Intelligenza Artificiale I

Logica formale

Calcolo simbolico

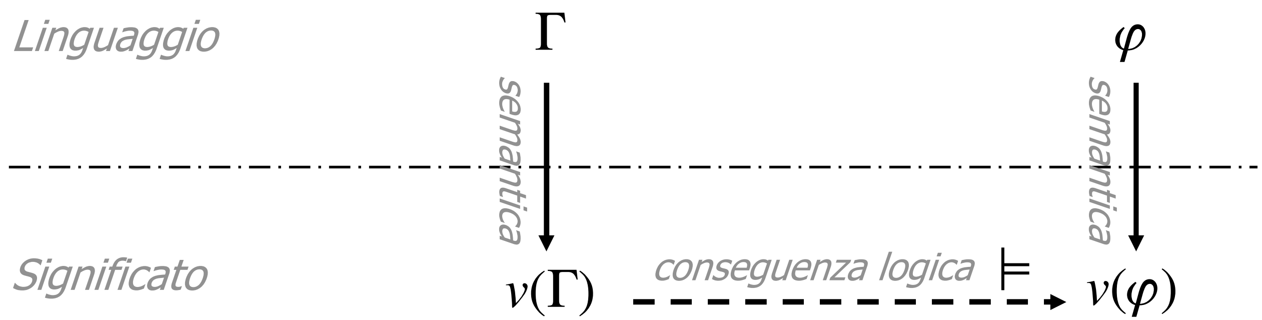
Marco Piastra

Calcolo simbolico?

- Una fbf φ è **conseguenza logica** di un insieme di fbf Γ sse qualsiasi *modello* di Γ è anche *modello* di φ

    Si scrive anche:

    $\Gamma \models \varphi$

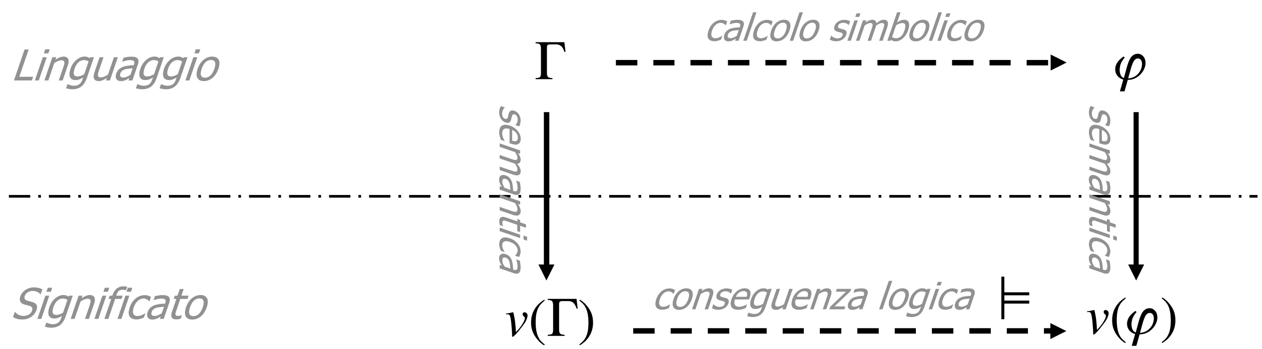


Calcolo simbolico?

- Una fbf φ è **conseguenza logica** di un insieme di fbf Γ sse qualsiasi *modello* di Γ è anche *modello* di φ

  Si scrive anche:

  $\Gamma \models \varphi$



  Si noti che la definizione fa riferimento a tutti i possibili significati (modelli)

- Si può stabilire l'esistenza della conseguenza logica operando sul linguaggio?

  P.es. applicando *schemi* di ragionamento

Schemi e conseguenza logica

- Esempio: "La macchina non parte"

C =	"La batteria è carica"
L =	"Le luci si accendono"
A =	"L'autoradio funziona"
M =	"Il motorino d'avviamento gira"
G =	"Il motorino d'avviamento è guasto"
P =	"Il motore parte"

Regole:

ρ_1 :	$\neg C \rightarrow (\neg L \wedge \neg A \wedge \neg M)$
ρ_2 :	$G \rightarrow \neg M$
ρ_3 :	$\neg M \rightarrow \neg P$

Ragionamento per schemi:

Utilizzando il fatto che $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \models \psi$

Dalla premessa $\neg C$ applicando ρ_1 si ottiene: $\neg L \wedge \neg A \wedge \neg M$

Il che vuol dire: $\{\neg C, \rho_1\} \models \neg L \wedge \neg A \wedge \neg M$

Dalla premessa G applicando ρ_2 si ottiene: $\neg M$
quindi, applicando ancora ρ_3 si ottiene: $\neg P$

Il che vuol dire: $\{G, \rho_2, \rho_1\} \models \neg P$

Metodo assiomatico (a la Hilbert, 1899)

- Elementi

  $< L_P , \boldsymbol{Ax} , \boldsymbol{Inf} >$

  L_P è un linguaggio proposizionale (definito come in precedenza)

  $\boldsymbol{Ax}$ è un'insieme di fbf di partenza, dette *assiomi*

  $\boldsymbol{Inf}$ è un'insieme di regole di trascrizione con modifica (schemi)

  Applicando una regola di inferenza ad una o più fbf, si deriva (aggiunge) una nuova fbf

- Metodo

  Dato un insieme di fbf $\Gamma = \{\varphi_1, \dots \varphi_n\}$ assunte come **ipotesi**,
  si cerca di derivare ψ una fbf che costituisce la **tesi** di interesse

  Si parte da $\Gamma \cup \boldsymbol{Ax}$

  Si applicano le regole di inferenza per cercare di ottenere ψ

  Tenere a mente: lo scopo è stabilire se $\Gamma \models \psi$

  Ma senza fare ricorso alla semantica, operando solo sulle fbf

Regole di inferenza *Inf*

Si rammenti lo schema $\varphi \to \psi, \varphi \models \psi$, di validità generale

- In una logica formale, il calcolo (simbolico) si basa regole di **derivazione** (o di **inferenza**) che operano sulle fbf

  Vale a dire sul linguaggio, non sui valori di verità

- Per L_P basta una sola regola di derivazione

  Modus Ponens (MP):

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi \to \psi \\ \varphi\end{array}}{\psi}$$

Si scrive anche così:

$\varphi \to \psi, \varphi \vdash \psi$ (da $\varphi \to \psi$ e φ è *derivabile* ψ – attenti alla notazione!)

Ogni fbf derivata tramite MP da due tautologie è una tautologia

Provare per credere

I punti di partenza: gli assiomi *Ax*

Gli assiomi (di una logica) sono fbf che ne riassumono le caratteristiche

Descrivono (in forma compatta) gli *schemi di ragionamento*

- *Schemi d'assioma* per L_P (Lukasiewicz, 1917):

Ax1	$\varphi \to (\psi \to \varphi)$
Ax2	$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
Ax3	$(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

Ogni sostituzione delle variabili φ, ψ e χ con una fbf è un assioma

Le fbf così ottenute si dicono anche istanziaioni degli schemi di assioma

Esempi di fbf ottenute per sostituzione:

$A \to (\neg A \to A)$ [Ax1: $\varphi/A,\ \psi/\neg A$]

$(\neg(B \lor C) \to \neg D) \to (D \to (B \lor C))$ [Ax3: $\varphi/(B \lor C),\ \psi/D$]

Gli schemi di assioma sono *tautologie*, così come ogni singola sostituzione

Provare per credere

Teoremi: applicazione delle regole *Inf*

Dato un'insieme di fbf Γ, sono **teoremi** di Γ tutte le fbf φ che si possono ottenere applicando le regole di inferenza $\boldsymbol{Inf}$ a $\boldsymbol{Ax} \cup \Gamma$

(Γ può anche essere vuoto)

La definizione ha valore generale, si applica a qualsiasi logica assiomatizzata

L'insieme dei *teoremi* di Γ si indica anche come $Teoremi(\Gamma)$

Nel caso di L_P

- $\boldsymbol{Ax}$ è l'insieme di tutti gli assiomi ottenuti per istanziazione di Ax_1, Ax_2, Ax_3
- $\boldsymbol{Inf}$ include solo la regola del Modus Ponens (MP)

Qualsiasi *teorema* di Γ è anche una *conseguenza logica* di Γ

$$\varphi \in Teoremi(\Gamma) \Rightarrow \Gamma \models \varphi$$

Perchè? (semplice esercizio per il lettore ...)

