Logica Proposizionale

Introduzione

Marco Piastra

Algebre di Boole

- Struttura astratta

Una collezione di oggetti X
su cui sono definiti tre operatori: $\cup$, $\cap$ e ^{c}
e che contiene un elemento nullo $\emptyset$

Gli operatori possono avere un nome

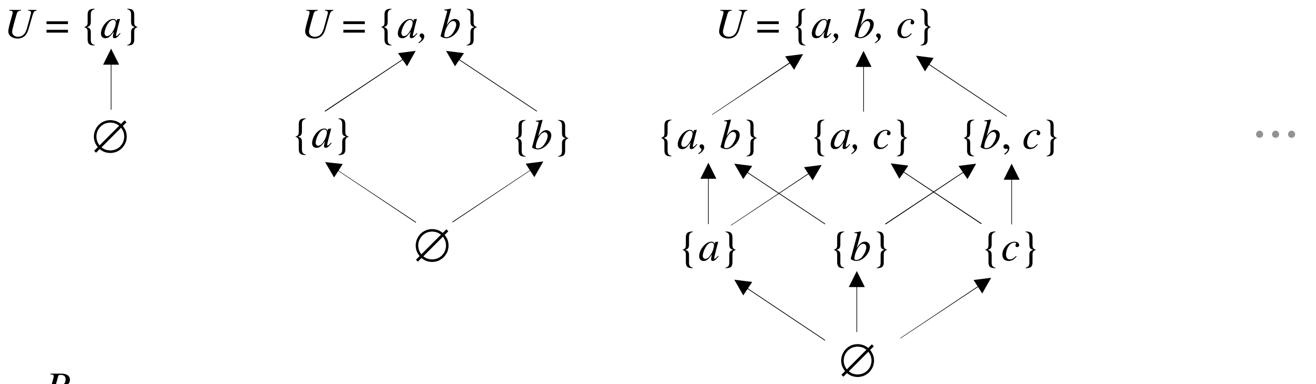
$A \cup B$	*unione*
$A \cap B$	*intersezione*
A^c	*complemento*

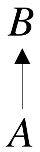
In tale struttura, devono valere alcune proprietà di base:

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C\,,\quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	*associatività*
$A \cup B = B \cup A\,,\quad A \cap B = B \cap A$	*commutatività*
$A \cup (A \cap B) = A\,,\quad A \cap (A \cup B) = A$	*assorbimento*
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\,,\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	*distributività*
$A \cup A^c = U\,,\quad A \cap A^c = \emptyset$	*complemento*

Esempi di algebre di Boole

- Un metodo semplice per costruire un'algebra di Boole:
  - Scegliere l'insieme U
  - Costruire la collezione di tutti i <u>sottoinsiemi</u> di U (detto anche **insieme delle parti**, 2^U)





(A, B sono sottoinsiemi di U)
significa $A \subseteq B$

Tutte le strutture così costruite sono equivalenti

Nel senso che le proprietà delle algebre di Boole valgono per tutte o per nessuna

Esempi di algebre di Boole

- Insieme delle parti 2^U

  Caso particolare

$$
\begin{tikzcd}
& U = \{a, b, c\} & \\
\{a, b\} \arrow[ur] & \{a, c\} \arrow[u] & \{b, c\} \arrow[ul] \\
\{a\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{b\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{c\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
& \varnothing \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Verifica delle proprietà:

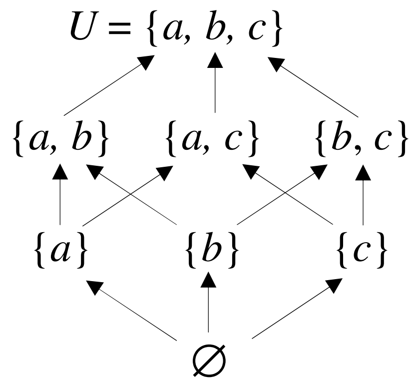
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C\,, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	*associatività*
$A \cup B = B \cup A\,, \quad A \cap B = B \cap A$	*commutatività*
$A \cup (A \cap B) = A\,, \quad A \cap (A \cup B) = A$	*assorbimento*
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\,, \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	*distributività*
$A \cup A^c = U\,, \quad A \cap A^c = \varnothing$	*complemento*

$A \cup A^c = U$	$A \cap (A \cup B) = A$	…
$A = \{a\}$	$A = \{b\}$	
$A^c = \{b, c\}$	$B = \{c\}$	
$A \cup A^c = \{a, b, c\} = U$	$A \cup B = \{b, c\}$	
	$A \cap (A \cup B) = \{b\}$	

Esempi di algebre di Boole

- Insieme delle parti 2^U

  Caso particolare



Altre identità dimostrabili:

$A \cup A = A\,, \quad A \cap A = A$ *idempotenza*

$A \cup \varnothing = A\,, \quad A \cap U = A, \;\; A \cup U = U\,, \quad A \cap \varnothing = \varnothing$

$U^c = \varnothing\,, \quad \varnothing^c = U$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c\,, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ *leggi di De Morgan*

$(A^c)^c = A$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$A = \{b\}$
$A^c = \{a, c\}$
$B = \{b, c\}$
$B^c = \{a\}$
$A \cup B = \{b, c\}$
$(A \cup B)^c = \{a\}$
$A^c \cap B^c = \{a\}$

$$A^c \cup B = U$$

* *Questa NON è valida in generale!*

$A = \{a\}$
$A^c = \{b, c\}$
$B = \{b\}$
$A^c \cup B = \{b, c\}$

Sarebbe valida se $A \subseteq B$

Quale algebra di Boole?

