Intelligenza Artificiale I

Logica formale

Introduzione

Marco Piastra

Sistematicità del linguaggio naturale

- Capacità di astrazione della descrizione simbolica
  molti fenomeni linguistici sono *sistematici*
  (la cui complessità trascende le possibilità di un semplice *pattern-matching*)

Una persona che comprende l'italiano non può comprendere:

"Silvia ama Enrico"

senza al tempo stesso comprendere:

"Enrico ama Silvia"

così come qualsiasi frase del tipo:

"X ama Y"

dove X ed Y possono essere nomi o descrizioni definite qualsiasi:

"L'amica di Renato ama il gatto di Paolo"

(adattato da Fodor e Phylyshyn, 1988)

Ragionar per schemi: *sillogismo*

Sin dall'antichità ci si è resi conto che molti ragionamenti accettabili sono *schematici*

Tutte le cose mortali sono destinate a morire
Tutti gli uomini sono cosa mortale
Tutti gli uomini sono destinati a morire

Ragionar per schemi: *sillogismo*

Sin dall'antichità ci si è resi conto che molti ragionamenti accettabili sono *schematici*

Tutte (*le cose mortali*) sono (*destinate a morire*)
Tutti (*gli uomini*) sono (*cosa mortale*)
Tutti (*gli uomini*) sono (*destinati a morire*)

Schema astratto:
Tutti ***C*** sono ***M***
Tutti ***U*** sono ***C***
Tutti ***U*** sono ***M***

Si possono creare infiniti esempi:

Tutte (*le creature incantate*) sono (*in un mondo fantastico*)
Tutti (*gli unicorni*) sono (*creature incantate*)
Tutti (*gli unicorni*) sono (*in un mondo fantastico*)

Tutte (*le creature incantate*) sono (*creature reali*)
Tutti (*gli unicorni*) sono (*creature incantate*)
Tutti (*gli unicorni*) sono (*creature reali*)

Ragionar per schemi: *sillogismo*

Sin dall'antichità ci si è resi conto che molti ragionamenti accettabili sono *schematici*

Tutte (*le cose mortali*) sono (*destinate a morire*)
Tutti (*gli uomini*) sono (*cosa mortale*)
Tutti (*gli uomini*) sono (*destinati a morire*)

Schema astratto (ne esistono diversi, vedi wikipedia):
Tutti ***C*** sono ***M***
Tutti ***U*** sono ***C***
Tutti ***U*** sono ***M***

Si possono creare infiniti esempi:

Tutte (*le creature incantate*) sono (*in un mondo fantastico*)
Tutti (*gli unicorni*) sono (*creature incantate*)
Tutti (*gli unicorni*) sono (*in un mondo fantastico*)

Tutte (*le creature incantate*) sono (*creature reali*)
Tutti (*gli unicorni*) sono (*creature incantate*)
Tutti (*gli unicorni*) sono (*creature reali*)

Il ragionamento, in sé, è accettabile
Le premesse invece ....

Fallacia degli schemi (*paralogismi*)

Difetto di schema (distinzione tra premesse e conseguenza):

Tutte (*le cose mortali*) sono (*destinate a morire*)
Tutti (*gli uomini*) sono (*destinati a morire*)

Tutti (*gli uomini*) sono (*cosa mortale*)

Ambiguità del linguaggio:

(*Niente*) è meglio della (*felicità eterna*)
(*Un panino al prosciutto*) è meglio di (*niente*)
(*Un panino al prosciutto*) è meglio della (*felicità eterna*)

Oscure sottigliezze di significato:

Tutti (*gli unicorni*) sono (*creature incantate*)
Tutti (*gli unicorni*) sono (*a quattro zampe*)
Alcuni (*unicorni*) sono (*creature incantate a quattro zampe*)

Che intendiamo per "tutti"? Si può assumere che ciò implichi "almeno uno"?