Derivazioni (o *dimostrazioni*) di teoremi

- Una *dimostrazione* (o *derivazione*) di una fbf φ da un insieme di fbf Γ

  E` una successione *finita* di passi $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$

  Ciascun passo ϕ_i può essere di tre tipi:

  1) Si ricava una fbf per sostituzione da uno degli assiomi Ax_n
  2) Si importa una fbf presente nelle ipotesi Γ
  3) Si ottiene una nuova fbf dalle fbf ai passi precedenti, tramite *Modus Ponens*

  Nel passo finale, si ottiene la formula da dimostrare: $\phi_n = \varphi$

  In generale, si scrive allora $\Gamma \vdash \varphi$ "φ è derivabile da Γ"

  La dimostrazione non è necessariamente unica (anzi)

  Proprietà notevoli:

  $\vdash \mathrm{Ax}n$ (un assioma, o sostituzione, è derivabile anche da un Γ vuoto)

  $\Gamma \vdash \mathrm{Ax}n$ (un assioma, o sostituzione, è derivabile da qualsiasi Γ)

  $\{\varphi, ..\} \vdash \varphi$ (qualsiasi φ è derivabile da un Γ che già la contiene)

Derivazioni, esempio pratico

- Il problema visto in precedenza ("Giorgio è contento")

  $B \vee D \vee \neg(A \wedge C),\ B \vee C,\ A \vee D,\ \neg B \vdash D$

  Riscrivendo il problema usando solo $\neg$ e $\rightarrow$

  $C \rightarrow (\neg B \rightarrow (A \rightarrow D)),\ \neg B \rightarrow C,\ \neg A \rightarrow D,\ \neg B \vdash D$

  Per comodità

  $\Gamma \vdash D$

1:	$\Gamma \vdash \neg B \rightarrow C$	
2:	$\Gamma \vdash \neg B$	
3:	$\Gamma \vdash C$	(*MP* 1,2)
4:	$\Gamma \vdash C \rightarrow (\neg B \rightarrow (A \rightarrow D))$	
5:	$\Gamma \vdash \neg B \rightarrow (A \rightarrow D)$	(*MP* 3,4)
6:	$\Gamma \vdash A \rightarrow D$	(*MP* 2,5)
7:	$\Gamma \vdash \neg A \rightarrow D$	
8*:	$\Gamma \vdash (\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$	(***Se fosse un assioma, ma non lo è***)
9:	$\Gamma \vdash (\neg A \rightarrow D) \rightarrow ((A \rightarrow D) \rightarrow D)$	(*Sost*)
10:	$\Gamma \vdash (A \rightarrow D) \rightarrow D$	(*MP* 7,9)
11:	$\Gamma \vdash D$	(*MP* 6,10)

Derivazioni: Teorema 0

- Qualsiasi fbf implica se stessa

$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$

1:	$\vdash (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$	(Ax2)
2:	$\vdash (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi))$	(Ax1)
3:	$\vdash (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$	(*MP* 1,2)
4:	$\vdash (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$	(Ax1)
5:	$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$	(*MP* 3,4)

(meta)-Teorema di deduzione

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi \to \psi$$

- Da sinistra a destra:

  $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash \varphi \to \psi$

  Sia $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n\text{-}1}, \psi$ una derivazione di ψ da $\Gamma \cup \{\varphi\}$

  Per α_1 sono dati due casi:

  1) $\alpha_1 \in \Gamma$ oppure α_1 è un assioma
     Usando $\mathrm{Ax1}$, $\Gamma \vdash \alpha_1 \to (\varphi \to \alpha_1)$ ma anche $\Gamma \vdash \alpha_1$ e quindi $\Gamma \vdash \varphi \to \alpha_1$
  2) $\alpha_1 = \varphi$
     Per il Teorema 0, $\vdash \varphi \to \varphi$ e quindi $\Gamma \vdash \varphi \to \alpha_1$

  Per α_n, assumendo che la tesi valga per $\alpha_{n\text{-}1}$, sono dati tre casi:

  1) $\alpha_j \in \Gamma$ oppure α_j è un assioma
     Vedi il caso 1) di α_1
  2) $\alpha_j = \varphi$
     Vedi il caso 2) di α_1
  3) α_j è ottenuto per MP da due passi precedenti α_i e $\alpha_i \to \alpha_j$
     Se la tesi vale fino a n-1, allora si ha $\Gamma \vdash \varphi \to \alpha_i$ e $\Gamma \vdash \varphi \to (\alpha_i \to \alpha_j)$
     Usando $\mathrm{Ax2}$, $\vdash (\varphi \to (\alpha_i \to \alpha_j)) \to ((\varphi \to \alpha_i) \to (\varphi \to \alpha_j))$
     ed applicando due volte il MP si ottiene $\Gamma \vdash \varphi \to \alpha_j$

(meta)-Teorema di deduzione

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

- Da destra a sinistra:

$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \;\Rightarrow\; \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$

Sia $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n\text{-}1}, \varphi \rightarrow \psi$ una derivazione di $\varphi \rightarrow \psi$ da Γ

La stessa derivazione di $\varphi \rightarrow \psi$ mostra che $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$

Dato che $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$, applicando il MP si ottiene $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$

Derivazioni: Teorema 1

- L'ordine delle ipotesi non è rilevante

$$\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$$

1: $(\varphi \to (\psi \to \chi)), \psi, \varphi \vdash (\varphi \to (\psi \to \chi))$
2: $(\varphi \to (\psi \to \chi)), \psi, \varphi \vdash \varphi$
3: $(\varphi \to (\psi \to \chi)), \psi, \varphi \vdash \psi \to \chi$ (*MP* 1,2)
4: $(\varphi \to (\psi \to \chi)), \psi, \varphi \vdash \psi$
5: $(\varphi \to (\psi \to \chi)), \psi, \varphi \vdash \chi$ (*MP* 3,4)
6: $(\varphi \to (\psi \to \chi)), \psi \vdash \varphi \to \chi$ (*Ded*)
7: $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \vdash \psi \to (\varphi \to \chi)$ (*Ded*)
8: $\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$ (*Ded*)

Derivazioni: Teorema 2

- Doppia negazione implica affermazione

$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$

1:	$\vdash \neg\neg\varphi \to (\neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi)$	(Ax1)
2:	$\neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi$	(*Ded*)
3:	$\neg\neg\varphi \vdash (\neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi)$	(Ax3)
4:	$\neg\neg\varphi \vdash \neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi$	(*MP* 3,2)
5:	$\neg\neg\varphi \vdash (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \varphi)$	(Ax3)
6:	$\neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	(*MP* 5,4)
7:	$\neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi$	
8:	$\neg\neg\varphi \vdash \varphi$	(*MP* 6,7)
9:	$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	(*Ded*)