* Se tutte le strutture algebriche di Boole sono equivalenti (*nel senso descritto*) tanto vale considerare quindi l'algebra più semplice: $\{U, \varnothing\}$

Un algebra a due valori: {'tutto', 'niente'} oppure {'vero' e 'falso'}

- Notazione

  Si indicano U con 1 ('vero') e $\varnothing$ con 0 ('falso')

  Si sostituiscono i simboli delle operazioni $\cup$, $\cap$ e ^{c} con $\vee$, $\wedge$ e $\neg$

- Tavole di verità (*truth tables*)

  Rappresentazione degli operatori $\vee$, $\wedge$ e $\neg$ come *funzioni booleane*

  Funzione booleana: funzione a n argomenti del tipo $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$

OR

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

AND

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

NOT

A	$\neg A$
0	1
1	0

Espressioni composite

Il metodo delle tavole di verità

Può essere esteso alle espressioni comunque composite

Ad esempio per verificare le leggi dell'algebra di Boole

Le due colonne sono identiche

1a legge di De Morgan

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

In generale

Un'espressione composita è una **funzione booleana**

$f(x_1, x_2, ..., x_n) : \{1, 0\}^n \rightarrow \{1, 0\}$

dove $x_1, x_2, ..., x_n$ sono le lettere che compaiono nell'espressione

Quanti operatori?

- Quanti operatori logici occorrono per rappresentare <u>tutte</u> le possibili funzioni booleane?

	x_1	x_2	...	x_n	$f(x_1, x_2, ..., x_n)$
	0	0	...	0	f_1
	0	0	...	1	f_2
2^n righe	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...
	1	1	...	1	f_{2^n}

I tre operatori ∨, ∧ e ¬ formano una base adeguata

La tavola di verità può essere riscritta come un'unica espressione:

- per ciascuna riga r in cui $f_r = 1$, si combinano con ∧ le n lettere A_1, A_2, ... A_n prendendo A_i se lo i-esimo valore è vale 1 e $\neg A_i$ se vale 0
- si aggregano in ∨ tutte le combinazioni ottenute al passo precedente

Altre operazioni logiche

Anche { ∨, ¬ } o { ∧, ¬ } sono basi adeguate

Una base adeguata è costituita anche dal solo *NOR* o dal solo *NAND*:

NOR

A	B	$\neg(A \vee B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

NAND

A	B	$\neg(A \wedge B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Implicazione ed equivalenza

I logici preferiscono usare come base $\{\rightarrow, \neg\}$

Cui si aggiunge di solito anche $\leftrightarrow$

Implicazione

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Equivalenza

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Identità notevoli $A \rightarrow B = \neg A \vee B$ $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

Logica proposizionale

La più semplice in assoluto

- Rappresentazione del mondo (o meglio di *un* mondo)

  Un mondo descritto tramite frasi affermative (**proposizioni**)

  "La terra è rotonda"
  "I tacchini sono bipedi con le piume"
  "Gli unicorni sono creature fantastiche"

  Fondamentale: si assume che ciascuna affermazione possa essere solo *vera* o *falsa*

- Linguaggio formale

  Il linguaggio usa le **proposizioni** come elementi *atomici*
  (i.e. la struttura interna di ciascuna affermazione viene persa)

  Le formule composite sono ottenute componendo proposizioni con gli operatori booleani

- Semantica formale

  Intuitivamente, descrive il rapporto tra le formule e le situazioni effettive

  In logica proposizionale, in una situazione effettiva:

  - ciascuna proposizione atomica è *vera* o *falsa* (*valore di verità*)
  - il valore delle formule composite si determina a partire dai valori atomici tramite le regole degli *operatori booleani* (*vero-funzionalità*)

Strutture semantiche proposizionali

Cosa vogliamo rappresentare

Il mondo descritto da una struttura $<\{0,1\}, \boldsymbol{P}, v>$

$\{0,1\}$ è l'insieme dei valori di verità

$\boldsymbol{P}$ è un'insieme di simboli proposizionali (**segnatura**)

v è una *funzione*: $\boldsymbol{P} \rightarrow \{0,1\}$ che assegna valori di verità ai simboli proposizionali

Simboli proposizionali

Ciascuno indica una frase affermativa (**proposizioni**)

Per convezione usiamo i simboli A, B, C, D, ...

