Logica del primo ordine: predicati e relazioni

Marco Piastra

Esempio preliminare

- Soluzione di un'equazione algebrica

$$x^2 + ax + b = 0$$
$$x^2 + 2(a/2)x + a^2/4 - a^2/4 + b = 0$$
$$(x + a/2)^2 - a^2/4 + b = 0$$
$$(x + a/2)^2 = a^2/4 - b$$
$$x = - a/2 \pm (a^2/4 - b)^{1/2}$$

Domande:

Quali sono le componenti del linguaggio usato nelle espressioni?

Qual'è la semantica (il significato) delle componenti del linguaggio?

Qual'è la relazione tra le formule nella sequenza
ovvero, in base a quale principio siamo sicuri della *correttezza* dei passaggi?

Esempio preliminare

- Soluzione di un'equazione algebrica

$$x^2 + ax + b = 0$$
$$x^2 + 2(a/2)x + a^2/4 - a^2/4 + b = 0$$
$$(x + a/2)^2 - a^2/4 + b = 0$$
$$(x + a/2)^2 = a^2/4 - b$$
$$x = - a/2 \pm (a^2/4 - b)^{1/2}$$

Domande:

Quali sono le componenti del linguaggio usato nelle espressioni?

- Costanti (numeri e lettere): $2, 4, a, b$
- Variabili : x
- Funzioni binarie: ^, +, $\cdot$, /, −
- Funzioni unarie: −
- Relazione binarie: =

Dubbio: che cos'è ± ?

Possibile soluzione: riscrivere l'ultima riga usando un connettivo

$$(x = - a/2 + (a^2/4 - b)^{1/2}) \vee (x = - a/2 - (a^2/4 - b)^{1/2})$$

Esempio preliminare

- Soluzione di un'equazione algebrica

$$x^2 + ax + b = 0$$
$$x^2 + 2(a/2)x + a^2/4 - a^2/4 + b = 0$$
$$(x + a/2)^2 - a^2/4 + b = 0$$
$$(x + a/2)^2 = a^2/4 - b$$
$$(x = - a/2 + (a^2/4 - b)^{1/2}) \lor (x = - a/2 - (a^2/4 - b)^{1/2})$$

Domande:

Quali sono le componenti del linguaggio usato nelle espressioni?
Qual'è la semantica (il significato) delle componenti del linguaggio?

- Costanti (numeri e lettere): numeri reali
- Variabili: numeri reali
- Funzioni binarie: funzioni binarie definite sui numeri reali
- Funzioni unarie: funzioni binarie definite sui numeri reali
- Relazione binarie: relazioni binarie definite sui numeri reali
- Connettivi: come in logica proposizionale - funzioni sui valori di verità

Esempio preliminare

- Soluzione di un'equazione algebrica

$$x^2 + ax + b = 0$$
$$x^2 + 2(a/2)x + a^2/4 - a^2/4 + b = 0$$
$$(x + a/2)^2 - a^2/4 + b = 0$$
$$(x + a/2)^2 = a^2/4 - b$$
$$(x = - a/2 + (a^2/4 - b)^{1/2}) \lor (x = - a/2 - (a^2/4 - b)^{1/2})$$

Domande:

Quali sono le componenti del linguaggio usato nelle espressioni?
Qual'è la semantica (il significato) delle componenti del linguaggio?

Qual'è la relazione tra le formule nella sequenza
ovvero, in base a quale principio siamo sicuri della *correttezza* dei passaggi?

- Le equazioni (formule ben formate) sono *logicamente equivalenti*
- Ciascun passaggio è giustificato da *formule valide* nell'ambito dei numeri reali

$$ax = 2(a/2)x + a^2/4 - a^2/4$$
$$x^2 + 2(a/2)x + a^2/4 = (x + a/2)^2$$
$$(x - y + z = 0) \leftrightarrow (x = y - z)$$
$$(x^2 = y) \leftrightarrow ((x = y^{1/2}) \lor (x = -y^{1/2}))$$

Relazioni e predicati

Semantica di

$x = y^2$

tutte le coppie di numeri reali che soddisfano la relazione descritta:

$<0,0>, <1,1>, <1,-1>, <0.25,0.5>, <2,2^{1/2}> \ldots$

- Predicati

La *relazione* può essere descritta in modo simbolico come

SquareOf/2

vale a dire un **predicato** binario.