Derivazioni: Teorema 3

- Una regola è falsa se la premessa è vera e la conseguenza non lo è

$$\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$$

1:	$\varphi, (\varphi \to \psi) \vdash \psi$	(Regola *MP*)
2:	$\varphi \vdash (\varphi \to \psi) \to \psi$	(*Ded*)
3:	$\varphi \vdash ((\varphi \to \psi) \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$	(Ax3)
4:	$\varphi \vdash \neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi)$	(*MP* 3,2)
5:	$\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$	(*Ded*)

Derivazioni: Teorema 4

- Da un assurdo si deriva qualsiasi cosa (*"Ex absurdo sequitur quodlibet"*):

  $\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$ (vale a dire $\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$)

1:	$\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	(Ax1)
2:	$\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi$	
3:	$\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$	(*MP* 1,2)
4:	$\varphi, \neg\varphi \vdash (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$	(Ax3)
5:	$\varphi, \neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$	(*MP* 4,3)
6:	$\varphi, \neg\varphi \vdash \varphi$	
7:	$\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$	(*MP* 5,6)
8:	$\varphi \vdash \neg\varphi \to \psi$	(*Ded*)
9:	$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$	(*Ded*)

Un insieme di premesse contraddittorio si dice *incoerente* (o *inconsistente*)

Da un simile insieme di premesse è possibile derivare qualsiasi cosa:
anche una fbf come: $\psi \wedge \neg\psi$

Derivazioni: Teorema 5

- Se la falsità implica una contraddizione, allora dev'esser vero:

$$\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$$

1:	$\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi$	
2:	$\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi \to \varphi$	
3:	$\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi \vdash \varphi$	(*MP* 1,2)
4:	$\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi \vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi))$	(Teorema 4)
5:	$\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi)$	(*MP* 3,4)
6:	$\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi \vdash \neg(\neg\varphi \to \varphi)$	(*MP* 1,5)
7:	$\neg\varphi \to \varphi \vdash \neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi)$	(*Ded*)
8:	$\neg\varphi \to \varphi \vdash (\neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi)) \to ((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi)$	(Ax3)
9:	$\neg\varphi \to \varphi \vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$	(*MP* 7,8)
10:	$\neg\varphi \to \varphi \vdash \neg\varphi \to \varphi$	
11:	$\neg\varphi \to \varphi \vdash \varphi$	(*MP* 7,8)
12:	$\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$	(*Ded*)

Derivazioni: Teorema "X"

- Regola di risoluzione (il risultato cercato per il primo esempio):

$\vdash (\neg\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \psi) \to \psi)$

1:	$(\neg\varphi \to \psi), (\varphi \to \psi) \vdash (\neg\varphi \to \psi)$	
2:	$(\neg\varphi \to \psi), (\varphi \to \psi) \vdash (\neg\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \varphi)$	(Ax3)
3:	$(\neg\varphi \to \psi), (\varphi \to \psi) \vdash (\neg\psi \to \varphi)$	(*MP* 1,2)
4:	$(\neg\varphi \to \psi), (\varphi \to \psi), \neg\psi \vdash \varphi$	(*Ded*)
5:	$(\neg\varphi \to \psi), (\varphi \to \psi), \neg\psi \vdash \varphi \to \psi$	
6:	$(\neg\varphi \to \psi), (\varphi \to \psi), \neg\psi \vdash \psi$	(*MP* 4,5)
7:	$(\neg\varphi \to \psi), (\varphi \to \psi) \vdash (\neg\psi \to \psi)$	(*Ded*)
8:	$(\neg\varphi \to \psi), (\varphi \to \psi) \vdash ((\neg\psi \to \psi) \to \psi)$	(Teorema 5)
9:	$(\neg\varphi \to \psi), (\varphi \to \psi) \vdash \psi$	(*MP* 7,8)
10:	$(\neg\varphi \to \psi) \vdash ((\varphi \to \psi) \to \psi)$	(*Ded*)
11:	$\vdash (\neg\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \psi) \to \psi)$	(*Ded*)

Proprietà delle derivazioni (*metateoremi*)

- *Monotonia sintattica*

  Dati Γ e Δ, se $\Gamma \vdash \varphi$ allora $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$

  Qualsiasi derivazione di φ da Γ rimane valida anche estendendo Γ

- *Compattezza sintattica*

  Se $\Gamma \vdash \varphi$ allora esiste un insieme Σ **finito**, con $\Sigma \subseteq \Gamma$, per cui $\Sigma \vdash \varphi$

  Una derivazione di φ da Γ prevede un numero *finito* di passi,
  quindi può coinvolgere al più un numero *finito* di fbf in Γ

- *Transitività*

  Se per ogni $\varphi \in \Sigma$ si ha che $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Sigma \vdash \psi$ allora $\Gamma \vdash \psi$

  Basta applicare ripetutamente il teorema di deduzione ed il MP

Teorie, teoremi, assiomatizzazione

- Teoria = insieme di fbf

  Un insieme di fbf Σ (comunque definito) può essere detto una **teoria**

- Teoremi = insieme di fbf derivabili da un insieme di partenza

  Dato un insieme di fbf Γ, l'insieme dei **teoremi** di Γ
  è l'insieme di tutte le fbf *derivabili* a partire da Γ

  $$Teoremi(\Gamma) = \{\varphi : \Gamma \vdash \varphi\}$$

- Assiomatizzazione = insieme di fbf che riassume un'intera teoria

  Un insieme di fbf Γ è un'**assiomatizzazione** di una teoria Σ sse

  $$\Sigma \equiv Teoremi(\Gamma)$$

  Il sistema di assiomi $\mathrm{Ax}n$ descrive la *teoria* delle fbf *valide*
  della **logica proposizionale classica** L_P

  La formalizzazione di una logica basata su l'assiomatizzazione delle fbf valide
  è anche detta 'a la Hilbert'

Proprietà delle derivazioni (2)

- *Correttezza*

  Le fbf φ *derivabili* da un insieme di fbf Γ sono una *conseguenza logica* di Γ

  $$\Gamma \vdash \varphi \;\Rightarrow\; \Gamma \models \varphi$$

- *Coerenza sintattica*

  Un insieme Γ è coerente se da Γ non è derivabile qualsiasi φ

  Si veda il Teorema 3: da una contraddizione si deriva qualsiasi fbf

  Inoltre, per la correttezza, solo le conseguenze logiche sono derivabili

- *Riduzione all'assurdo* *(refutazione)*

  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ è incoerente $\;\Leftrightarrow\; \Gamma \vdash \varphi$

  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ è incoerente significa che, per qualsiasi ψ, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$

  In particolare, si ha anche $\quad \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$

  Per il teorema di deduzione $\quad \Gamma \vdash \neg\varphi \rightarrow \varphi$

  Dal Teorema 5 $\quad \Gamma \vdash (\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$

  Applicando il MP $\quad \Gamma \vdash \varphi$

Completezza

- *Completezza*

  Le *tautologie* (fbf *valide*) sono fbf *derivabili* dagli assiomi Axn

  $$\models \varphi \;\Rightarrow\; \vdash \varphi$$

  Perché:

  Si consideri la tavola di verità di φ e dell'insieme di simboli atomici A_i che vi occorrono

  Per ciascuna riga si costruisca un insieme di fbf $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ dove $B_i = A_i$ se A_i ha valore 1 e $B_i = \neg A_i$ se A_i ha valore 0