Non è necessario che $\boldsymbol{P}$ sia un'insieme finito

Mondi possibili

Possiamo considerare diverse strutture:

$<\{0,1\}, \boldsymbol{P}, v>$

$<\{0,1\}, \boldsymbol{P}, v'>$

$<\{0,1\}, \boldsymbol{P}, v''>$

$\ldots$

Notare che le strutture condividono i simboli $\boldsymbol{P}$ e l'insieme dei valori di verità $\{0,1\}$

Differiscono solo per le funzioni v : i valori di verità assegnati sono in generale diversi

Descrizione di mondi possibili *diversi* tramite la stessa *segnatura*

Linguaggio proposizionale

Come descriviamo il mondo

- Linguaggio logico proposizionale L_P

  Un insieme $\boldsymbol{P}$ di simboli proposizionali: $\boldsymbol{P} = \{A, B, C, \dots\}$

  Due **connettivi** principali: $\neg$, $\rightarrow$

  Tre **connettivi** derivati: $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$

  Le parentesi: (,)

- Formule ben formate (**fbf**)

  Regole sintattiche per la composizione

  L'insieme di tutte le **fbf** di L_P si indica con $\mathrm{fbf}(L_P)$

  $A \in \boldsymbol{P} \;\Rightarrow\; A \in \mathrm{fbf}(L_P)$

  $\varphi \in \mathrm{fbf}(L_P) \;\Rightarrow\; (\neg\varphi) \in \mathrm{fbf}(L_P)$

  $\varphi, \psi \in \mathrm{fbf}(L_P) \;\Rightarrow\; (\varphi \rightarrow \psi) \in \mathrm{fbf}(L_P)$

  $\varphi, \psi \in \mathrm{fbf}(L_P) \;\Rightarrow\; (\varphi \vee \psi) \in \mathrm{fbf}(L_P), \quad (\varphi \vee \psi) \;\Leftrightarrow\; ((\neg\varphi) \rightarrow \psi)$

  $\varphi, \psi \in \mathrm{fbf}(L_P) \;\Rightarrow\; (\varphi \wedge \psi) \in \mathrm{fbf}(L_P), \quad (\varphi \wedge \psi) \;\Leftrightarrow\; (\neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi)))$

  $\varphi, \psi \in \mathrm{fbf}(L_P) \;\Rightarrow\; (\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathrm{fbf}(L_P), \quad (\varphi \leftrightarrow \psi) \;\Leftrightarrow\; ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$

  Non ci sono regole di precedenza: si usano le parentesi

Interpretazioni

- Strutture e formule composite

  Data una struttura proposizionale $<\{0,1\}, \boldsymbol{P}, v>$
  la funzione $v : \boldsymbol{P} \rightarrow \{0,1\}$ può essere estesa a fbf qualsiasi
  Tramite gli operatori dell'algebra di Boole:

  $v(\neg\varphi) = \text{NOT } v(\varphi)$
  $v(\varphi \wedge \psi) = v(\varphi) \text{ AND } v(\psi)$
  $v(\varphi \vee \psi) = v(\varphi) \text{ OR } v(\psi)$
  $v(\varphi \rightarrow \psi) = (\text{NOT } v(\varphi)) \text{ OR } v(\psi)$
  $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = ((\text{NOT } v(\varphi)) \text{ OR } v(\psi)) \text{ AND } (v(\varphi) \text{ OR } (\text{NOT } (v(\psi)))$

- Interpretazioni

  La funzione v (così estesa) assegna un valore di verità a <u>*tutte*</u> le fbf di L_P

  $$v : \text{fbf}(L_P) \rightarrow \{0,1\}$$

  Si dice che v è un'**interpretazione** di L_P

  Il valore delle fbf composite è univocamente determinato
  dal valore nei simboli nella *segnatura* $\boldsymbol{P}$

  Per brevità, il riferimento all'intera struttura proposizionale si omette e si cita solo v

Soddisfacimento, modelli

- Interpretazioni e tavole di verità
  - Esempio: $\varphi = (A \lor B) \land C$
    - Ciascuna riga rappresenta un'interpretazione
    - Ciascuna interpretazione assegna un valore a <u>tutte</u> le fbf di L_P

	A	B	C	$A \lor B$	$(A \lor B) \land C$
v_1	0	0	0	0	0
v_2	0	0	1	0	0
v_3	0	1	0	1	0
v_4	0	1	1	1	1
v_5	1	0	0	1	0
v_6	1	0	1	1	1
v_7	1	1	0	1	0
v_8	1	1	1	1	1

  - Un'interpretazione v **soddisfa** una fbf φ sse $v(\varphi) = 1$
    - Si può scrivere anche $v \models \varphi$
    - Nella tavola di verità, le righe evidenziate corrispondono alle interpretazioni che soddisfano φ
  - Si dice anche che v è un **modello** di φ
    - Per estensione, si dice che v soddisfa (è un modello di) un insieme di fbf $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots , \varphi_n\}$ sse v soddisfa (è un modello di) tutte le fbf $\varphi_1, \varphi_2, \dots , \varphi_n$
    - Si può scrivere anche $v \models \Gamma$

