

Semi-decidibilità della logica del primo ordine

Marco Piastra

Decidibilità ed automazione di L_{PO}

- Indecidibilità di L_{PO}

Non esiste un algoritmo in grado di stabilire, in generale, se $\Gamma \models \varphi$

Al contrario del caso proposizionale, in L_{PO} non si possono verificare direttamente tutte le possibili interpretazioni

Qual è quindi la speranza di avere un calcolo automatico?

- In realtà, L_{PO} è **semi-decidibile** (Herbrand, 1930)

E` possibile stabilire (in tempo finito) se

$$\Gamma \models \varphi$$

... ma non se

$$\Gamma \not\models \varphi$$

In altri termini, esiste una macchina di Turing che:
di fronte al problema " $\Gamma \models \varphi$?"

a) Termina con successo se $\Gamma \models \varphi$

b) Può divergere (i.e. girare all'infinito) se $\Gamma \not\models \varphi$

Sistemi di Herbrand

Dato un enunciato universale, della forma

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \varphi \quad (\varphi \text{ non contiene quantificatori})$$

il **Sistema di Herbrand** è l'insieme (anche infinito) di formule **chiuse** generato per sostituzione

$$\varphi[x_1/t_1, x_2/t_2 \dots x_n/t_n]$$

con tutte le possibili combinazioni $\langle t_1, t_2 \dots t_n \rangle$ di $t_i \in \mathbf{U}_H$

Esempi:

$$H(\forall x P(x) \rightarrow Q(x)) = \{P(f(a)) \rightarrow Q(f(a)), P(g(a, b)) \rightarrow Q(g(a, b)), \dots\}$$

$$H(\forall x \forall y R(x, y)) = \{R(f(a), f(a)), R(g(a, b), f(a)), R(f(a), g(a, b)), \dots\}$$

▪ Sistema di Herbrand di una teoria

Data una teoria Σ di enunciati universali

è l'unione $H(\Sigma)$ di tutti i sistemi di Herbrand generati dagli enunciati Σ

Esempio:

$$\Sigma = \{\varphi, \psi, \chi\}$$

$$H(\Sigma) = H(\psi) \cup H(\varphi) \cup H(\chi)$$

Teorema di Herbrand

▪ Teorema di Herbrand

Data una teoria di enunciati universali Σ ,
 $H(\Sigma)$ ha un modello sse Σ ha un modello

... ma qual'è l'utilità?

$H(\Sigma)$ può essere infinito anche quando Σ è finito
il teorema si applica solo agli enunciati universali

Forma normale prenessa

■ Forma normale **prenessa** (FNP) (= tutti i quantificatori all'inizio)

Una fbf φ qualsiasi può essere trasformata in una fbf equivalente

$$Q_1x_1Q_2x_2 \dots Q_nx_n\psi \quad (\psi \text{ è anche detta } \mathbf{matrice})$$

dove Q_i è \forall oppure \exists e ψ non contiene quantificatori

Si ottiene da φ eliminando tutte le negazioni \neg davanti ai quantificatori tramite la definizione $\neg\forall x \equiv \exists x \neg$ e le equivalenze derivanti

$$(\alpha \rightarrow \forall x \beta) \equiv \forall x (\alpha \rightarrow \beta) \quad \text{dato che} \quad (\alpha \rightarrow \forall x \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \forall x \beta) \equiv \forall x (\neg\alpha \vee \beta)$$

$$(\forall x \alpha \rightarrow \beta) \equiv \exists x (\alpha \rightarrow \beta) \quad \text{dato che} \quad (\forall x \alpha \rightarrow \beta) \equiv (\neg\forall x \alpha \vee \beta) \equiv (\exists x \neg\alpha \vee \beta) \equiv \exists x (\neg\alpha \vee \beta)$$