  Si prenda inoltre $\psi = \varphi$ se nella riga φ ha valore 1 e $\psi = \neg\varphi$ se φ ha valore 0

  Allora $B_1, B_2, \dots, B_n \vdash \psi$

  Chiaramente, la cosa è vera quando φ è una fbf atomica

  Infatti, se $\psi = \varphi = A_1$ si ha $A_1 \vdash A_1$

  Se invece $\psi = \neg\varphi = \neg A_1$ si ha $\neg A_1 \vdash \neg A_1$

2^n righe

A_1	A_2	...	A_n	φ
0	0	...	0	V_1
0	0	...	1	V_2
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
1	1	...	1	V_{2^n}

Completezza (2)

Per mostrare che $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \psi$ in generale si procede per induzione sulla composizione di φ assumendo che il fatto valga per le componenti più semplici

Primo caso: $\varphi = \neg\alpha$

Quando α ha valore 1, φ ha valore 0. Per l'ipotesi induttiva $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \alpha$
Quindi (variante del Teorema 2), $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$ e dunque
$B_1, B_2, ..., B_n \vdash \neg\neg\alpha$ (MP). Ma $\neg\neg\alpha = \neg\varphi = \psi$

Quando α ha valore 0, φ ha valore 1. Per l'ipotesi induttiva $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \neg\alpha$
Ma $\neg\alpha = \varphi = \psi$

Secondo caso: $\varphi = \alpha \to \beta$

Quando α ha valore 0, φ ha valore 1. Per l'ipotesi induttiva $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \neg\alpha$
Quindi (variante del Teorema 4), $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$ e dunque
$B_1, B_2, ..., B_n \vdash (\alpha \to \beta)$ (MP). Ma $(\alpha \to \beta) = \varphi = \psi$

Quando β ha valore 1, φ ha valore 1. Per l'ipotesi induttiva $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \beta$
Quindi (Ax1), $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \beta \to (\alpha \to \beta)$ e dunque $B_1, B_2, ..., B_n \vdash (\alpha \to \beta)$ (MP)

Quando α ha valore 1 e β ha valore 0, φ ha valore 0. Per l'ipotesi induttiva
$B_1, B_2, ..., B_n \vdash \alpha$ e $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \neg\beta$.
Quindi (Teorema 3), $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \alpha \to (\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta))$ e dunque
$B_1, B_2, ..., B_n \vdash \neg(\alpha \to \beta)$ (doppio MP). Ma $\neg(\alpha \to \beta) = \neg\varphi = \psi$

Completezza (3)

Per mostrare che: $\models \varphi \;\Rightarrow\; \vdash \varphi$

Se φ è una tautologia, allora si ha $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \varphi$

In particolare, considerando A_1, $A_1, B_2, ..., B_n \vdash \varphi$ e $\neg A_1, B_2, ..., B_n \vdash \varphi$

Quindi si ha $B_2, ..., B_n \vdash A_1 \to \varphi$ (Ded) e $B_2, ..., B_n \vdash \neg A_1 \to \varphi$ (Ded)

Dal Teorema "X", $B_2, ..., B_n \vdash (\neg A_1 \to \varphi) \to ((A_1 \to \varphi) \to \varphi)$ e dunque $B_2, ..., B_n \vdash \varphi$ (doppio MP).

Iterando il procedimento per tutte le A_i si ottiene $\vdash \varphi$

- *Completezza*

Le *conseguenze logiche* di un Γ qualsiasi sono fbf φ *derivabili*

$$\Gamma \models \varphi \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash \varphi$$

Perché:

Si consideri un insieme Σ finito, con $\Sigma \subseteq \Gamma$, per cui $\Sigma \vdash \varphi$ (Compattezza)

Applicando ripetutamente il teorema di deduzione, si ottiene una tautologia e si ritorna al caso precedente

Indipendenza degli schemi Ax*n*

- Insieme minimo

    Per provare la completezza di Ax*n* sono stati usati tutti e tre gli schemi

- Indipendenza

    I tre schemi sono **logicamente indipendenti**:

    - Non è possibile derivare uno di essi dai restanti due

- Esistono altre assiomatizzazioni di L_P

    Si può avere anche uno schema solo

    Non si può invece evitare di usare schemi di assioma

    - Avendo, di fatto, un insieme di assiomi infinito
    - In alternativa, si può usare un insieme finito introducendo una nuova regola di inferenza che permette di 'clonare' gli assiomi per sostituzione (cioè si tratta della stessa cosa in forma diversa)

Diversi assiomi, diverse teorie

- Assiomi (schemi di assioma) della logica proposizionale

Ax1	$\varphi \to (\psi \to \varphi)$
Ax2	$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
Ax3	$(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

La teoria assiomatizzata da Ax1, Ax2 e Ax3 coincide con l'insieme delle fbf valide

Ricordare la proprietà di completezza

Diversi assiomi, diverse teorie

- Assiomi (schemi di assioma) della logica proposizionale

  Ax1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

  Ax2 $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

  Ax3 $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

  La teoria assiomatizzata da Ax1, Ax2 e Ax3 coincide con l'insieme delle fbf valide

- Assiomi di una teoria specifica (esempio "la macchina non parte")

  ρ_1 : $\neg C \to (\neg L \wedge \neg A \wedge \neg M)$

  ρ_2 : $G \to \neg M$

  ρ_3 : $\neg M \to \neg P$

  Quali fbf sono derivabili dalle regole ρ_1, ρ_2 ed ρ_3?

  Notare che le tre regole NON sono fbf valide

  Ricordando la definizione di derivazione:

  - Tutte le fbf valide ($\vdash \varphi \ \Rightarrow\ \Gamma \vdash \varphi$)
  - Altre fbf specifiche (p.es. $\neg C \to (\neg L \wedge \neg A \wedge \neg P)$, $G \to \neg P$)

    Nemmeno queste sono fbf valide

Diversi assiomi, diverse teorie

- Assiomi (schemi di assioma) della logica proposizionale

  Ax1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

  Ax2 $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

  Ax3 $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

  Le fbf della teoria assiomatizzata da Ax1, Ax2 e Ax3
  sono vere in tutti i mondi possibili