Tautologie, contraddizioni

- Una **tautologia**

  E` una fbf soddisfatta da tutte le interpretazioni

  Si dice anche fbf **valida**

  Qualsiasi fbf del tipo $\varphi \vee \neg\varphi$ è una tautologia

A	$A \wedge \neg A$	$A \vee \neg A$
0	0	1
1	0	1

A	B	$(\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee A)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Una **contraddizione**

  E` una fbf insoddisfacibile, (che non può essere soddisfatta da alcuna interpretazione)

  Qualsiasi fbf del tipo $\varphi \wedge \neg\varphi$ è una contraddizione

A	B	$\neg((\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee A))$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Notare:

- Non tutte le fbf sono tautologie o contraddizioni
- Se φ è una tautologia $\neg\varphi$ è una contraddizione e viceversa

Formule e sottoinsiemi

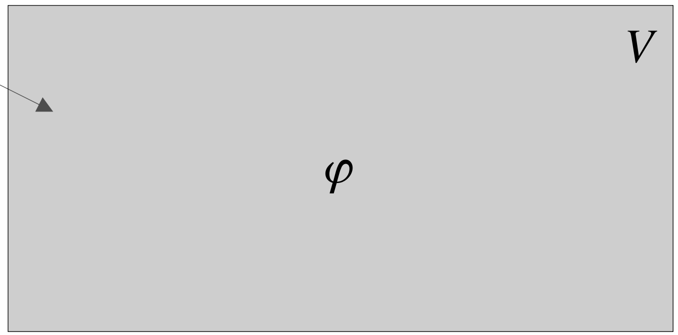
- Si consideri l'insieme V di tutte le possibili interpretazioni v
  - Ciascuna **fbf** di L_P corrisponde a un **sottoinsieme** di V
    - Il sottoinsieme delle interpretazioni v che la soddisfano
    - Ad esempio, a φ corrisponde $\{v : v(\varphi) = 1\}$ (si scrive anche $\{v : v \models \varphi\}$)
      - Il sottoinsieme potrebbe essere vuoto (se φ è una contraddizione) o coincidente con V (se φ è una tautologia)

Insieme di tutte le possibili **interpretazioni** (o mondi possibili)

Formule e sottoinsiemi

- Si consideri l'insieme V di tutte le possibili interpretazioni v
  - Ciascuna **fbf** di L_P corrisponde a un **sottoinsieme** di V
    - Il sottoinsieme delle interpretazioni v che la soddisfano (modelli di φ)
    - Ad esempio, a φ corrisponde $\{v : v(\varphi) = 1\}$ (si scrive anche $\{v : v \models \varphi\}$)
      - Il sottoinsieme potrebbe essere vuoto (se φ è una contraddizione) o coincidente con V (se φ è una tautologia)

Insieme di tutte le possibili **interpretazioni** (o mondi possibili)



"φ è una tautologia"

"qualsiasi interpretazione in V è un modello di φ"

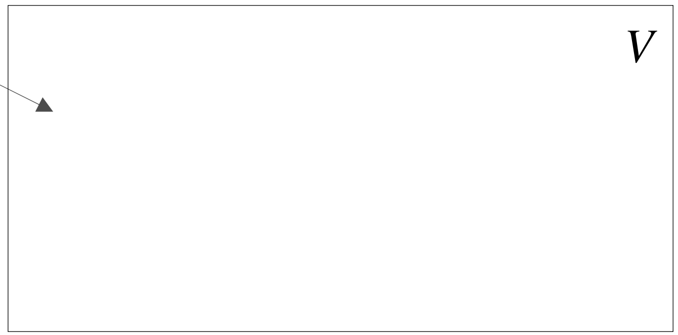
"φ è (logicamente) **valida**"

Inoltre:
"φ è **soddisfacibile**"
"φ <u>non</u> è **falsificabile**"

Formule e sottoinsiemi

- Si consideri l'insieme V di tutte le possibili interpretazioni v
  - Ciascuna **fbf** di L_P corrisponde a un **sottoinsieme** di V
    - Il sottoinsieme delle interpretazioni v che la soddisfano (modelli di φ)
    - Ad esempio, a φ corrisponde $\{v : v(\varphi) = 1\}$ (si scrive anche $\{v : v \models \varphi\}$)
      - Il sottoinsieme potrebbe essere vuoto (se φ è una contraddizione) o coincidente con V (se φ è una tautologia)

Insieme di tutte le possibili **interpretazioni** (o mondi possibili)



"φ è una contraddizione"

"nessuna interpretazione in V è un modello di φ"

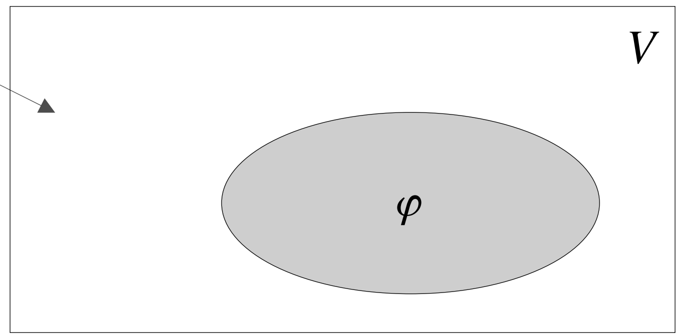
"φ <u>non</u> è (logicamente) **valida**"