È legittimo (e necessario) *ridenominare* le variabili per evitare sovrapposizioni

$$\text{Esempio: } \exists y (P(y) \rightarrow \forall x P(x))$$

$$\exists y \forall x (P(y) \rightarrow P(x)) \quad (\text{FNP, usando } (\varphi \rightarrow \forall x \psi) \leftrightarrow \forall x (\varphi \rightarrow \psi))$$

$$\text{Esempio: } \exists y (\forall x P(x) \rightarrow P(y))$$

$$\exists y \exists x (P(x) \rightarrow P(y)) \quad (\text{FNP, usando } (\forall x \varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \exists x (\varphi \rightarrow \psi))$$

$$\text{Esempio: } \forall x \exists y (Q(x,y) \rightarrow P(y)) \wedge \neg \forall x P(x)$$

$$\forall x \exists y (Q(x,y) \rightarrow P(y)) \wedge \exists x \neg P(x) \quad (\text{definizione } \neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi)$$

$$\forall x \exists y (Q(x,y) \rightarrow P(y)) \wedge \exists z \neg P(z) \quad (\text{ridenominazione di } x \text{ in } z)$$

$$\forall x \exists y \exists z ((Q(x,y) \rightarrow P(y)) \wedge \neg P(z)) \quad (\text{FNP})$$

Forma di Skolem

Si eliminano i quantificatori esistenziali in un enunciato in forma normale prenessa sostituendo ciascuna variabile esistenzialmente quantificata con una (nuova) costante o una (nuova) funzione (si espande il *linguaggio*).

Si opera sui quantificatori della formula $Q_1x_1Q_2x_2 \dots Q_nx_n\psi$ partendo da sinistra

Per ogni Q_ix_i della forma $\exists x_i$:

- si applica a ψ la sostituzione $[x_i/k_i(x_1, \dots, x_{i-1})]$ (nuova funzione di Skolem) oppure $[x_i/k_i]$ (nuova costante di Skolem), se $i = 1$
- si elimina $\exists x_i$ dalla formula

Esempi:

$$\exists y \forall x (P(y) \rightarrow P(x))$$

$$\forall x (P(k) \rightarrow P(x))$$

(k costante di Skolem)

$$\forall x \exists y \exists z ((Q(x,y) \rightarrow P(y)) \wedge \neg P(z))$$

$$\forall x ((Q(x, k(x)) \rightarrow P(k(x))) \wedge \neg P(j(x)))$$

($k/1$ e $j/1$ funzioni di Skolem)

Teorema

Per qualsiasi enunciato φ ,

φ ha un modello sse $sko(\varphi)$ (forma di Skolem di φ) ha un modello

Semi-decidibilità di L_{PO}

- Corollario del teorema di Herbrand

Le seguenti affermazioni sono equivalenti

- $\Gamma \models \varphi$
- $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ non è soddisfacibile (= non ha un modello) (= è inconsistente)
- Esiste un sottoinsieme **finito** di $H(sko(\Gamma \cup \{\neg\varphi\}))$ (= sistema di Herbrand della forma di Skolem) che è **contraddittorio**

Quindi:

Una procedura che enumera *tutti* i sottoinsiemi finiti di $H(sko(\Gamma \cup \{\neg\varphi\}))$ prima o poi (*in un tempo finito*) trova una contraddizione, sse $\Gamma \models \varphi$

Universo e base di Herbrand

■ Termini e atomi di Herbrand

Dato un linguaggio L_{PO}

Un **termine** di Herbrand è un *termine base* (*ground term* = che non contiene variabili)

Esempi:

$f(a), g(a,b), g(f(a),b), g(f(a),g(b,c)), g(f(a),g(f(b),c)), \dots$

Un **atomo** di Herbrand è un *atomo base* (*ground atom* = che non contiene variabili)

Esempi:

$P(f(a)), P(g(a,b)), Q(g(f(a),b), g(f(a),g(b,c))), \dots$

■ Universo e base di Herbrand

L'**universo** di Herbrand è l'insieme di tutti i termini di Herbrand

Esempio:

$U_H \equiv \{f(a), g(a,b), g(f(a),b), g(f(a),g(b,c)), g(f(a),g(f(b),c)), \dots\}$

La **base** di Herbrand è l'insieme di tutti gli atomi di Herbrand

Esempio:

$B_H \equiv \{P(f(a)), P(g(a,b)), Q(g(f(a),b), g(f(a),g(b,c))), \dots\}$

Modelli di Herbrand

▪ **Struttura di Herbrand per L_{PO}**

Una struttura $\langle \mathbf{U}_H, v_H \rangle$ tale che

$$\forall c \in \text{Cost}(L_{PO}), v_H(c) = c$$

$$\forall t \in \mathbf{U}_H, v_H(t) = t$$

▪ **Interpretazione v_H di Herbrand**

Un qualsiasi **sottoinsieme** della base di Herbrand B_H

$$v_H \equiv \{P(a), P(f(b)), P(c), Q(a, g(b, c)), Q(b, c) \dots\} \quad (\text{solo formule atomiche chiuse})$$

$$v_H \subseteq B_H$$

▪ **Modello di Herbrand**

$$\varphi \in \text{Atom}(L_{PO}), \langle \mathbf{U}_H, v_H \rangle [s] \models \varphi \quad \text{sse } \varphi \in v_H$$

$$\varphi \in \text{Atom}(L_{PO}), \langle \mathbf{U}_H, v_H \rangle [s] \models \neg \varphi \quad \text{sse } \varphi \notin v_H$$

$$\langle \mathbf{U}_H, v_H \rangle [s] \models \neg \varphi \quad \text{sse } \langle \mathbf{U}_H, v_H \rangle [s] \not\models \varphi$$

$$\langle \mathbf{U}_H, v_H \rangle [s] \models \varphi \rightarrow \psi \quad \text{sse non } (\langle \mathbf{U}_H, v_H \rangle [s] \models \varphi \text{ e } \langle \mathbf{U}_H, v_H \rangle [s] \not\models \psi)$$

$$\langle \mathbf{U}_H, v_H \rangle [s] \models \forall x \varphi \quad \text{se per ogni } c \in \text{Cost}(L_{PO}) \text{ si ha } \langle \mathbf{U}_H, v_H \rangle [s](x:c) \models \varphi$$

Clausole di Horn e modelli di Herbrand

- **Teorema di Herbrand (in forma generale)**

Data una teoria di enunciati universali Σ ,
 $H(\Sigma)$ ha un modello sse Σ ha un modello

- **Corollario (forma a clausole di Horn)**

Sia Γ un insieme di clausole di Horn, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- Γ è soddisfacibile
- Γ ha un modello di Herbrand
(Notare: si afferma che Γ ha un modello di Herbrand, non $H(\Gamma)$)

Non vale in generale: solo se Γ è un insieme clausole di Horn

In questa forma (finita), è quasi una procedura effettiva ...

Clausole di Horn e modelli di Herbrand

Sia Γ un insieme di clausole di Horn

▪ **Modello minimo** di Herbrand

Il modello minimo M_Γ è l'intersezione di tutti i modelli di Herbrand M_i di Γ :

$$M_\Gamma \equiv \bigcap_{M_i} M_i$$

▪ **Teorema** (van Emden e Kowalski, 1976)

Sia Γ un insieme di clausole di Horn e φ una clausola di Horn, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- $\Gamma \models \varphi$
- $\varphi \in M_\Gamma$
- L'unione di tutte le clausole φ che sono conseguenza logica di Γ coincide con M_Γ

Risoluzione e modello minimo

- Teorema (Apt e van Emden, 1982)

Sia Π un **programma** (= un insieme di regole e fatti, come clausole di Horn).

Applicata a Π , la procedura di risoluzione genera il modello minimo M_{Π}

La procedura termina se M_{Π} è finito (raggiungimento del *punto fisso*)