Il predicato binario può essere definito nei termini di un altro predicato

$\forall x \; \forall y \; (SquareOf(x, y) \leftrightarrow (x = power(y, 2)))$

La *semantica* del predicato è formata da tutte le coppie di numeri reali di cui sopra

In logica del primo ordine si usano formule dove i predicati descrivono relazioni, nel senso che le relazioni sono la *semantica* dei predicati

Non necessariamente relazioni definite su un campo numerico ...

Logica del primo ordine

Strutture semantiche proposizionali (già viste)

Mondi possibili descritti tramite affermazioni atomiche

Il mondo descritto da una struttura $<\{0,1\}, \boldsymbol{P}, v>$

$\{0,1\}$ è l'insieme dei valori di verità

$\boldsymbol{P}$ è un'insieme di simboli proposizionali (**segnatura**)

v è una *funzione*: $\boldsymbol{P} \rightarrow \{0,1\}$ che assegna valori di verità ai simboli proposizionali

Simboli proposizionali

Ciascuno indica una frase affermativa (**proposizioni**)

Per convezione usiamo i simboli A, B, C, D, ...

Mondi possibili

Possiamo considerare diverse strutture:

$<\{0,1\}, \boldsymbol{P}, v>$
$<\{0,1\}, \boldsymbol{P}, v'>$
$<\{0,1\}, \boldsymbol{P}, v''>$
...

Notare che le strutture condividono i simboli $\boldsymbol{P}$ e l'insieme dei valori di verità $\{0,1\}$

Differiscono solo per le funzioni v : i valori di verità assegnati sono in generale diversi

Strutture semantiche del primo ordine

Mondi possibili fatti di oggetti, insiemi e relazioni

Il mondo descritto da una struttura $<\mathbf{U}, \Sigma, v>$

$\mathbf{U}$ è un insieme di oggetti di base, detto anche ***universo del discorso*** o ***dominio*** (*domain*)

Σ è un'insieme di simboli, detto ***segnatura*** (*signature*)

v è una *funzione* che definisce il significato dei simboli di Σ in relazione al dominio $\mathbf{U}$

Segnatura Σ

- *costanti individuali*: a, b, c, d, ...
- *simboli funzionali*: f/n, g/p, h/q, ...
- *simboli predicativi* (o *relazionali*): P/k, Q/l, R/m, ...

Strutture semantiche del primo ordine

Mondi possibili fatti di oggetti, insiemi e relazioni

Il mondo descritto da una struttura $<\mathbf{U}, \Sigma, v>$

- $\mathbf{U}$ è un insieme di oggetti di base, detto anche ***universo del discorso*** o ***dominio*** (*domain*)
- Σ è un'insieme di simboli, detto ***segnatura*** (*signature*)
- v è una *funzione* che definisce il significato dei simboli di Σ in relazione al dominio $\mathbf{U}$

Termine

- Ogni *costante individuale* è un **termine**
- Se f è un *simbolo funzionale* a n argomenti e $t_1, \ldots, t_n$ sono **termini**, allora $f(t_1, \ldots, t_n)$ è un **termine**

Atomo

- Se P è un *simbolo predicativo* a *n* argomenti e $t_1, \ldots, t_n$ sono **termini**, allora $P(t_1, \ldots, t_n)$ è un **atomo** o **formula atomica**