Inoltre:
"φ <u>non</u> è **soddisfacibile**"
"φ è **falsificabile**"

Formule e sottoinsiemi

- Si consideri l'insieme V di tutte le possibili interpretazioni v
  - Ciascuna **fbf** di L_P corrisponde a un **sottoinsieme** di V
    - Il sottoinsieme delle interpretazioni v che la soddisfano (modelli di φ)
    - Ad esempio, a φ corrisponde $\{v : v(\varphi) = 1\}$ (si scrive anche $\{v : v \models \varphi\}$)
      - Il sottoinsieme potrebbe essere vuoto (se φ è una contraddizione) o coincidente con V (se φ è una tautologia)

Insieme di tutte le possibili **interpretazioni** (o mondi possibili)



"φ non è né una contraddizione né una tautologia"

"alcune interpretazioni in V sono modelli di φ, altre no"

"φ <u>non</u> è (logicamente) **valida**"

Inoltre:
"φ è **soddisfacibile**"
"φ è **falsificabile**"

Linguaggio naturale, linguaggio logico

- Il processo di traduzione (o formalizzazione)
  - Il linguaggio logico L_P è composto da simboli e regole di formazione
  - Le interpretazioni assegnano un significato (formale) alle fbf di L_P
  - Che cosa rappresenta tutto ciò?
- Le fbf di L_P sono le frasi di un linguaggio formale
  - Ciascuna rappresenta una frase in linguaggio naturale (p.es. in italiano)
  - Le fbf atomiche rappresentano singole affermazioni
    - "Giorgio è contento"
    - "Giorgio è un bipede senza piume"
    - "Tutti gli esseri umani sono bipedi senza piume"
- Le fbf di L_P rappresentano frasi affermative composite, di senso compiuto
  - Di cui si può dire che siano vere o false
  - Quest'idea di traduzione non è esente da guai (paradossi)
    - "Questa proposizione è falsa"

Relazioni tra formule

- Premesse:

$$\varphi_1 = B \vee D \vee \neg(A \wedge C)$$

"Silvia è madre di Giorgio" OR "Giorgio è contento"
OR NOT("Giorgio è umano" AND "Giorgio è un bipede senza piume")

$$\varphi_2 = B \vee C$$

"Silvia è madre di Giorgio" OR "Giorgio è un bipede senza piume"

$$\varphi_3 = A \vee D$$

"Giorgio è umano" OR "Giorgio è contento"

$$\varphi_4 = \neg B$$

NOT "Silvia è madre di Giorgio"

- Affermazione:

$$\psi = D$$

"Giorgio è contento"

Qual'è il **legame logico**
tra le premesse
e l'affermazione?

E tra le premesse?

Conseguenza logica

- La tavola di verità
  per le fbf dell'esempio

$$\varphi_1 = B \lor D \lor \neg(A \land C)$$
$$\varphi_2 = B \lor C$$
$$\varphi_3 = A \lor D$$
$$\varphi_4 = \neg B$$
$$\overline{\psi = D}$$

A	B	C	D	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	ψ
0	0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	1

Tutte le interpretazioni che soddisfano $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ soddisfano anche ψ

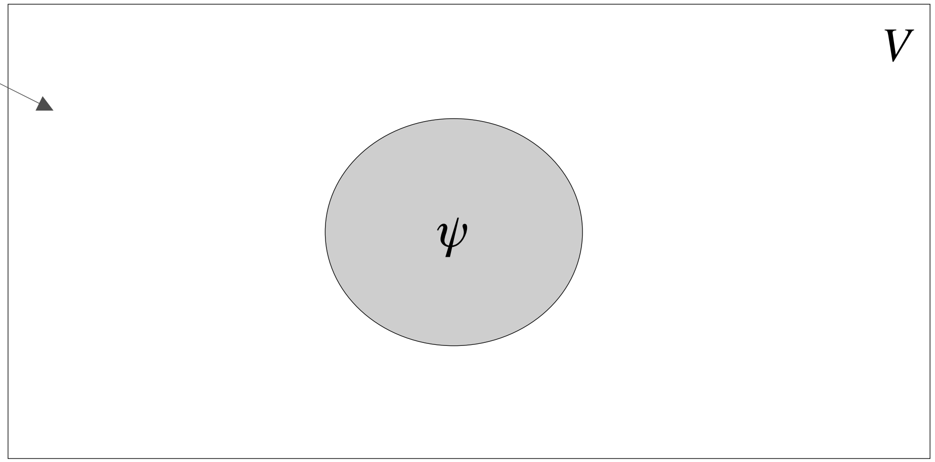
Relazione di **conseguenza logica**: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models \psi$
(*logical entailment*)

(Attenti alla notazione!)