Se fosse così, il ragionamento avrebbe come premessa l'esistenza degli unicorni (e sarebbe quindi accettabile)

Scopo della logica moderna

Distinguere i ragionamenti corretti da quelli che non lo sono

Scopo della logica moderna

Distinguere i ragionamenti corretti
da quelli che non lo sono

in base alla struttura formale

Esempio preliminare

- Soluzione di equazioni algebriche

$x^2 + ax + b = 0$

$x^2 + 2(a/2)x + a^2/4 - a^2/4 + b = 0$

$(x + a/2)^2 - a^2/4 + b = 0$

$(x + a/2)^2 = a^2/4 - b$

$x = - a/2 \pm (a^2/4 - b)^{1/2}$

Una serie di passaggi: si applicano regole formali sulle espressioni

Esempio preliminare

- Soluzione di equazioni algebriche

  $x^2 + ax + b = 0$

  $x^2 + 2(a/2)x + a^2/4 - a^2/4 + b = 0$

  $(x + a/2)^2 - a^2/4 + b = 0$

  $(x + a/2)^2 = a^2/4 - b$

  $x = - a/2 \pm (a^2/4 - b)^{1/2}$

  Una serie di passaggi: si applicano regole formali sulle espressioni

- Partenza ed arrivo

  Si parte da una premessa

Esempio preliminare

- Soluzione di equazioni algebriche

  $x^2 + ax + b = 0$

  $x^2 + 2(a/2)x + a^2/4 - a^2/4 + b = 0$

  $(x + a/2)^2 - a^2/4 + b = 0$

  $(x + a/2)^2 = a^2/4 - b$

  $x = -\, a/2 \pm (a^2/4 - b)^{1/2}$

  Una serie di passaggi: si applicano regole formali sulle espressioni

- Partenza ed arrivo

  Si parte da una premessa

  Si arriva ad una conclusione

  (Entrambe decise da noi)

Esempio preliminare

- Soluzione di equazioni algebriche

  $x^2 + ax + b = 0$

  $x^2 + 2(a/2)x + a^2/4 - a^2/4 + b = 0$

  $(x + a/2)^2 - a^2/4 + b = 0$

  $(x + a/2)^2 = a^2/4 - b$

  $x = - a/2 \pm (a^2/4 - b)^{1/2}$

  Una serie di passaggi: si applicano regole formali sulle espressioni

- Partenza ed arrivo

  Si parte da una premessa

  Si arriva ad una conclusione

  (Entrambe decise da noi)

- Sequenza di ‘passaggi’

  Ciascuna espressione esprime l’identità tra due numeri

  Ogni passaggio da un’espressione ad un’altra deve essere *corretto*

Esempio preliminare

- Soluzione di equazioni algebriche

$$x^2 + ax + b = 0$$
$$x^2 + 2(a/2)x + a^2/4 - a^2/4 + b = 0$$
$$(x + a/2)^2 - a^2/4 + b = 0$$
$$(x + a/2)^2 = a^2/4 - b$$
$$x = - a/2 \pm (a^2/4 - b)^{1/2}$$

  Una serie di passaggi: si applicano regole formali sulle espressioni

- Partenza ed arrivo

  Si parte da una premessa

  Si arriva ad una conclusione

  (Entrambe decise da noi)

- Sequenza di 'passaggi'

  Ciascuna espressione esprime l'identità tra due numeri

  Ogni passaggio da un'espressione ad un'altra deve essere *corretto*

- *Astrazione* e *correttezza*

  I simboli x, a e b indicano un qualsiasi numero reale (*astrazione*)

  La *correttezza*?

Algebre di Boole

- Definizione

  Una collezione di oggetti X su cui sono definiti gli operatori $\cup$, $\cap$ e ^{c} oltre ad un elemento nullo $\emptyset$

$A \cup B$	unione
$A \cap B$	intersezione
A^c	complemento

  Devono valere le seguenti proprietà di base:

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	*associatività*
$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$	*commutatività*
$A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A$	*assorbimento*
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	*distributività*
$A \cup A^c = U, \quad A \cap A^c = \emptyset$	*complemento*

Esempio: collezione di sottoinsiemi di U

- Definizione

  Sia U un insieme.
  X è una collezione di sottoinsiemi di U
  tale da risultare chiusa rispetto agli operatori $\cup$, $\cap$ e ^{c}