Strutture semantiche del primo ordine

Mondi possibili fatti di oggetti, insiemi e relazioni

Il mondo descritto da una struttura $<\mathbf{U}, \Sigma, v>$

$\mathbf{U}$ è un insieme di oggetti di base, detto anche ***universo del discorso*** o ***dominio*** (*domain*)

Σ è un'insieme di simboli, detto ***segnatura*** (*signature*)

v è una *funzione* che un significato ai simboli di Σ in relazione al dominio $\mathbf{U}$

Funzione v (interpretazione)

- L'interpretazione di una *costante individuale* è un *oggetto* di $\mathbf{U}$

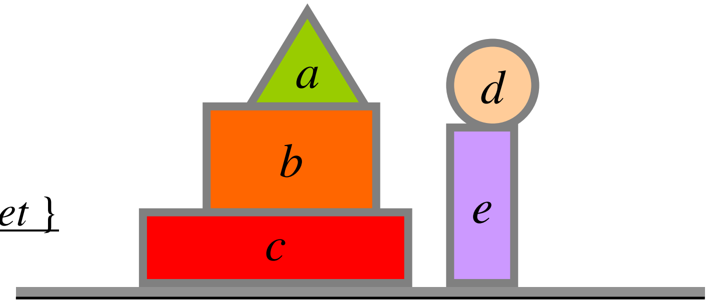
  $v(\ a\ ) = obj \in \mathbf{U}$ (a costante individuale)
- L'interpretazione di un *simbolo funzionale* è una *funzione* definita su $\mathbf{U}$

  $v(\ f/n\ ) = fun : \mathbf{U}^n \rightarrow \mathbf{U}$ (f simbolo funzionale avente arità n)
- L'interpretazione di un *simbolo predicativo* è una *relazione* definita su $\mathbf{U}$

  $v(\ P/m\ ) = rel \subseteq \mathbf{U}^m$ (P simbolo predicativo avente arità m)

Ditelo con gli atomi

- Esempio di struttura $<\mathbf{U}, \Sigma, v>$



Dominio $\mathbf{U}$

Insieme di oggetti: { *a, b, c, d, e, green, orange, red, rose, violet* }

Segnatura Σ

Costanti individuali: *a, b, c, d, e, green, orange, red, rose, violet*

Simboli funzionali: *colorOf*/1

Simboli predicativi: *Pyramid*/1, *Parallelepiped*/1, *Sphere*/1, *Ontable*/1, *Clear*/1, *Above*/2, =/2

Non confondere gli oggetti di $\mathbf{U}$ *con i simboli di* Σ

Una struttura $<\mathbf{U}, \Sigma, v>$ *soddisfa* un insieme di atomi

Esempio: appartenenza a insiemi

$<\mathbf{U}, \Sigma, v> \models$ *Pyramid*(*a*)
Parallelepiped(*b*), *Parallelepiped*(*c*), *Parallelepiped*(*e*)
Sphere(*d*)
Ontable(*c*), *Ontable*(*e*)
Clear(*a*), *Clear*(*d*)

Valori di funzioni

$<\mathbf{U}, \Sigma, v> \models$ (*colorOf*(*a*) = *green*), (*colorOf*(*b*) = *orange*), (*colorOf*(*c*) = *red*) , (*colorOf*(*d*) = *rose*)

Relazioni

$<\mathbf{U}, \Sigma, v> \models$ *Above*(*a*,*b*), *Above*(*b*,*c*), *Above*(*a*,*c*), *Above*(*d*,*e*)

Ditelo con gli atomi

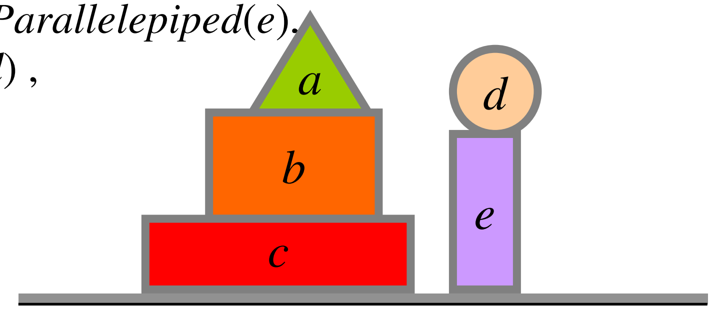
Diverse interpretazioni, stessa segnatura Σ *e dominio* **U**