- Assiomi di una teoria specifica

  ρ_1: $\neg C \to (\neg L \wedge \neg A \wedge \neg M)$

  ρ_2: $G \to \neg M$

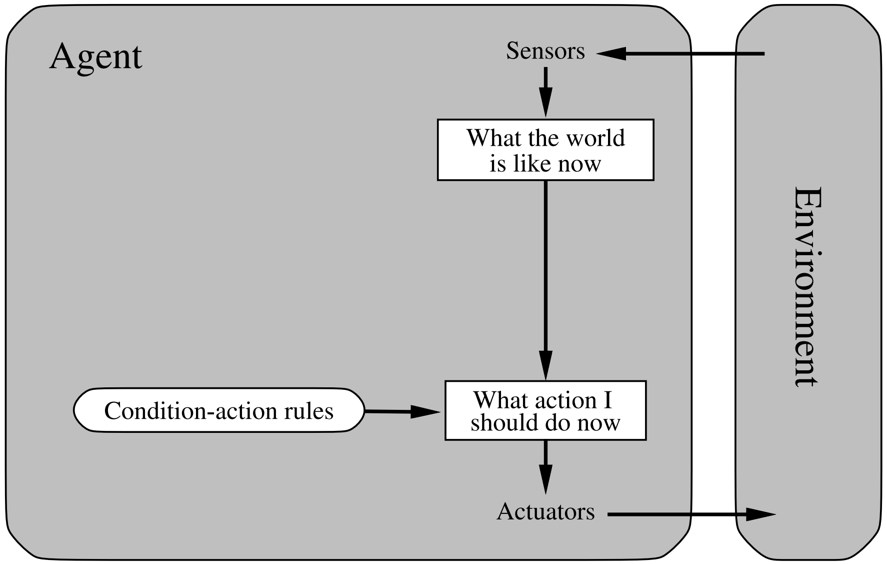
  ρ_3: $\neg M \to \neg P$

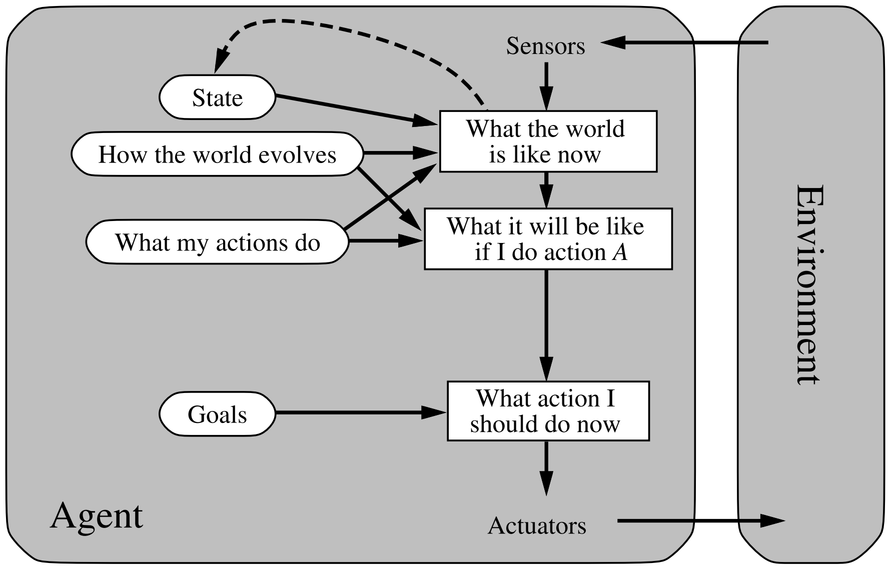
  Le fbf della teoria assiomatizzata da ρ_1, ρ_2 ed ρ_3
  sono (simultaneamente) vere solo nei mondi possibili in cui sono vere ρ_1, ρ_2 ed ρ_3

  Gli assiomi di una teoria specifica agiscono con una sorta di 'filtro' sui mondi possibili

Agenti e fbf

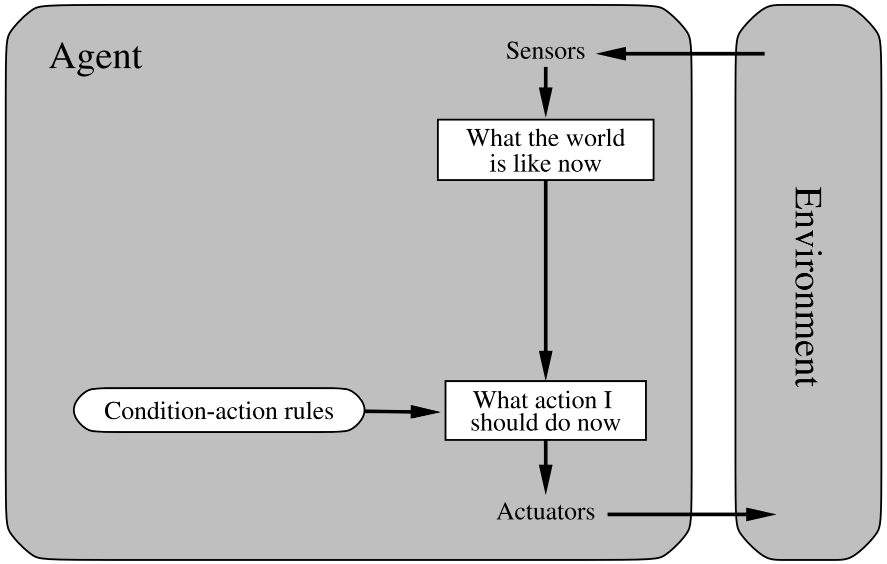
- Le fbf rappresentano
  - Percezioni stato dell’ambiente esterno accessibile tramite i sensori
  - Stato interno dell’agente
  - Previsioni evoluzione dell’ambiente
  - Possibili effetti delle azioni
  - Obiettivi (goal)
  - Azioni
  - Vincoli
- Calcolo simbolico

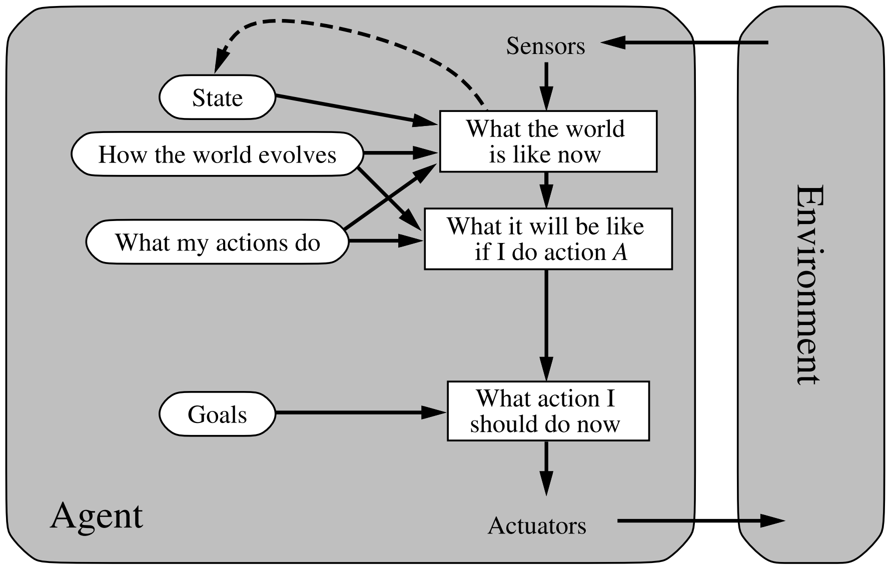




Agenti e fbf

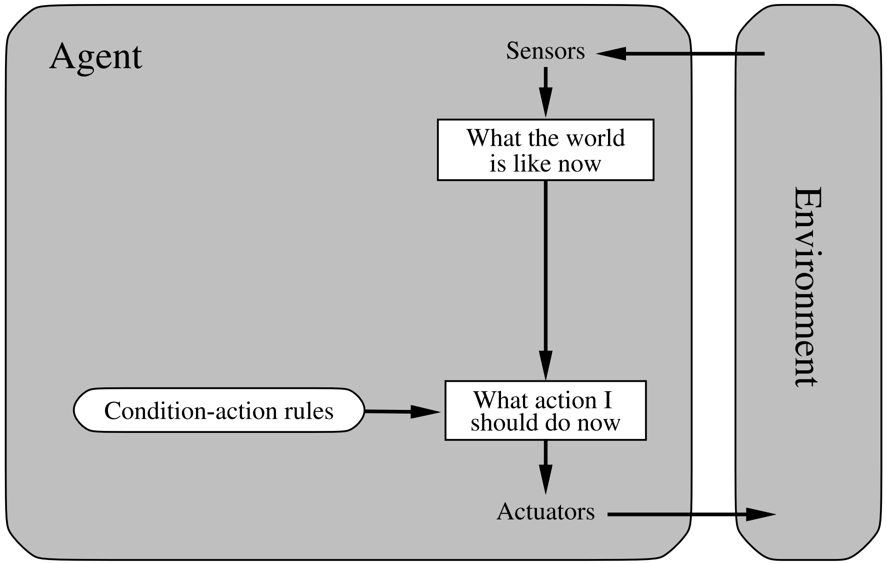
- Le fbf rappresentano
  - Percezioni stato dell'ambiente esterno accessibile tramite i sensori
  - Stato interno dell'agente
  - Previsioni evoluzione dell'ambiente
  - Possibili effetti delle azioni
  - Obiettivi (goal)
  - Azioni
  - Vincoli
- Calcolo simbolico
  - Le fbf che descrivono le conoscenze 'a priori' dell'agente sono come assiomi specifici
    - Non sono tautologie