Formule, sottoinsiemi e conseguenza logica

- Si consideri l'insieme V di tutte le possibili interpretazioni v

Insieme di tutte le possibili
interpretazioni
(o mondi possibili)

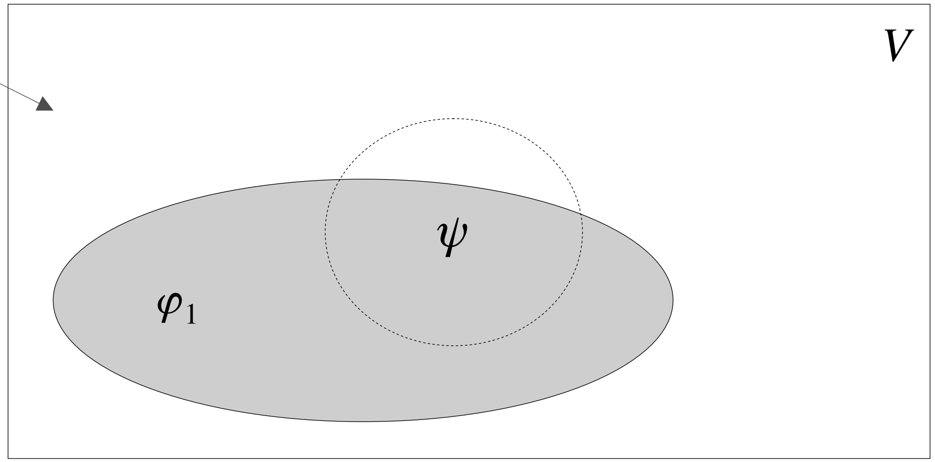


"Tutte le interpretazioni che sono modello di ψ"

Formule, sottoinsiemi e conseguenza logica

- Si consideri l'insieme V di tutte le possibili interpretazioni v

Insieme di tutte le possibili
interpretazioni
(o mondi possibili)



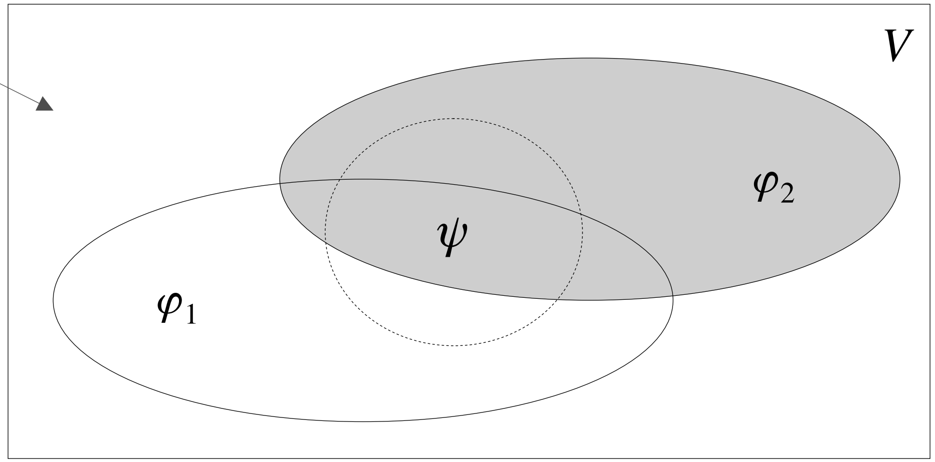
"Tutte le interpretazioni che sono modello di φ_1"

$\{\varphi_1, \varphi_2\} \not\models \psi$
Perché l'insieme dei modelli di $\{\varphi_1\}$
non è contenuto nell'insieme dei modelli di ψ

Formule, sottoinsiemi e conseguenza logica

- Si consideri l'insieme V di tutte le possibili interpretazioni v

Insieme di tutte le possibili
interpretazioni
(o mondi possibili)



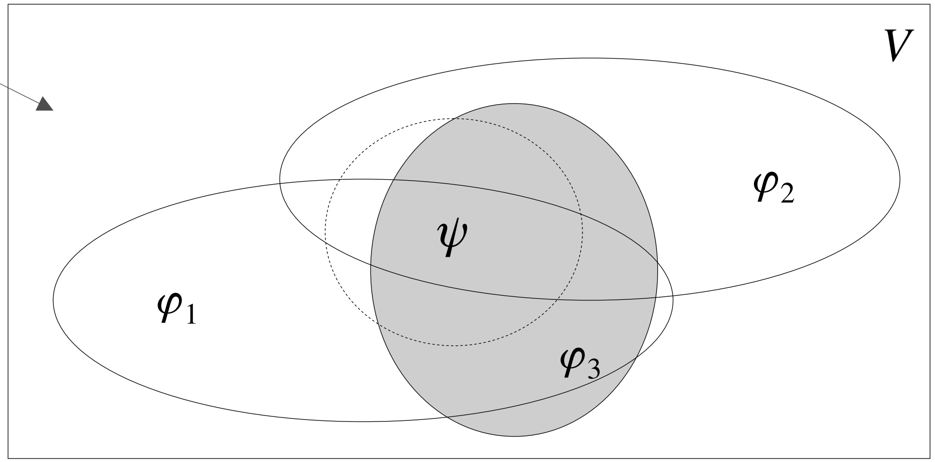
"Tutte le interpretazioni che sono modello di φ_2"