Le diverse interpretazioni soddisfano atomi diversi

$\langle \mathbf{U}, \Sigma, v_1 \rangle \models$ *Pyramid*(*a*), *Parallelepiped*(*b*), *Parallelepiped*(*c*), *Sphere*(*d*), *Parallelepiped*(*e*),
(*colorOf*(*a*) = *green*), (*colorOf*(*b*) = *orange*), (*colorOf*(*c*) = *red*) ,
(*colorOf*(*d*) = *rose*) , (*colorOf*(*e*) = *violet*)

Ontable(*c*), *Ontable*(*e*), *Clear*(*a*), *Clear*(*d*)

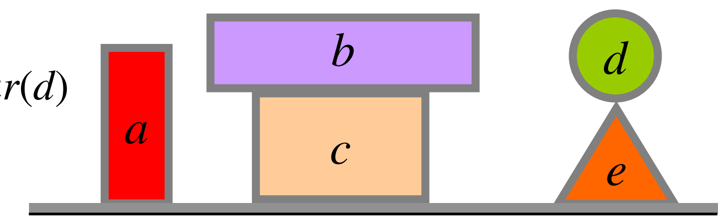
Above(*a*,*b*), *Above*(*b*,*c*), *Above*(*a*,*c*), *Above*(*d*,*e*)



$\langle \mathbf{U}, \Sigma, v_2 \rangle \models$ *Parallelepiped*(*a*), *Parallelepiped*(*b*), *Parallelepiped*(*c*), *Sphere*(*d*), *Pyramid*(*e*),
(*colorOf*(*a*) = *red*), (*colorOf*(*b*) = *violet*), (*colorOf*(*c*) = *pink*) ,
(*colorOf*(*d*) = *green*) , (*colorOf*(*e*) = *orange*)

Ontable(*a*), *Ontable*(*c*), *Ontable*(*e*), *Clear*(*a*), , *Clear*(*b*), *Clear*(*d*)

Above(*b*,*c*), *Above*(*d*,*e*)

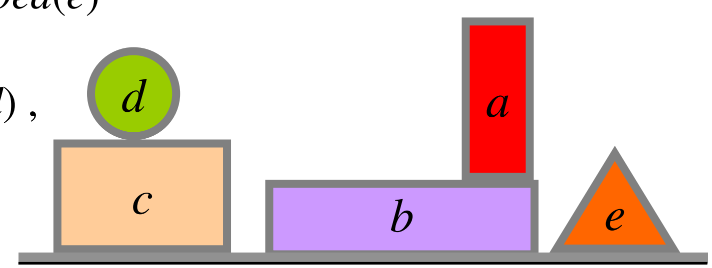


$\langle \mathbf{U}, \Sigma, v_3 \rangle \models$ *Pyramid*(*a*), *Parallelepiped*(*b*), *Parallelepiped*(*c*), *Parallelepiped*(*e*)
Sphere(*d*)

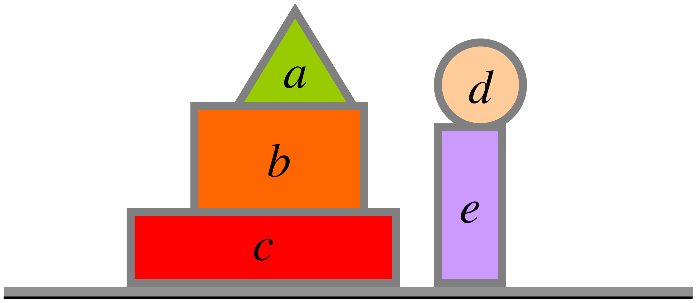
(*colorOf*(*a*) = *green*), (*colorOf*(*b*) = *orange*), (*colorOf*(*c*) = *red*) ,
(*colorOf*(*d*) = *rose*) , (*colorOf*(*e*) = *violet*)

