

Risoluzione e clausole di Horn

Marco Piastra

Sistemi deduttivi e automazione

■ Il problema $\Gamma \vdash \varphi$ è decidibile?

La definizione di derivabilità 'a la Hilbert' (derivazione da schemi di assioma) non è direttamente traducibile in una procedura effettiva

Perché:

Volendo costruire una dimostrazione di $\Gamma \vdash \varphi$

Possiamo inserire una ad una le fbf $\psi \in \Gamma$ (OK)

Possiamo applicare la regola MP non appena possibile (OK)

NON possiamo inserire tutte le istanze degli assiomi Ax_n (KO)

A rigor di teoria, tali istanze sono infinite

Morale: il problema sono gli assiomi, infiniti

Regola di risoluzione

- Una nuova regola di inferenza (calcolo simbolico)

$$\varphi \vee \chi, \neg\chi \vee \psi \vdash \varphi \vee \psi$$

La fbf $\varphi \vee \psi$ viene anche detta *risolvente* di $\varphi \vee \chi$ e $\neg\chi \vee \psi$

La regola di risoluzione è corretta

φ	ψ	χ	$\varphi \vee \chi$	$\neg\chi \vee \psi$	$\varphi \vee \psi$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

La regola del *modus ponens* è un caso particolare di *risoluzione*

$$\chi \rightarrow \psi, \chi \vdash \psi \text{ può essere riscritta come } \chi, \neg\chi \vee \psi \vdash \psi$$

Forme normali

- **Forma normale**

Traduzione di una fbf qualsiasi in una fbf logicamente equivalente

(Due fbf sono logicamente equivalenti quando sono soddisfatte dalle stesse interpretazioni)

$$\varphi \equiv \psi$$

Le fbf in forma normale, in generale, hanno una struttura particolare

- **Forma normale congiuntiva (FNC)**

Una fbf in cui \wedge appare solo al livello più esterno

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n$$

dove α_i sono fbf in cui compaiono solo \vee e \neg
(\neg compare solo davanti ai simboli proposizionali)

Esempi:

$$(B \vee D) \wedge (A \vee \neg C) \wedge C$$
$$(B \vee \neg A \vee \neg C) \wedge (\neg D \vee \neg A \vee \neg C)$$

- **Forma normale disgiuntiva (FND)**

Come la precedente, ma si scambiano i ruoli di \vee e \wedge :

$$\beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_n$$

dove β_i sono fbf in cui compaiono solo \wedge e \neg
(\neg compare solo davanti ai simboli proposizionali)

Forma normale congiuntiva

■ Traduzione automatica in FNC

Applicazione esaustiva delle seguenti regole:

1) Si eliminano \rightarrow e \leftrightarrow in base alle regole di riscrittura

2) Si muove \neg all'interno

con le "leggi De Morgan":

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

3) Si eliminano le doppie negazioni \neg

4) Si distribuisce \vee

proprietà distributiva di \vee :

$$((\varphi \wedge \psi) \vee \chi) \equiv ((\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi))$$

Esempi:

$$(\neg B \rightarrow D) \vee \neg(A \wedge C)$$

$$B \vee D \vee \neg(A \wedge C)$$

$$B \vee D \vee \neg A \vee \neg C$$

(eliminazione di \rightarrow)

(De Morgan)

$$\neg(B \rightarrow D) \vee \neg(A \wedge C)$$

$$\neg(\neg B \vee D) \vee \neg(A \wedge C)$$

$$(B \wedge \neg D) \vee (\neg A \vee \neg C)$$

(eliminazione di \rightarrow)

(De Morgan)

$$(B \vee \neg A \vee \neg C) \wedge (\neg D \vee \neg A \vee \neg C)$$

(distribuzione di \vee)

Forma a clausole

■ Traduzione in **forma a clausole** (FC)

Data una fbf in FNC, si 'eliminano' i connettivi \wedge e \vee

- 1) La fbf in FNC $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n$
viene riscritta come l'insieme di fbf $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$
- 2) Ciascuna fbf α_i in forma $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \dots \vee \gamma_m$
viene riscritta come $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$
dove ciascun γ_i è un **letterale**: una fbf atomica in forma positiva o negativa
- 3) Si eliminano le clausole doppie ed i letterali doppi in ciascuna clausola