$\{\varphi_1, \varphi_2\} \not\models \psi$
Perché l'insieme dei modelli di $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ (intersezione)
non è contenuto nell'insieme dei modelli di ψ

Formule, sottoinsiemi e conseguenza logica

- Si consideri l'insieme V di tutte le possibili interpretazioni v

Insieme di tutte le possibili **interpretazioni** (o mondi possibili)



"Tutte le interpretazioni che sono modello di φ_3"

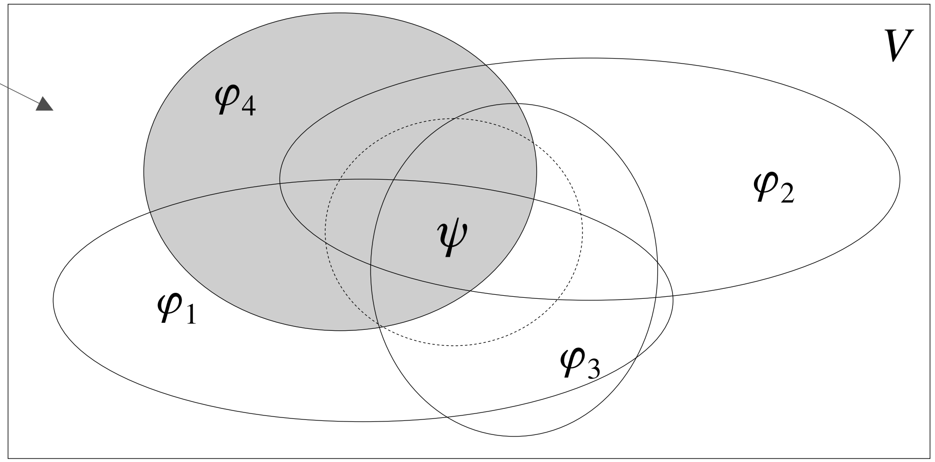
$\{ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \not\models \psi$

Perché l'insieme dei modelli di $\{ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ (intersezione) non è contenuto nell'insieme dei modelli di ψ

Formule, sottoinsiemi e conseguenza logica

- Si consideri l'insieme V di tutte le possibili interpretazioni v

Insieme di tutte le possibili **interpretazioni** (o mondi possibili)



"Tutte le interpretazioni che sono modello di φ_4"

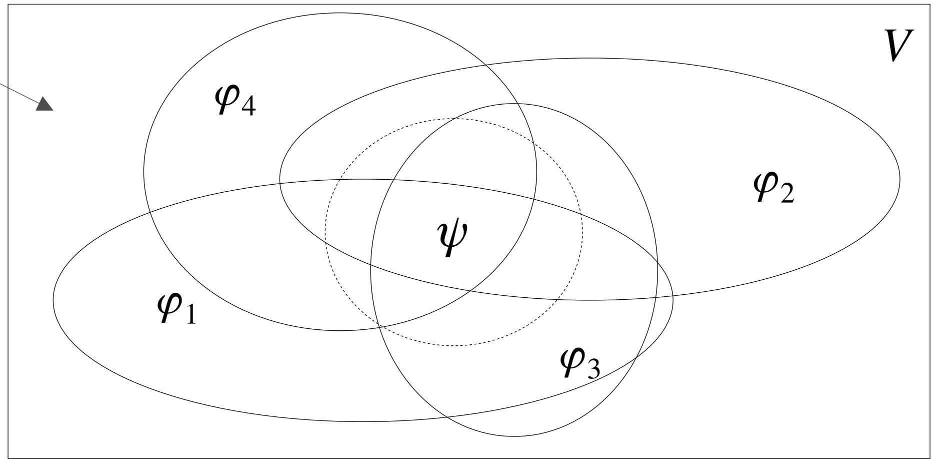
$\{ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \} \models \psi$

Perché l'insieme dei modelli di $\{ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \}$ (intersezione) <u>è</u> contenuto nell'insieme dei modelli di ψ

Formule, sottoinsiemi e conseguenza logica

- Si consideri l'insieme V di tutte le possibili interpretazioni v

Insieme di tutte le possibili **interpretazioni** (o mondi possibili)



"Tutte le interpretazioni che sono modello di φ_4"

$\{ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \models \psi$

Perché l'insieme dei modelli di $\{ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ (intersezione) <u>è</u> contenuto nell'insieme dei modelli di ψ

In questo caso, tutte le premesse $\varphi 1, \varphi 2, \varphi 3, \varphi 4$ sono necessarie: non c'è altro modo di costruire per intersezione un sottoinsieme dei modelli di ψ

Doppia conseguenza = equivalenza logica

- Equivalenza

  Si considerino due fbf φ e ψ tali per cui si abbia:

  $\varphi \models \psi$ e $\psi \models \varphi$

  Si dice allora che le due fbf sono **logicamente equivalenti**

  Si scrive $\varphi \equiv \psi$

- Sostituibilità

  Due fbf equivalenti hanno gli stessi **modelli**

  Ai fini della conseguenza logica, fbf equivalenti sono sostituibili

  Anche come sotto-formule

Esempio: $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \models \psi$

$\varphi_1 = B \vee D \vee \neg(A \wedge C)$
$\varphi_2 = B \vee C$
$\varphi_3 = A \vee D$
$\varphi_4 = \neg B$
$\psi = D$

$\varphi_1 = B \vee D \vee (A \rightarrow \neg C)$
$\varphi_2 = B \vee C$
$\varphi_3 = \neg A \rightarrow D$
$\varphi_4 = \neg B$
$\psi = D$

Implicazione

Le fbf del problema precedente possono essere riscritte così:

Usando la base $\{\rightarrow, \neg\}$

$$\varphi_1 = C \rightarrow (\neg B \rightarrow (A \rightarrow D))$$
$$\varphi_2 = \neg B \rightarrow C$$
$$\varphi_3 = \neg A \rightarrow D$$
$$\varphi_4 = \neg B$$
$$\psi = D$$

$$\varphi_1 = B \vee D \vee \neg(A \wedge C)$$
$$\varphi_2 = B \vee C$$
$$\varphi_3 = A \vee D$$
$$\varphi_4 = \neg B$$
$$\psi = D$$

- Validità (in termini di conseguenza logica) di schemi generali:

$$\begin{array}{l} \varphi \rightarrow \psi \\ \varphi \\ \hline \psi \end{array}$$

Si può verificare direttamente, che

$$\varphi \rightarrow \psi, \varphi \models \psi$$

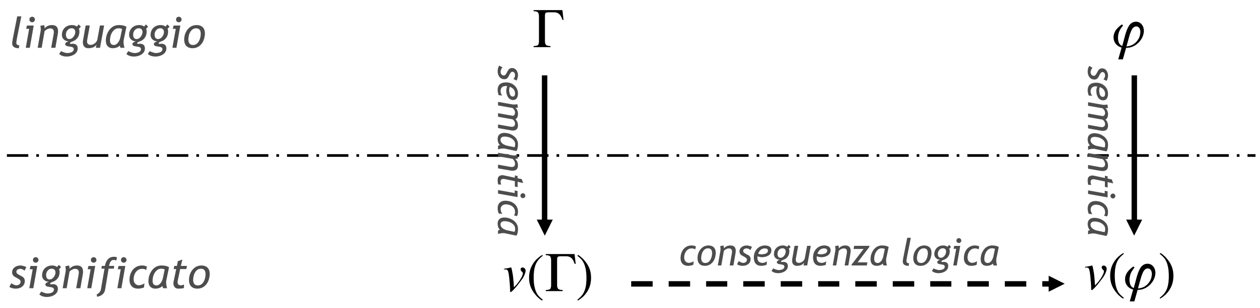
Analogamente

$$\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \models \neg\varphi$$

Concetti essenziali

- **Linguaggio simbolico**
  - Formalismo rigoroso
    - Un insieme di simboli
    - Regole sintattiche (di buona formazione) per le fbf
- **Semantica formale**
  - Interpretazioni come funzioni dal linguaggio ad una struttura
    - Un'interpretazione assegna un valore a <u>tutte</u> le fbf del linguaggio
    - Per L_P la struttura di riferimento è molto semplice: $\{1, 0\}$
- **Soddisfacimento, conseguenza logica**
    - Una fbf è soddisfatta da un'interpretazione che la rende <u>vera</u>
  - La conseguenza logica è una <u>relazione</u> tra fbf e/o insiemi di fbf
    - Ciascuna fbf è soddisfatta solo da alcune interpretazioni (sottoinsieme)
    - La relazione sussiste quando le interpretazioni che soddisfano le fbf delle premesse soddisfano anche la fbf (o le fbf) della conseguenza
    - Occorre considerare tutte le possibili interpretazioni (semantica *estensionale*)

Concetti essenziali



Sottigliezze: linguaggio *oggetto* e *metalinguaggio*

- Il linguaggio logico proposizionale L_P è il **linguaggio oggetto**

  E' lo strumento con il quale ci proponiamo di lavorare

  E` composto unicamente dai costrutti appena introdotti:

  $\boldsymbol{P}$, $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$, (,), *regole sintattiche*, o di buona formazione

- **Metalinguaggio**: costrutti simbolici accessori

  Usati per definire le caratteristiche del linguaggio oggetto

  Lettere greche minuscole ($\alpha, \beta, \chi, \varphi, \psi$) per indicare una formula (o fbf) qualsiasi

  Lettere greche maiuscole (Γ, Δ, Σ) per indicare un'insieme di fbf qualsiasi

  Simboli di conseguenza ed equivalenza logica: $\models$, $\equiv$

  Simboli di se e solo se: $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

Ulteriori costrutti particolari
verranno introdotti gradualmente