Ontable(*c*), *Ontable*(*e*), *Clear*(*a*), *Clear*(*d*)

Above(*a*,*b*), *Above*(*b*,*c*), *Above*(*a*,*c*), *Above*(*d*,*e*)



Astrazione: variabili e quantificatori



(semantica intuitiva, per ora)

- Proprietà di carattere generale

  $\neg\forall x\ \exists y\ (Above(x,y))$

  $\neg\forall y\ \exists x\ (Above(x,y))$

- Definizioni di nuovi predicati

  $\forall x \forall y\ (On(x,y) \leftrightarrow (Above(x,y)\ \wedge\ \neg\exists z\ (Above(x,z)\ \wedge\ Above(z,y)))$

  $\forall x\ (Ontable(x) \leftrightarrow \neg\exists z\ Above(x,z))$

  $\forall x\ (Clear(x) \leftrightarrow \neg\exists z\ Above(z,x))$

Astrazione: variabili e quantificatori

- "Essere fratelli significa essere parenti"

  $\forall x \forall y\ (Fratello(x, y) \rightarrow Parente(x, y))$

- "La relazione di parentela è simmetrica"

  $\forall x \forall y\ (Parente(x ,y) \leftrightarrow Parente(y, x))$

- "Una madre è un genitore di sesso femminile"

  $\forall x \forall y\ (Madre(x, y) \leftrightarrow (Genitore(x, y) \land Femmina(x)))$

- "Un cugino è figlio di un fratello o una sorella di uno dei genitori"

  $\forall x \forall y\ (Cugino(x, y)$

  $\leftrightarrow \exists z \exists w\ (Genitore(z, x) \land Genitore(w, y) \land (Fratello(z, w) \lor Sorella(z, w))))$

- "Ciascuno ha una madre"

  $\forall x \exists y\ Madre(y, x)$

  Occorre fare attenzione all'ordine dei quantificatori:

  $\exists y \forall x\ Madre(y, x)$

  "Esiste una madre di tutti"

  <u>*L'ordine dei quantificatori non può essere modificato senza alterare il significato*</u>

Linguaggio di L_{PO}

- Simboli del linguaggio L_{PO}

  Costanti individuali (Indicate come: a, b, c, …)

  Esempi: 1, 2000, *Socrate*, *Sfera1*, *MickeyMouse*, *Amelia*, ...

  Variabili (Indicate come: x, y, z, …)

  Simboli funzionali con numero di argomenti prestabilito (*arità*)

  Indicati come: f/n, g/m, h/p, …

  Esempi: *sqrt*/1, *colorOf*/1, *greatestCommonDivisor*/2

  Simboli predicativi con numero di argomenti prestabilito (*arità*)

  Indicati come: P/n, Q/m, R/p, …

  Esempi: *Red*/1, *Large*/1, *GreaterThan*/2, =/2

  Connettivi

  Gli stessi della logica proposizionale: $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$

  Quantificatori

  $\forall$ (universale), $\exists$ (esistenziale)

  Parentesi e virgola ( ) ,

Linguaggio di L_{PO}

- **Termini**

  Ogni *variabile* o *costante individuale* è un **termine**

  Se f è un *simbolo funzionale* a n argomenti e $t_1, \dots, t_n$ sono **termini**, allora $f(t_1, \dots, t_n)$ è un **termine**

  Un termine **base** (*ground*) non contiene variabili

- **Atomo o formula atomica**

  Se P è un *simbolo predicativo* a n argomenti e $t_1, \dots, t_n$ sono **termini**, allora $P(t_1, \dots, t_n)$ è un **atomo** o **formula atomica**