Esempio:

$B \vee D \vee \neg A \vee \neg C$ (FNC e FC)

$(\neg B \vee \neg A \vee \neg C) \wedge (\neg D \vee \neg A \vee \neg C)$ (FNC)

$\{(\neg B \vee \neg A \vee \neg C), (\neg D \vee \neg A \vee \neg C)\}$ (FC)

Notazione:

Le clausole si scrivono come insiemi di insiemi di letterali

$\{\{\neg B, \neg A, \neg C\}, \{\neg D, \neg A, \neg C\}\}$

Risoluzione: ipotesi di metodo

- Il problema visto in precedenza ("Giorgio è contento")

$$B \vee D \vee \neg(A \wedge C), B \vee C, A \vee D, \neg B \vdash D$$

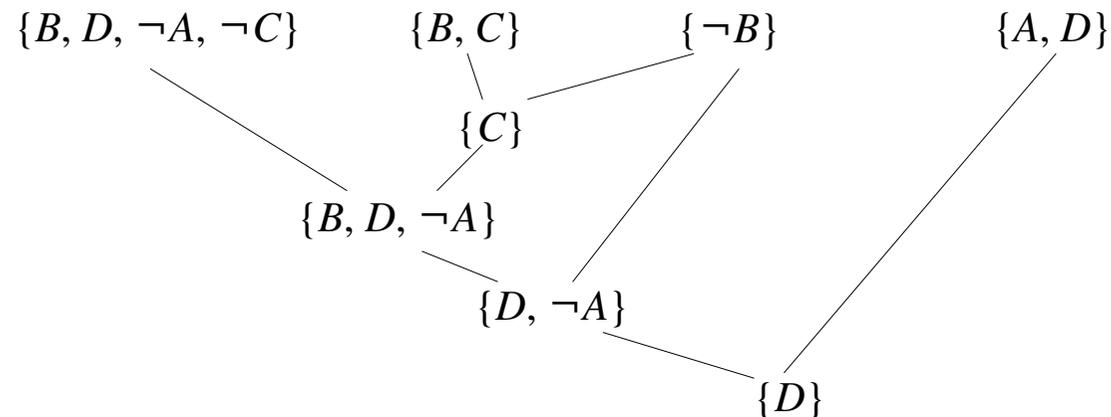
Riscrivendo le formule dell'ipotesi in FNC:

$$B \vee D \vee \neg A \vee \neg C, B \vee C, A \vee D, \neg B$$

In FC:

$$\{B, D, \neg A, \neg C\}, \{B, C\}, \{A, D\}, \{\neg B\}$$

Applicando la regola di risoluzione:



Risoluzione: ipotesi di metodo

- Il problema visto in precedenza ("Giorgio è contento")

$$B \vee D \vee \neg(A \wedge C), B \vee C, A \vee D, \neg B \vdash D$$

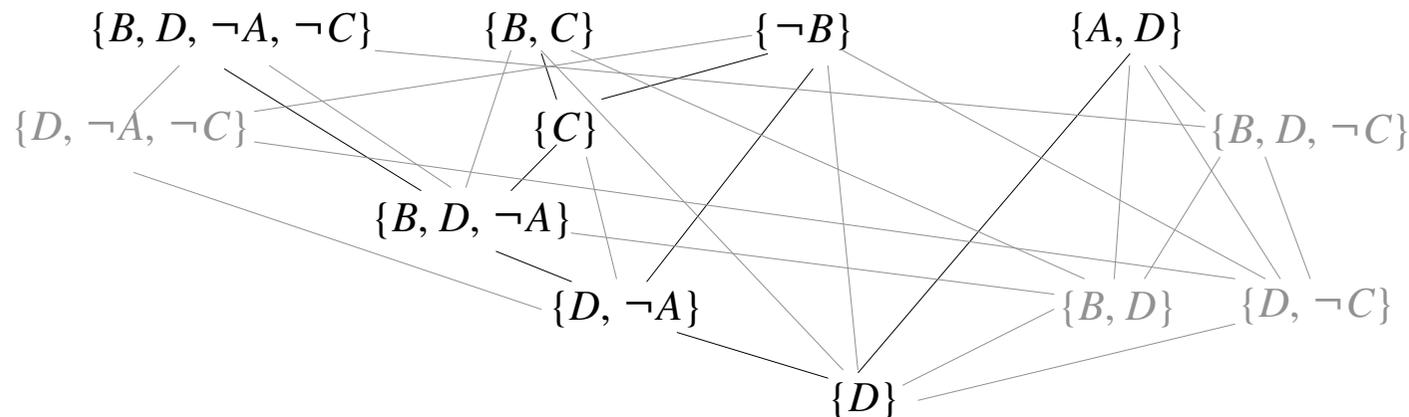
Riscrivendo le formule dell'ipotesi in FNC:

$$B \vee D \vee \neg A \vee \neg C, B \vee C, A \vee D, \neg B$$

In FC:

$$\{B, D, \neg A, \neg C\}, \{B, C\}, \{A, D\}, \{\neg B\}$$

Applicando *esaustivamente* la regola di risoluzione:



Ciascuna risoluzione viene effettuata una volta sola

Risoluzione: ipotesi di metodo

■ Purtroppo

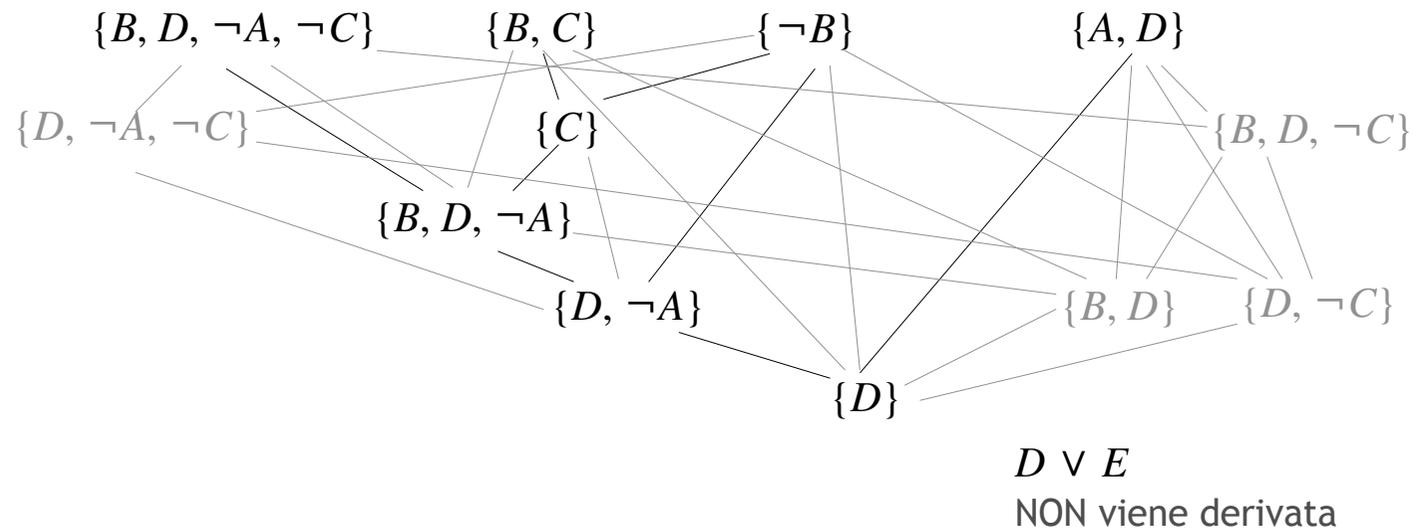
Il metodo **non è completo!**

Controesempio:

$$B \vee D \vee \neg A \vee \neg C, B \vee C, A \vee D, \neg B \vdash D \vee E$$

Identico al caso precedente, con $D \vee E$ al posto di D , ma la derivazione fallisce

L'applicazione della regola di risoluzione è identica al caso precedente:



Risoluzione per refutazione

■ Algoritmo

Decisione del problema: $\Gamma \vdash \varphi$?