  Verifica delle proprietà:

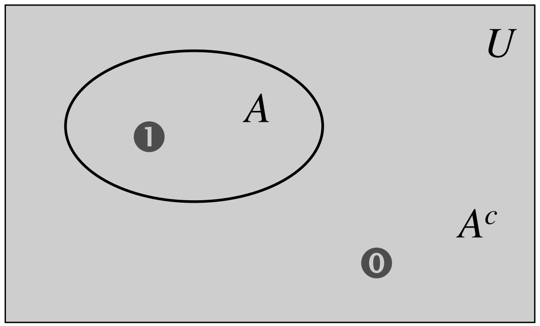
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C\,,\quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *associatività*

  $A \cup B = B \cup A\,,\quad A \cap B = B \cap A$ *commutatività*

  $A \cup (A \cap B) = A\,,\quad A \cap (A \cup B) = A$ *assorbimento*

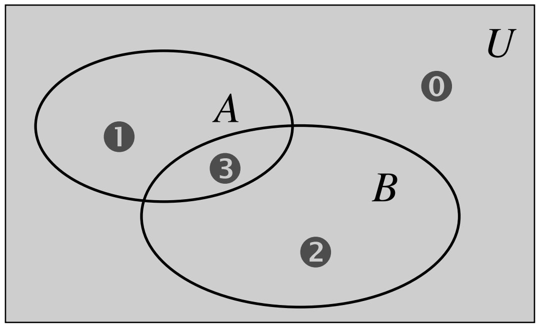
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\,,\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *distributività*

  $A \cup A^c = U\,,\quad A \cap A^c = \varnothing$ *complemento*



$A \cup A^c = U$

A = ❶
A^c = ⓿
$A \cup A^c$ = ❶ + ⓿
U = ❶ + ⓿



$A \cap (A \cup B) = A$

A = ❶ + ❸
B = ❷ + ❸
$A \cup B$ = ❶ + ❷ + ❸
$A \cap (A \cup B)$ = ❶ + ❸

Altre proprietà delle algebre di Boole

- Identità dimostrabili

$A \cup A = A\,,\quad A \cap A = A$ *idempotenza*

$A \cup \emptyset = A\,,\quad A \cap U = A$

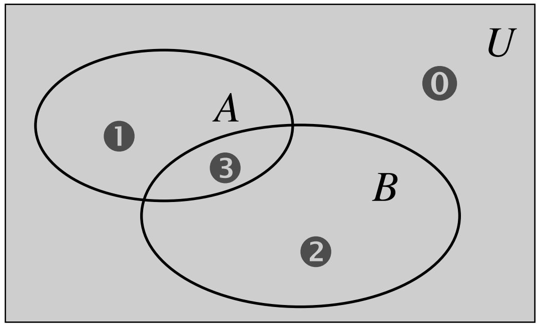
$A \cup U = U\,,\quad A \cap \emptyset = \emptyset$

$U^c = \emptyset\,,\quad \emptyset^c = U$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c\,,\quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ *leggi di De Morgan*

$(A^c)^c = A$

Verifica (legge di De Morgan ed una non-legge):