  Un atomo **base** (*ground*) non contiene variabili

Esempi:

$$\underbrace{\underbrace{Sorella}_{\text{predicato}}(\underbrace{\underbrace{Amelia}_{\text{costante}}}_{\text{termine}},\ \underbrace{\underbrace{Alba}_{\text{costante}}}_{\text{termine}})}_{\text{formula atomica}}$$

$$\underbrace{\underbrace{shapeOf(\underset{\text{costante}}{b})}_{\text{termine}} \underset{\text{predicato}}{=} \underbrace{shapeOf(\underset{\text{variabile}}{x})}_{\text{termine}}}_{\text{formula atomica}}$$

Linguaggio di L_{PO}

- Regole di buona formazione

Ogni *formula atomica* è una fbf

$$\varphi \in \text{fbf}(L_{PO}) \;\Rightarrow\; (\neg\varphi) \in \text{fbf}(L_{PO})$$
$$\varphi, \psi \in \text{fbf}(L_{PO}) \;\Rightarrow\; (\varphi \rightarrow \psi) \in \text{fbf}(L_{PO})$$
$$\varphi \in \text{fbf}(L_{PO}) \;\Rightarrow\; (\forall x\, \varphi) \in \text{fbf}(L_{PO})$$

$$\varphi, \psi \in \text{fbf}(L_{PO}), \qquad (\varphi \vee \psi) \;\Leftrightarrow\; ((\neg\varphi) \rightarrow \psi)$$
$$\varphi, \psi \in \text{fbf}(L_{PO}), \qquad (\varphi \wedge \psi) \;\Leftrightarrow\; (\neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi)))$$
$$\varphi, \psi \in \text{fbf}(L_{PO}), \qquad (\varphi \leftrightarrow \psi) \;\Leftrightarrow\; ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$$
$$\varphi \in \text{fbf}(L_{PO}) \qquad (\exists x\, \varphi) \Leftrightarrow (\neg\forall x\, \neg\varphi)$$

Si dice linguaggio **del primo ordine** in quanto
i quantificatori agiscono solo sugli **oggetti**,
vale a dire sulle variabili x, y, z ..., e non sulle **relazioni** e **funzioni**
(*In una logica del secondo ordine si hanno formule del tipo*: $\exists F\, F(a,b)$)

Formule aperte, enunciati

- Variabili **libere** e **vincolate**

  Una variabile (in una fbf) è **vincolata** se si trova nel raggio di azione di un **quantificatore** per quella variabile

  Una variabile è **libera** se non è *vincolata*

  esempi di variabile vincolata:
  $\forall x \ P(x)$
  $\exists x \ (P(x) \to (A(x) \land B(x))$

  esempi di variabile libera:
  $P(x)$
  $\exists y \ (P(y) \to (A(x,y) \land B(y)))$

- **Formule aperte** e **chiuse**

  Una fbf è **aperta** se in essa vi è almeno una variabile libera

  Una fbf è **chiusa** (anche **enunciato** - *sentence*) in caso contrario

  Solo le fbf *chiuse*, cioè gli *enunciati*, hanno un valore di verità (vedi oltre) (in quanto rappresentano delle *affermazioni* ...)

Strutture, interpretazioni e assegnazioni

- Una **struttura** $\langle \mathbf{U}, v \rangle$ per L_{PO} contiene:

  Un insieme di oggetti $\mathbf{U}$ (l'universo del discorso)

  Si omette da ora in poi il riferimento a Σ

  Un'**interpretazione** v che associa

  ad ogni **costante** c un **oggetto** di $\mathbf{U}$
  $v(c) \in \mathbf{U}$

  ad ogni **predicato** P a n argomenti una **relazione** n-aria in $\mathbf{U}^n$
  $v(P) \subseteq \mathbf{U}^n$

  ad ogni **funzione** f a n argomenti una **funzione** da $\mathbf{U}^n$ a $\mathbf{U}$
  $v(f) \in \mathbf{U}^n \to \mathbf{U}$