Si trasforma il problema in $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$

Se $\Gamma \vdash \varphi$, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ è incoerente, quindi è possibile derivare una contraddizione

Si traduce $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ in FNC e quindi in FC

Si applica iterativamente la regola di risoluzione ad un coppia di clausole risolvendo un **letterale** complementare

Ciascuna possibile risoluzione viene effettuata una volta soltanto

Terminazione:

L'algoritmo termina con successo quando viene derivata una **clausola vuota** { }

Diversamente, l'algoritmo termina quando la regola non è più applicabile (fallimento)

Vantaggi:

Niente assiomi

Una sola operazione (applicazione della regola di risoluzione)

Procedura effettiva (algoritmo)

Derivazioni: risoluzione per refutazione

■ Il contro-esempio visto in precedenza

$$B \vee D \vee \neg A \vee \neg C, B \vee C, A \vee D, \neg B \vdash D \vee E$$

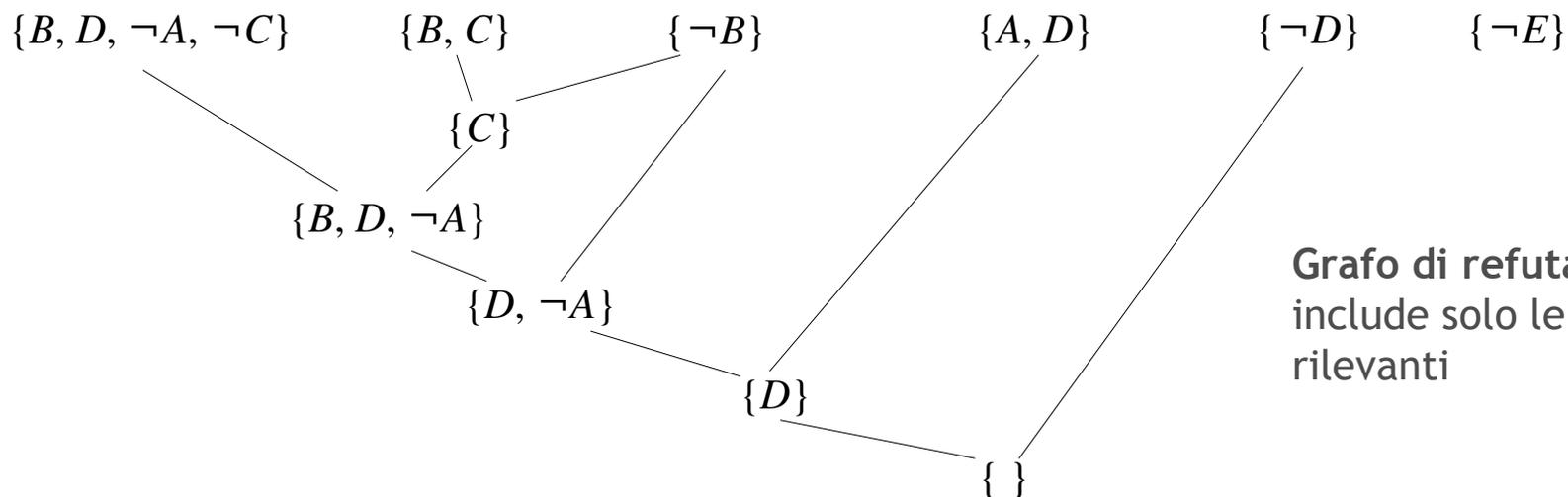
Refutando la tesi e riscrivendo il tutto in FNC:

$$B \vee D \vee \neg A \vee \neg C, B \vee C, A \vee D, \neg B, \neg D, \neg E$$

In FC:

$$\{B, D, \neg A, \neg C\}, \{B, C\}, \{A, D\}, \{\neg B\}, \{\neg D\}, \{\neg E\}$$

Applicando la regola di risoluzione:



Grafo di refutazione:
include solo le risoluzioni
rilevanti

Risoluzione per refutazione

- Il metodo della risoluzione per refutazione in L_P

E' corretto: $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$

E' completo: $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$

Si intende: se $\Gamma \models \varphi$ allora esiste un grafo di refutazione

- Algoritmo di risoluzione per refutazione in L_P

E' una procedura di decisione per $\Gamma \vdash \varphi$

Se esiste un grafo di refutazione, l'algoritmo lo trova

Ha complessità di tempo $O(2^n)$

Dove n è il numero dei simboli proposizionali che compaiono in $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$

Minore potenza espressiva,
maggiore efficienza di calcolo:
clausole di Horn

Clausole di Horn

- Definizione

Una **clausola di Horn** è una fbf in FC
in cui si ha al massimo un letterale in forma positiva

- Tre tipi di clausole di Horn:

Regole: più letterali, uno solo positivo

Esempi: $\{B, \neg D, \neg A, \neg C\}$, $\{A, \neg B\}$ (traduzione: $(D \wedge A \wedge C) \rightarrow B, B \rightarrow A$)

Fatti: un solo letterale, positivo

Esempi: $\{B\}$, $\{A\}$

Goal: uno o più letterali, tutti negativi

Esempi: $\{\neg B\}$, $\{\neg A, \neg B\}$ (refutazione di: $B, A \wedge B$)

Ulteriore terminologia

Regole e fatti si dicono anche clausole definite (*definite clauses*)

I goal si dicono anche clausole negative (*negative clauses*)

Traduzione in clausole di Horn

Molte fbf sono traducibili in clausole di Horn:

$$(A \wedge B) \rightarrow C$$

$$\neg(A \wedge B) \vee C$$

$$\neg A \vee \neg B \vee C$$

(eliminazione di \rightarrow)

(De Morgan - FC - è una regola)

$$A \rightarrow (B \wedge C)$$

$$\neg A \vee (B \wedge C)$$

$$(\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)$$

$$(\neg A \vee B), (\neg A \vee C)$$

(eliminazione di \rightarrow)

(distribuzione di \vee)

(FC – si generano due regole)

$$(A \vee B) \rightarrow C$$

$$\neg(A \vee B) \vee C$$

$$(\neg A \wedge \neg B) \vee C$$

$$(\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$$

$$(\neg A \vee C), (\neg B \vee C)$$

(eliminazione di \rightarrow)

(De Morgan)

(distribuzione di \vee)

(FC – si generano due regole)

Ma non tutte:

$$(A \wedge \neg B) \rightarrow C$$

$$\neg(A \wedge \neg B) \vee C$$

$$\neg A \vee B \vee C$$

(eliminazione di \rightarrow)

(De Morgan)

$$A \rightarrow (B \vee C)$$

$$\neg A \vee B \vee C$$

(eliminazione di \rightarrow)

Risoluzione SLD

Linear resolution with Selection function for Definite clauses

Metodo particolare di risoluzione per refutazione per le clausole di Horn

■ Algoritmo

Si applica ad un set di *clausole definite (programma)* + un *goal*

1) La funzione di selezione (*selection function*) identifica un *letterale (subgoal)*

2) Si seleziona una *clausola definita* applicabile al *subgoal* selezionato

3) Si applica la regola di risoluzione, sostituendo al *subgoal* risolto i *subgoal* risolvienti della *clausola definita* applicata

Terminazione:

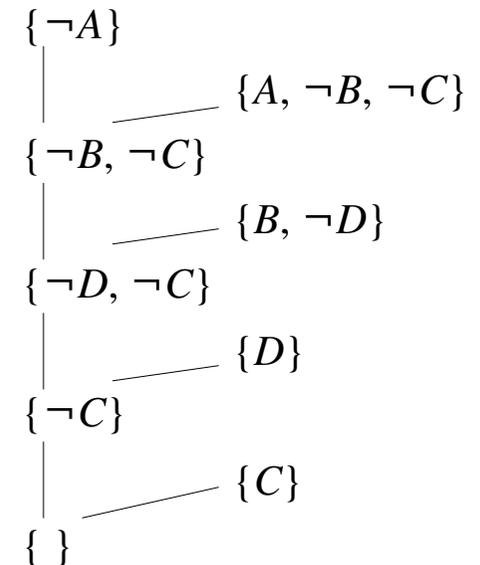
si procede finché si ottiene $\{ \}$ oppure il passo 2) fallisce.

