempio:

$\Sigma = \{\varphi, \psi, \chi\}$

$\mathrm{H}(\Sigma) = \mathrm{H}(\psi) \cup \mathrm{H}(\varphi) \cup \mathrm{H}(\chi)$

Teorema di Herbrand

- **Teorema di Herbrand**

  Data una teoria di enunciati universali Σ,
  $H(\Sigma)$ ha un modello sse Σ ha un modello

  ... ma qual'è l'utilità?
  $H(\Sigma)$ può essere infinito anche quando Σ è finito
  il teorema si applica solo agli enunciati universali

Forma normale prenessa

- Forma normale **prenessa** (FNP) (= tutti i quantificatori all'inizio)

  Una fbf φ qualsiasi può essere trasformata in una fbf equivalente

  $\mathrm{Q}_1 x_1 \mathrm{Q}_2 x_2 \ldots \mathrm{Q}_n x_n \psi$ (ψ è anche detta ***matrice***)

  dove Q_i è $\forall$ oppure $\exists$ e ψ non contiene quantificatori

  Si ottiene da φ eliminando tutte le negazioni $\neg$ davanti ai quantificatori tramite la definizione $\neg\forall x \equiv \exists x \neg$ e le equivalenze derivanti

  $(\alpha \to \forall x\, \beta) \equiv \forall x\, (\alpha \to \beta)$ dato che $(\alpha \to \forall x\, \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \forall x\, \beta) \equiv \forall x\, (\neg\alpha \vee \beta)$

  $(\forall x\, \alpha \to \beta) \equiv \exists x\, (\alpha \to \beta)$ dato che $(\forall x\, \alpha \to \beta) \equiv (\neg\forall x\, \alpha \vee \beta) \equiv (\exists x\, \neg\alpha \vee \beta) \equiv \exists x\, (\neg\alpha \vee \beta)$

  E\` legittimo (e necessario) *ridenominare* le variabili per evitare sovrapposizioni

Esempio: $\exists y\, (P(y) \to \forall x\, P(x))$

$\exists y \forall x\, (P(y) \to P(x))$ (FNP, usando $(\varphi \to \forall x\, \psi) \leftrightarrow \forall x\, (\varphi \to \psi)$)

Esempio: $\exists y\, (\forall x\, P(x) \to P(y))$

$\exists y \exists x\, (P(x) \to P(y))$ (FNP, usando $(\forall x\, \varphi \to \psi) \leftrightarrow \exists x\, (\varphi \to \psi)$)

Esempio: $\forall x \exists y\, (Q(x,y) \to P(y)) \wedge \neg\forall x\, P(x)$

$\forall x \exists y\, (Q(x,y) \to P(y)) \wedge \exists x\, \neg P(x)$ (definizione $\neg\forall x\, \varphi \equiv \exists x\, \neg\varphi$)

$\forall x \exists y\, (Q(x,y) \to P(y)) \wedge \exists z\, \neg P(z)$ (*ridenominazione* di x in z)

$\forall x \exists y \exists z\, ((Q(x,y) \to P(y)) \wedge \neg P(z))$ (FNP)

Forma di Skolem

Si eliminano i quantificatori esistenziali in un enunciato in forma normale prenessa sostituendo ciascuna variabile esistenzialmente quantificata
con una (nuova) costante o una (nuova) funzione (si espande il *linguaggio*).

Si opera sui quantificatori della formula $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \psi$ partendo da sinistra

Per ogni $Q_i x_i$ della forma $\exists x_i$:

- si applica a ψ la sostituzione $[x_i / k_i(x_1, \ldots, x_{i-1})]$ (nuova funzione di Skolem) oppure $[x_i / k_i]$ (nuova costante di Skolem), se $i = 1$
- si elimina $\exists x_i$ dalla formula

Esempi:

$\exists y \forall x \, (P(y) \rightarrow P(x))$

$\forall x \, (P(k) \rightarrow P(x))$ (k costante di Skolem)

$\forall x \exists y \exists z \, ((Q(x,y) \rightarrow P(y)) \land \neg P(z))$

$\forall x \, ((Q(x, k(x)) \rightarrow P(k(x))) \land \neg P(j(x)))$ ($k/1$ e $j/1$ funzioni di Skolem)

- Teorema

Per qualsiasi enunciato φ,

φ ha un modello sse $sko(\varphi)$ (forma di Skolem di φ) ha un modello

Semi-decidibilità di L_{PO}

- Corollario del teorema di Herbrand

  Le seguenti affermazioni sono equivalenti

  - $\Gamma \models \varphi$
  - $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ non è soddisfacibile (= non ha un modello) (= è inconsistente)
  - Esiste un sottoinsieme **finito**
    di $\mathrm{H}(sko(\Gamma \cup \{\neg\varphi\}))$ (= sistema di Herbrand della forma di Skolem)
    che è **contraddittorio**

  Quindi:

  Una procedura che enumera *tutti* i sottoinsiemi finiti di $\mathrm{H}(sko(\Gamma \cup \{\neg\varphi\}))$
  prima o poi (*in un tempo finito*) trova una contraddizione, sse $\Gamma \models \varphi$