  La funzione v non assegna un significato alle variabili

- Assegnazione

  Data una struttura $\langle \mathbf{U}, v \rangle$, un'**assegnazione** (*valuation*) s

  è una *funzione* che associa ad ogni **variabile** x un **oggetto** di $\mathbf{U}$
  $s(x) \in \mathbf{U}$

  La combinazione di una $\langle \mathbf{U}, v \rangle$ e di una s determina univocamente gli oggetti associati a ciascun elemento di L_{PO}

Soddisfacimento

- Data una struttura $<\mathbf{U}, v>$ un'assegnazione s

  Se φ è una formula atomica, $<\mathbf{U}, v> [s] \models \varphi$ sse

  se φ ha la forma $P(t_1, \dots , t_n)$ allora $<v(t_1) [s], \dots, v(t_n) [s]> \in v(P) [s]$

  L'assegnazione s serve a poter definire una semantica anche per le fbf <u>aperte</u>

  Se φ e ψ sono fbf qualsiasi

  $<\mathbf{U}, v> [s] \models (\neg\varphi)$ sse $<\mathbf{U}, v> [s] \not\models \varphi$

  $<\mathbf{U}, v> [s] \models (\varphi \wedge \psi)$ sse $<\mathbf{U}, v> [s] \models \varphi$ e $<\mathbf{U}, v> [s] \models \psi$

  $<\mathbf{U}, v> [s] \models (\varphi \vee \psi)$ sse $<\mathbf{U}, v> [s] \models \varphi$ o $<\mathbf{U}, v> [s] \models \psi$

  $<\mathbf{U}, v> [s] \models (\varphi \rightarrow \psi)$ allora non $<\mathbf{U}, v> [s] \models \varphi$ o $<\mathbf{U}, v> [s] \not\models \psi$

  Formule con quantificatori

  $<\mathbf{U}, v> [s] \models \forall x\, \varphi$ sse per ogni $\underline{d} \in \mathbf{U}$ si ha $<\mathbf{U}, v> [s](x{:}\underline{d}) \models \varphi$

  $<\mathbf{U}, v> [s] \models \exists x\, \varphi$ sse esiste un $\underline{d} \in \mathbf{U}$ per cui si ha $<\mathbf{U}, v> [s](x{:}\underline{d}) \models \varphi$

Modelli

- **Validità** in un'interpretazione, **modello**

  Una fbf φ tale per cui si ha $<\mathbf{U}, v> [s] \models \varphi$ per qualsiasi assegnazione s è detta **valida** in $<\mathbf{U}, v>$

  Si dice anche che $<\mathbf{U}, v>$ è un **modello** di φ

    si scrive $<\mathbf{U}, v> \models \varphi$ (si elimina il riferimento a s)

  Una struttura $<\mathbf{U}, v>$ è detta **modello** di un *insieme di fbf* Γ sse è un modello di tutte le fbf in Γ

    si scrive allora $<\mathbf{U}, v> \models \Gamma$

- **Verità**

  Un **enunciato** ψ si dice **vero** in $<\mathbf{U}, v>$ se è **valido** in $<\mathbf{U}, v>$

Validità

- Validità e verità logiche

  Una fbf (aperta o chiusa) è **valida** (o **logicamente valida**)
  se è **valida** in qualsiasi $<\mathbf{U}, v>$

  Esempi:

  $(P(x) \vee \neg P(x))$ (tautologia proposizionale tradotta in formula aperta)

  Un enunciato ψ è **vero** (o **logicamente vero**)
  se è **vero** in qualsiasi $<\mathbf{U}, v>$

  si scrive allora $\models \psi$ (si elimina il riferimento a $<\mathbf{U}, v>$)

  Esempi:

  $\forall x\, (P(x) \vee \neg P(x))$ (generalizzazione di una tautologia)