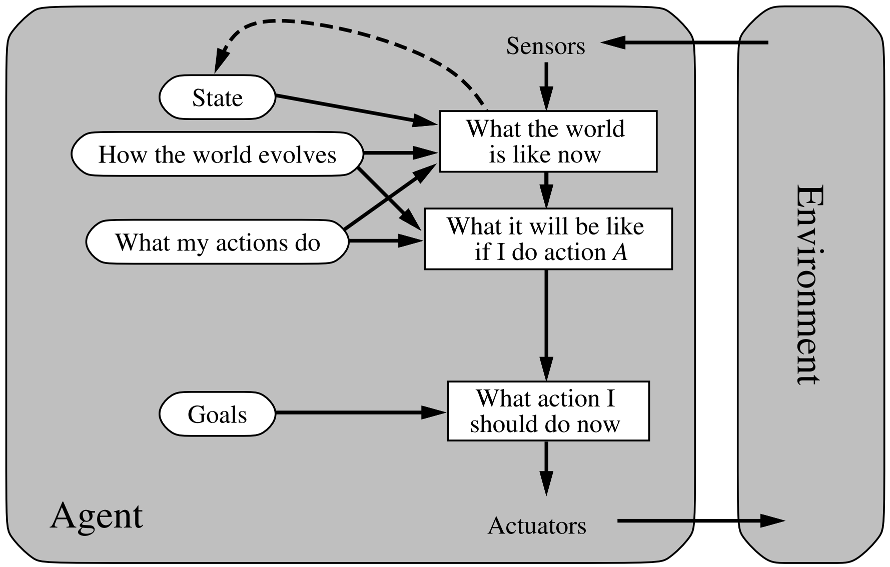




Agenti e fbf

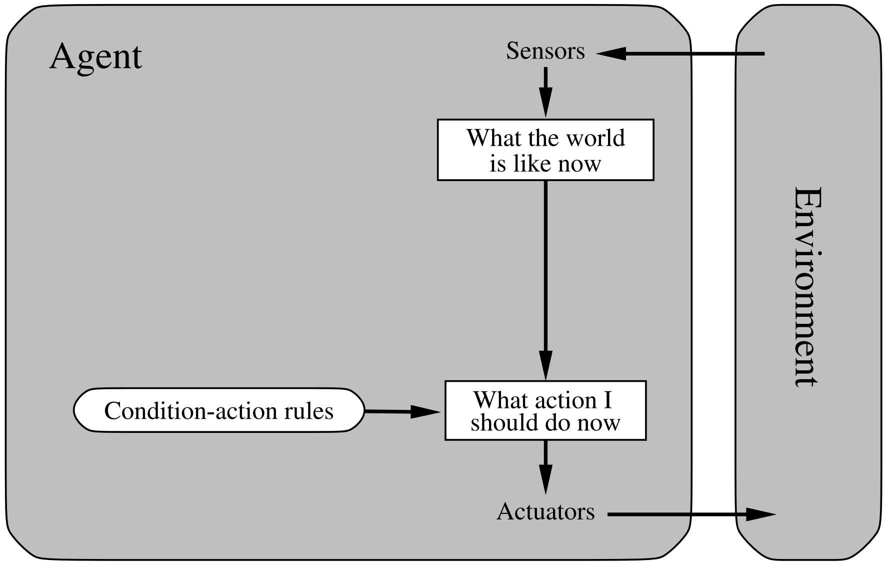
- Le fbf rappresentano
  - Percezioni stato dell'ambiente esterno accessibile tramite i sensori
  - Stato interno dell'agente
  - Previsioni evoluzione dell'ambiente
  - Possibili effetti delle azioni
  - Obiettivi (goal)
  - Azioni
  - Vincoli
- Calcolo simbolico
  - Le fbf che descrivono le conoscenze 'a priori' dell'agente sono come assiomi specifici
    - Non sono tautologie
  - Le fbf che descrivono le conoscenze contingenti (p.es. percezioni specifiche) sono ulteriori assiomi specifici

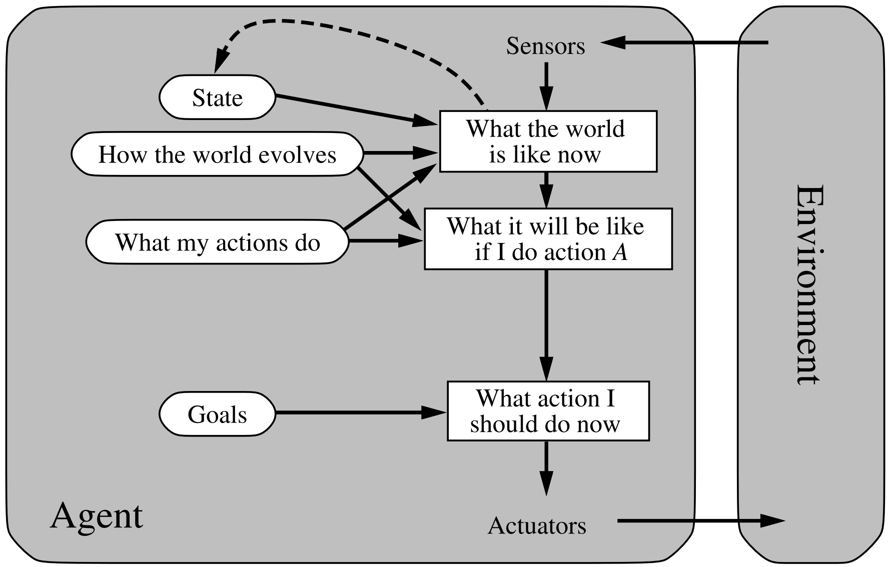




Agenti e fbf

- Le fbf rappresentano
  - Percezioni stato dell'ambiente esterno accessibile tramite i sensori
  - Stato interno dell'agente
  - Previsioni evoluzione dell'ambiente
  - Possibili effetti delle azioni
  - Obiettivi (goal)
  - Azioni
  - Vincoli
- Calcolo simbolico
  - Calcolo delle formule specifiche derivabili
  - Quali?
    Tutte?
    Solo quelle *che servono*?
  - Le fbf valide descrivono la logica (gli *schemi di ragionamento*) che l'agente utilizza