Esempio:

Selection function: leftmost subgoal first

Clausole definite: $\{C\}$, $\{D\}$, $\{B, \neg D\}$, $\{A, \neg B, \neg C\}$

Goal: $\{\neg A\}$

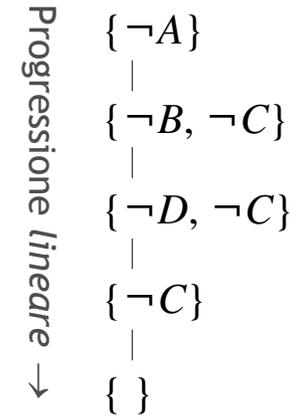


Alberi SLD

Derivazioni SLD

Esempio: $\{C\}, \{D\}, \{B, \neg D\}, \{A, \neg B, \neg C\}$ goal $\{\neg A\}$

In questo caso, c'è al massimo un modo per risolvere ciascun *subgoal*
In generale non è così



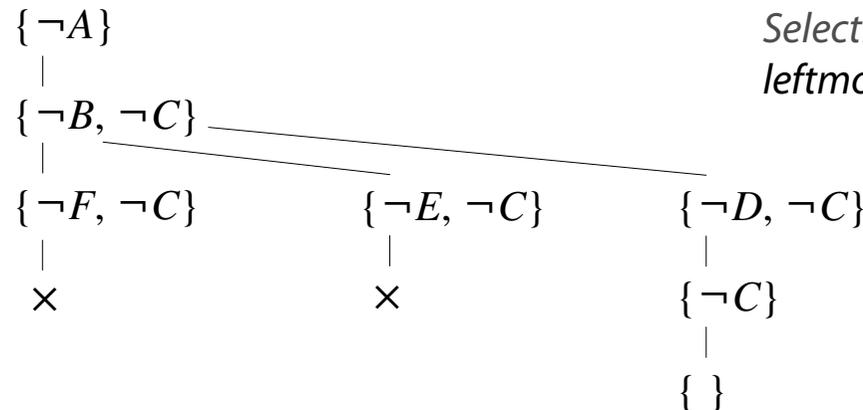
- Alberi SLD (= tutte le possibili derivazioni SLD a partire da un goal)

Una diramazione per ciascun modo di risolvere un *subgoal*

Esempio: $\{C\}, \{D\}, \{B, \neg F\}, \{B, \neg E\}, \{B, \neg D\}, \{A, \neg B, \neg C\}$ goal $\{\neg A\}$

Sono state aggiunte nuove regole: esistono ora diverse possibilità

Albero SLD



Selection function:
leftmost subgoal first

Metodo della risoluzione SLD

- Il metodo della risoluzione SLD in L_P

Si applica solo alle clausole di Horn (clausole definite + *goal*)

E' corretto: $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$

Termina sempre

E' completo: $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$

- Complessità computazionale:

Ha complessità polinomiale (rispetto al numero di lettere ed alla dimensione delle fbf)

Rispetto ai metodi generali, limitandosi alle clausole di Horn
si ottiene un'efficienza molto elevata

- Limitazioni

Non tutti i problemi sono traducibili in clausole di Horn

“Giorgio è contento” non lo è

Solo combinazioni di regole e fatti (con fatti – negati – come goal)