  $\forall x \forall y\, (G(x,y) \rightarrow (H(x,y) \rightarrow G(x,y)))$ (generalizzazione di assioma – vedi oltre)

- Inconsistenza

  Una fbf (aperta o chiusa) è **inconsistente** se non è soddisfacibile

  Un enunciato ψ è **inconsistente** se non ha un *modello*

  Esempi:

  $\forall x\, (P(x) \wedge \neg P(x))$ (generalizzazione di una contraddizione)

Conseguenza logica

- Definizione

  Dato un insieme di fbf Γ ed una fbf φ di L_{PO} si ha

  $$\Gamma \models \varphi$$

  sse tutte le <$\mathbf{U}$, v> [s] che soddisfano Γ soddisfano anche φ

- Osservazioni

  La definizione si estende a tutte le possibili <$\mathbf{U}$, v> [s]

  Quindi, a tutti i possibili insiemi $\mathbf{U}$, alle relazioni e funzioni in $\mathbf{U}$ ed alle associazioni di oggetti di $\mathbf{U}$ a variabili e costanti

  Il calcolo diretto della conseguenza logica in L_{PO} è impossibile anche nelle forme più semplici

*Ditelo con le funzioni o con i predicati?

Semanticamente, funzioni e predicati sono molto simili:
si può fare a meno delle funzioni?

- Le funzioni si possono *rappresentare* anche tramite predicati

  ad esempio, la validità dell'enunciato:

  $$\forall x \forall y \forall z \, ((\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z)) \rightarrow (y = z))$$

  indica che l'interpretazione di $\varphi(..)$ (in generale, una relazione $v(\varphi) \subseteq \mathbf{U}^2$)
  è anche una funzione $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$

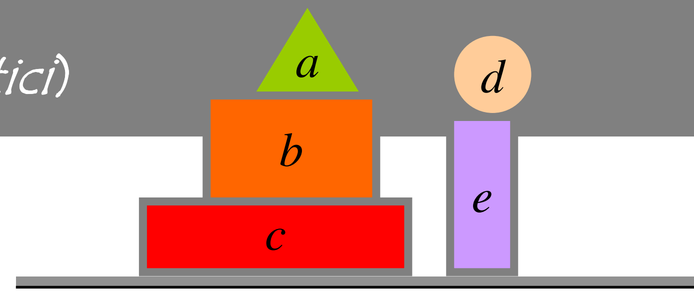
- Ma solo le funzioni si possono nidificare

  La presenza delle funzioni arricchisce il linguaggio in modo sostanziale:
  a differenza dei predicati, le funzioni si possono nidificare (nei termini)

  Di conseguenza, viene grandemente aumentata la portata del calcolo logico-simbolico

  (*con un corrispondente aumento della complessità di calcolo* ...)

*Many-sorted or nil (dedicato agli informatici)



Tornando alla segnatura dell'esempio mondo dei blocchi

$green,\ \ colorOf(green),\ \ colorOf(colorOf(green)), colorOf(colorOf(colorOf(green))), \ldots$

Sono tutti termini sintatticamente corretti, in base alla definizione.
Peccato che, intuitivamente, non abbiano senso: un colore non è un oggetto …

Per le applicazioni pratiche, le segnature dovrebbero avere un *tipo* (*sort*)

Per descrivere un dominio che contiene oggetti di tipo diverso (segnatura *many-sorted*)

Il tipo si applica alle costanti ed agli argomenti di simboli funzionali e predicativi
Complicazione notevole: si riflette in tutte le definizioni sintattiche e semantiche

Comodità del nil

Una costante particolare: nil
cui corrisponde un interpretazione (canonica) di un non-oggetto

In questo modo, funzioni e relazioni possono essere definite in modo parziale:

$(colorOf(a) = green)\ \wedge\ (colorOf(green) = nil)$

$Above(a,b)\ \wedge\ Above(c,nil)$

Possono essere fbf vere in una struttura

In questo modo, si evita l'uso esplicito del tipo