$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$A =$ ❶ + ❸

$A^c =$ ❷ + ⓿

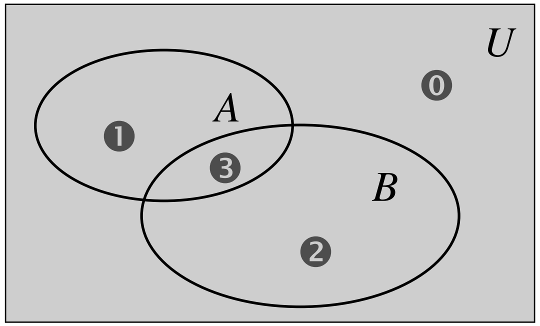
$B =$ ❷ + ❸

$B^c =$ ❶ + ⓿

$A \cup B =$ ❶ + ❷ + ❸

$(A \cup B)^c =$ ⓿

$A^c \cap B^c =$ ⓿



$A^c \cup B = U$

$A^c =$ ❷ + ⓿

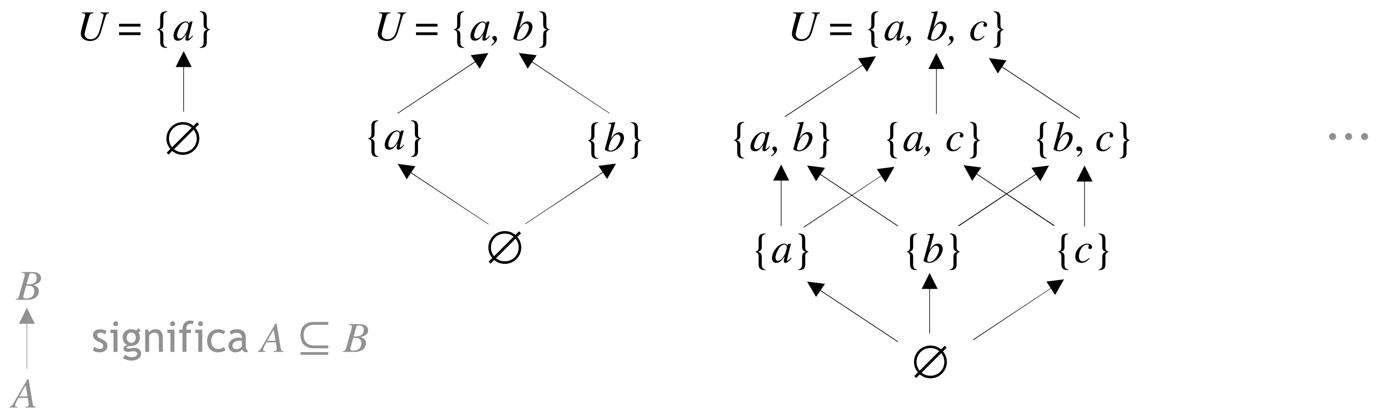
$B =$ ❷ + ❸

$A^c \cup B =$ ❷ + ⓿ + ❸

Vale solo se ❶ $= \emptyset$
cioè se $A \subseteq B$

Quale algebra di Boole

- Un metodo semplice per costruire un'algebra di Boole:
  - Scegliere l'insieme U
  - Costruire la collezione di tutti i <u>sottoinsiemi</u> di U (detto anche **insieme delle parti**, 2^U)



- Sono tutte equivalenti
  - Nel senso che le proprietà delle algebre di Boole valgono per tutte o per nessuna
- Tanto vale considerare quindi l'algebra più semplice: $\{U, \varnothing\}$
  - Un algebra a due valori: {'tutto', 'niente'} oppure {'vero' e 'falso'}

Operatori logici

Si considera quindi l'algebra più semplice: $\{U, \varnothing\}$

Un algebra a due valori: {'tutto', 'niente'} oppure {'vero' e 'falso'}

- Notazione

  Si indicano U con 1 ('vero') e $\varnothing$ con 0 ('falso')

  Si sostituiscono i simboli delle operazioni $\cup$, $\cap$ e ^{c} rispettivamente con $\vee$, $\wedge$ e $\neg$

- Tavole di verità (*truth tables*)

  Rappresentazione degli operatori $\vee$, $\wedge$ e $\neg$ come *funzioni booleane*

  Funzione booleana: funzione a n argomenti del tipo $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$

OR

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

AND

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

NOT

A	$\neg A$
0	1
1	0

Espressioni composite

Il metodo delle tavole di verità

Può essere esteso alle espressioni comunque composite

Ad esempio per verificare assiomi e leggi dell'algebra di Boole

Le due colonne sono identiche

1a legge di De Morgan

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

In generale

Un'espressione composita è una funzione booleana

$f(x_1, x_2, ..., x_n) : \{1, 0\}^n \rightarrow \{1, 0\}$

dove $x_1, x_2, ..., x_n$ sono le lettere che compaiono nell'espressione

Quanti operatori?