Conoscenze ‘a priori’ e contingenti

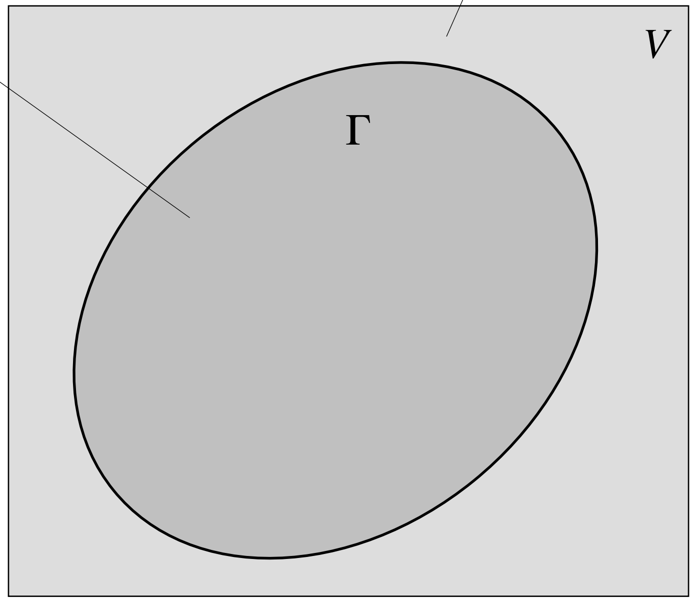
Insieme di tutti i mondi possibili
(dato il linguaggio logico dell’agente)

Conoscenze ‘a priori’ e contingenti

Insieme di tutti i mondi possibili
(dato il linguaggio logico dell’agente)

Insieme di tutti i mondi che l’agente considera possibili (in base alle conoscenze a priori)

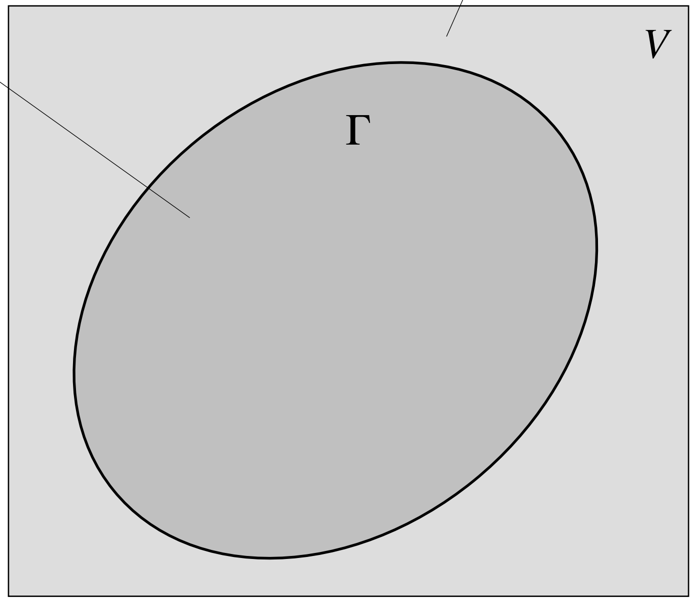
Questo insieme è caratterizzato (implicitamente) dalle fbf che descrivono le conoscenze ‘a priori’



Conoscenze ‘a priori’ e contingenti

Insieme di tutti i mondi possibili
(dato il linguaggio logico dell’agente)

Insieme di tutti i mondi che l’agente considera possibili (in base alle conoscenze a priori)



Questo insieme è caratterizzato (implicitamente) dalle fbf che descrivono le conoscenze ‘a priori’

Esempio:

ρ_1: $\neg C \rightarrow (\neg L \wedge \neg A \wedge \neg M)$

ρ_2: $G \rightarrow \neg M$

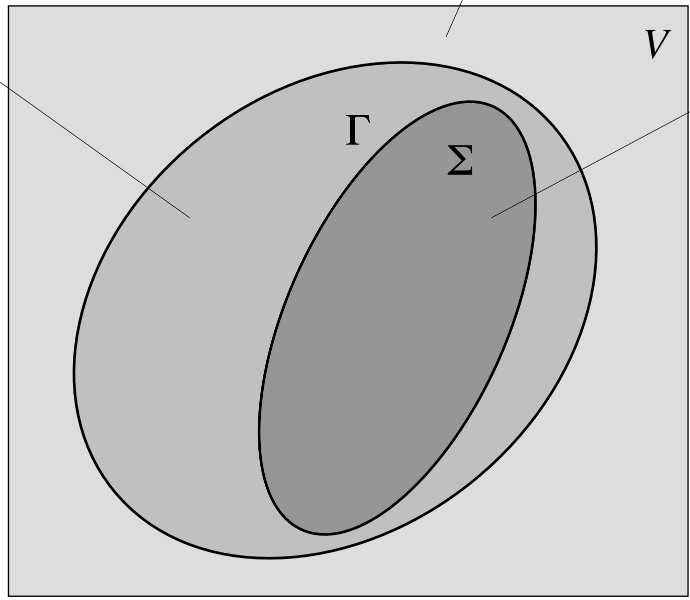
ρ_3: $\neg M \rightarrow \neg P$

(descrizione dei possibili malfunzionamenti)

Conoscenze ‘a priori’ e contingenti

Insieme di tutti i mondi possibili
(dato il linguaggio logico dell’agente)

Insieme di tutti i mondi che l’agente considera possibili (in base alle conoscenze a priori)



Insieme di tutti i mondi che l’agente considera possibili in un certo contesto, p.es. dopo aver percepito qualcosa

Questo insieme è caratterizzato (implicitamente) dalle fbf che descrivono le conoscenze ‘a priori’

Esempio:

ρ_1: $\neg C \rightarrow (\neg L \wedge \neg A \wedge \neg M)$

ρ_2: $G \rightarrow \neg M$

ρ_3: $\neg M \rightarrow \neg P$

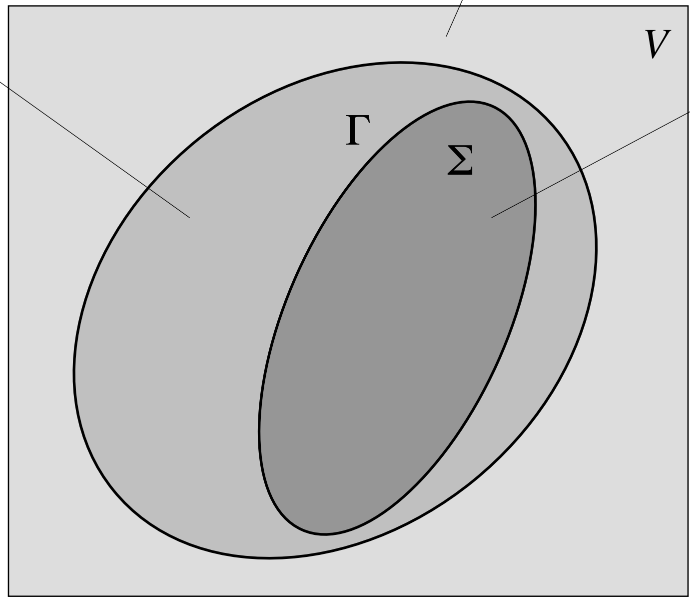
(descrizione dei possibili malfunzionamenti)

Conoscenze 'a priori' e contingenti

Insieme di tutti i mondi possibili
(dato il linguaggio logico dell'agente)

Insieme di tutti i mondi che l'agente considera possibili (in base alle conoscenze a priori)

Questo insieme è caratterizzato (implicitamente) dalle fbf che descrivono le conoscenze 'a priori'



Insieme di tutti i mondi che l'agente considera possibili in un certo contesto, p.es. dopo aver percepito qualcosa

L'insieme è caratterizzato (implicitamente) dalle fbf che descrivono le conoscenze 'a priori' + le fbf che descrivono la percezione

Esempio:

ρ_1: $\neg C \rightarrow (\neg L \wedge \neg A \wedge \neg M)$

ρ_2: $G \rightarrow \neg M$

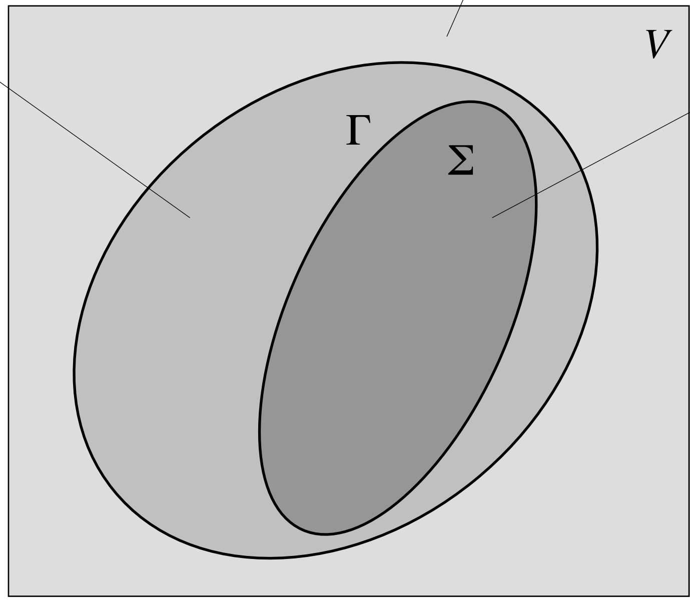
ρ_3: $\neg M \rightarrow \neg P$

(descrizione dei possibili malfunzionamenti)

Conoscenze ‘a priori’ e contingenti

Insieme di tutti i mondi possibili
(dato il linguaggio logico dell’agente)

Insieme di tutti i mondi che l’agente considera possibili (in base alle conoscenze a priori)



Insieme di tutti i mondi che l’agente considera possibili in un certo contesto, p.es. dopo aver percepito qualcosa

Questo insieme è caratterizzato (implicitamente) dalle fbf che descrivono le conoscenze ‘a priori’

L’insieme è caratterizzato (implicitamente) dalle fbf che descrivono le conoscenze ‘a priori’ + le fbf che descrivono la percezione

Esempio:

ρ_1: $\neg C \rightarrow (\neg L \wedge \neg A \wedge \neg M)$

ρ_2: $G \rightarrow \neg M$

ρ_3: $\neg M \rightarrow \neg P$

(descrizione dei possibili malfunzionamenti)

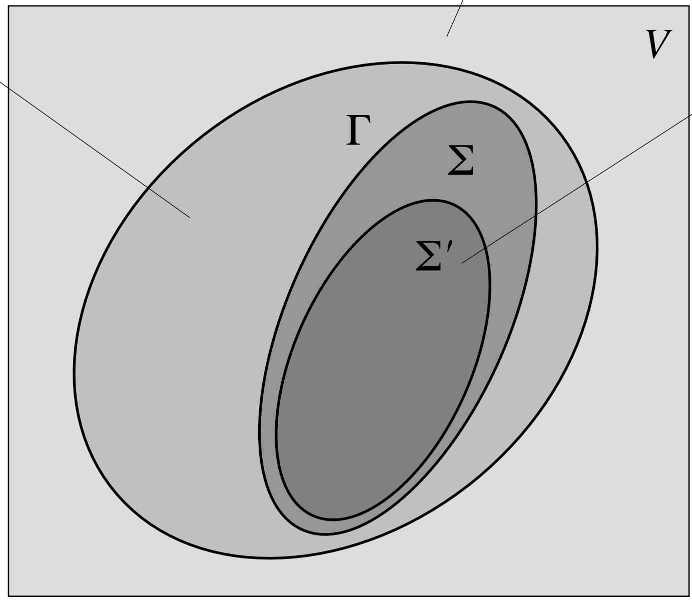
Esempio:
osservazione di L
(le luci si accendono)

Conoscenze 'a priori' e contingenti

Insieme di tutti i mondi possibili
(dato il <u>linguaggio</u> logico dell'agente)

Insieme di tutti i mondi che l'agente considera possibili (in base alle conoscenze a priori)

Questo insieme è caratterizzato (implicitamente) dalle fbf che descrivono le conoscenze 'a priori'



Insieme di tutti i mondi che l'agente considera possibili dopo avere acquisito (percepito) altri fatti

Esempio:
osservazione di $\neg M$
(il motorino non gira)

Esempio:

ρ_1: $\neg C \rightarrow (\neg L \wedge \neg A \wedge \neg M)$

ρ_2: $G \rightarrow \neg M$

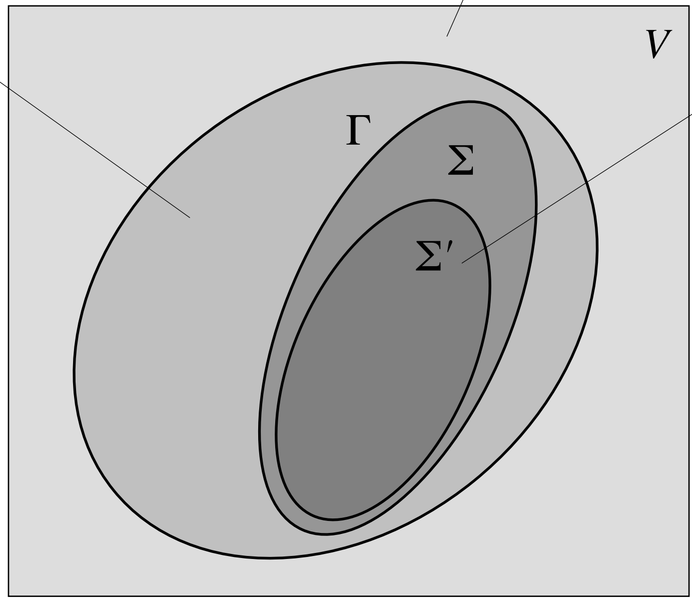
ρ_3: $\neg M \rightarrow \neg P$

(descrizione dei possibili malfunzionamenti)

Conoscenze ‘a priori’ e contingenti

Insieme di tutti i mondi possibili
(dato il <u>linguaggio</u> logico dell’agente)

Insieme di tutti i mondi
che l’agente considera
possibili (in base
alle conoscenze a priori)



Insieme di tutti i mondi
che l’agente considera
possibili dopo avere
acquisito (percepito)
altri fatti

Questo insieme
è caratterizzato
(implicitamente)
dalle fbf che descrivono
le conoscenze ‘a priori’

Esempio:
osservazione di $\neg M$
(il motorino non gira)

Esempio:

ρ_1: $\neg C \rightarrow (\neg L \wedge \neg A \wedge \neg M)$

ρ_2: $G \rightarrow \neg M$

ρ_3: $\neg M \rightarrow \neg P$

(descrizione dei possibili malfunzionamenti)

Notare: all’aumentare
delle conoscenze,
aumentano le fbf ritenute vere

I mondi possibili *diminuiscono*

Agenti e mondi possibili

- Conoscenze dell'agente

    Espresse come fbf logiche

    Stato interno dell'agente

    Previsioni evoluzione dell'ambiente

    Possibili effetti delle azioni

    Obiettivi (goal)

    Azioni

    Vincoli

- Calcolo simbolico

    Calcolo delle formule specifiche derivabili

    Quali?
    Tutte?
    Solo quelle *che servono*?

    Le fbf valide descrivono la logica (gli *schemi di ragionamento*) che l'agente utilizza