Forward Chaining

■ Risoluzione senza refutazione per le clausole di Horn

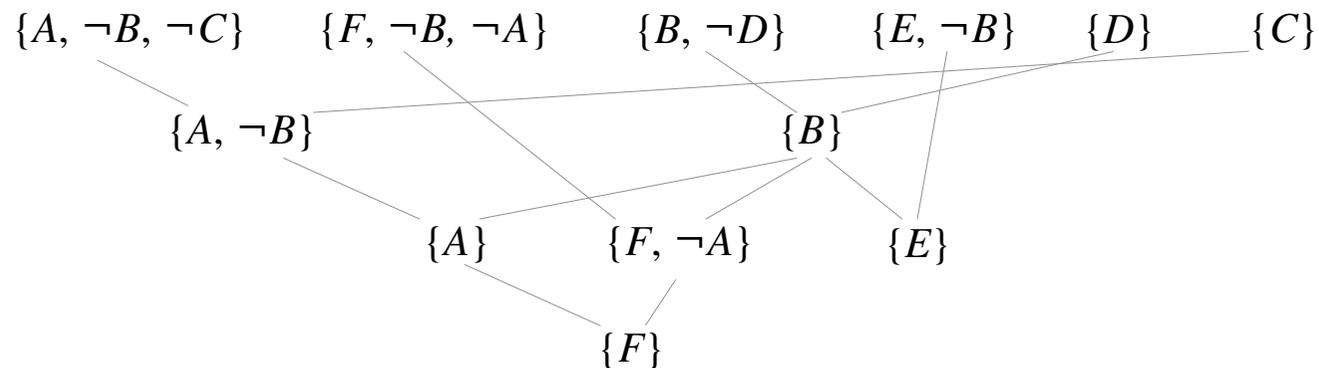
Esempio (clausole di Horn):

$\{C\}, \{D\}, \{E, \neg B\}, \{B, \neg D\}, \{F, \neg B, \neg A\}, \{A, \neg B, \neg C\} \vdash \{A\}$

(Può essere riscritto come: $C, D, B \rightarrow E, D \rightarrow B, (B \wedge A) \rightarrow F, (B \wedge C) \rightarrow A \vdash A$)

Si applica *esaustivamente* la regola di risoluzione,

CON UN VINCOLO: risoluzione solo tra regole e fatti



La risposta è positiva: $\Gamma \vdash \{A\}$. Ma si ottiene anche $\Gamma \vdash \{B\}, \Gamma \vdash \{E\}, \Gamma \vdash \{F\}$

L'insieme $\{\{A\}, \{B\}, \{E\}, \{F\}\}$ contiene tutti i *fatti* derivabili da Γ

Si può dimostrare che il metodo è completo (nel senso di cui sopra)

Forward Chaining

■ Risoluzione senza refutazione per le clausole di Horn

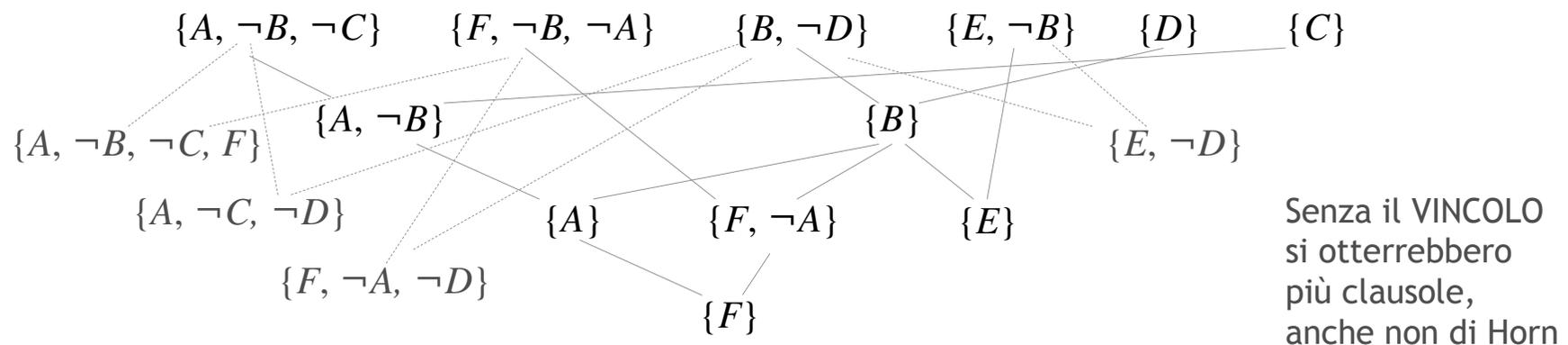
Esempio (clausole di Horn):

$$\{C\}, \{D\}, \{E, \neg B\}, \{B, \neg D\}, \{F, \neg B, \neg A\}, \{A, \neg B, \neg C\} \vdash \{A\}$$

(Può essere riscritto come: $C, D, B \rightarrow E, D \rightarrow B, (B \wedge A) \rightarrow F, (B \wedge C) \rightarrow A \vdash A$)

Si applica *esautivamente* la regola di risoluzione,

CON UN VINCOLO: risoluzione solo tra regole e fatti



La risposta è positiva: $\Gamma \vdash \{A\}$. Ma si ottiene anche $\Gamma \vdash \{B\}, \Gamma \vdash \{E\}, \Gamma \vdash \{F\}$

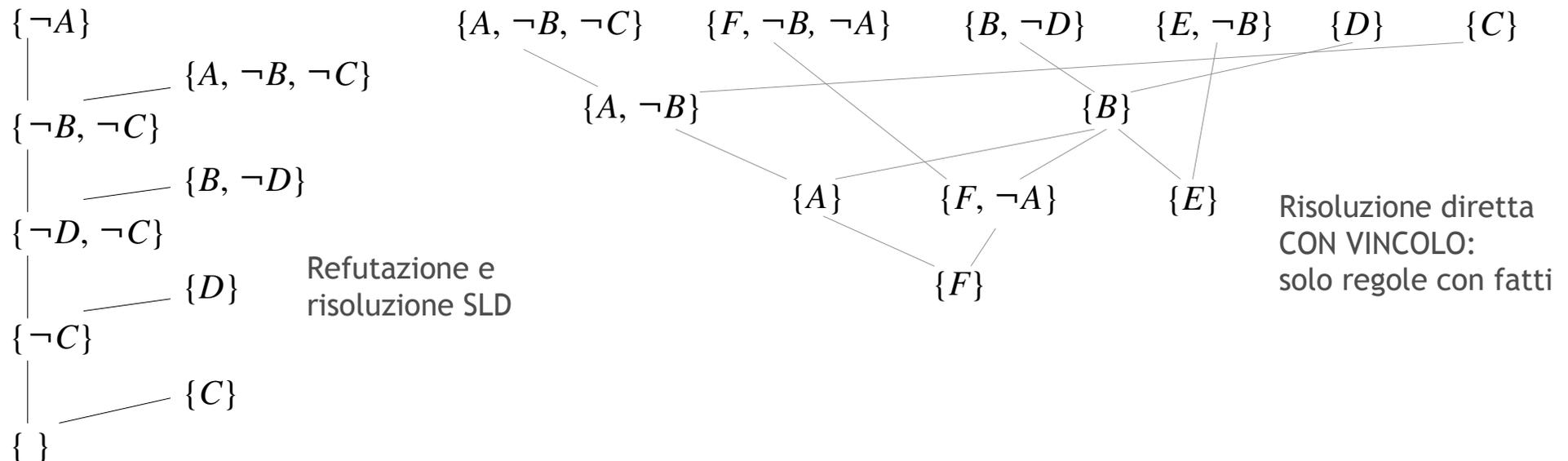
L'insieme $\{\{A\}, \{B\}, \{E\}, \{F\}\}$ contiene tutti i *fatti* derivabili da Γ

Si può dimostrare che il metodo è completo (nel senso di cui sopra)

Forward & Backward

■ Confronto tra risoluzione con e senza refutazione

Esempio (come prima): $\{C\}, \{D\}, \{E, \neg B\}, \{B, \neg D\}, \{F, \neg B, \neg A\}, \{A, \neg B, \neg C\} \vdash \{A\}$



La risoluzione con refutazione agisce all'indietro (*backward*): si parte dal goal e si cerca $\{ \}$

Risponde esclusivamente alla domanda: $\Gamma \vdash \{A\}$?

La risoluzione diretta agisce in avanti (*forward*): si concatenano regole e fatti

Trova tutti i fatti derivabili: $\{\varphi \mid \Gamma \vdash \{\varphi\}\}$, dove φ è un simbolo proposizionale