- Quanti operatori logici occorrono per rappresentare <u>tutte</u> le possibili funzioni booleane?

2^n *righe*

x_1	x_2	...	x_n	$f(x_1, x_2, ..., x_n)$
0	0	...	0	f_1
0	0	...	1	f_2
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
1	1	...	1	f_{2^n}

I tre operatori $\vee$, $\wedge$ e $\neg$ formano una base adeguata

La tavola di verità può essere riscritta come un'unica espressione:

- per ciascuna riga r in cui $f_r = 1$, si combinano con $\wedge$ le n lettere A_1 , A_2 , … A_n prendendo A_i se lo i-esimo valore è vale 1 e $\neg A_i$ se vale 0
- si aggregano in $\vee$ tutte le combinazioni ottenute al passo precedente

Altre operazioni logiche

Anche $\{\vee, \neg\}$ o $\{\wedge, \neg\}$ sono basi adeguate

Una base adeguata è costituita anche dal solo *NOR* o dal solo *NAND*:

NOR

A	B	$\neg(A \vee B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

NAND

A	B	$\neg(A \wedge B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Implicazione ed equivalenza

I logici matematici preferiscono usare come base $\{\rightarrow, \neg\}$

Cui si aggiunge di solito anche $\leftrightarrow$

Implicazione

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Equivalenza

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Identità notevoli $\quad A \rightarrow B = \neg A \vee B \qquad A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

Logica proposizionale

La più semplice in assoluto

- Rappresentazione

  Un mondo descritto tramite frasi affermative (**proposizioni**)

  "La terra è rotonda"
  "I tacchini sono bipedi con le piume"
  "Gli unicorni sono creature fantastiche"

  Fondamentale: ciascun'affermazione può essere solo *vera* o *falsa*

- Linguaggio formale

  Il linguaggio usa le proposizioni come elementi *atomici*
  (i.e. la struttura interna di ciascuna affermazione viene persa)

  Le formule composite sono ottenute componendo proposizioni e operatori

- Semantica formale

  Intuitivamente, descrive il rapporto tra le formule e le situazioni effettive

  In logica proposizionale, in una situazione effettiva:

  - ciascuna proposizione atomica è *vera* o *falsa* (*valore di verità*)
  - il valore delle formule composite si determina a partire dai valori atomici tramite le regole degli *operatori booleani* (*vero-funzionalità*)

Strutture proposizionali

Cosa vogliamo rappresentare

Il mondo descritto da una struttura $<\{0,1\}, \boldsymbol{P}, v>$

$\{0,1\}$ è l'insieme dei valori di verità

$\boldsymbol{P}$ è un'insieme di simboli proposizionali (**segnatura**)

v è una *funzione*: $\boldsymbol{P} \rightarrow \{0,1\}$ che assegna valori di verità ai simboli proposizionali

Simboli proposizionali

Ciascuno indica una frase affermativa (**proposizioni**)

Per convezione usiamo i simboli $A, B, C, D, \ldots$

Non è necessario che $\boldsymbol{P}$ sia un'insieme finito

Mondi possibili

Possiamo considerare diverse strutture:

$<\{0,1\}, \boldsymbol{P}, v>$
$<\{0,1\}, \boldsymbol{P}, v'>$
$<\{0,1\}, \boldsymbol{P}, v''>$
...

Notare che le strutture condividono i simboli $\boldsymbol{P}$ e l'insieme dei valori di verità $\{0,1\}$

Differiscono solo per le funzioni v : i valori di verità assegnati sono in generale diversi

Descrizione di mondi possibili *diversi* tramite la stessa *segnatura*

Linguaggio proposizionale

Come descriviamo il mondo

- Linguaggio logico proposizionale L_P
  - Un insieme $\boldsymbol{P}$ di simboli proposizionali: $\boldsymbol{P} = \{A, B, C, ...\}$
  - Due **connettivi** principali: $\neg, \rightarrow$
  - Tre **connettivi** derivati: $\wedge, \vee, \leftrightarrow$
  - Le parentesi: $(,)$
- Formule ben formate (**fbf**)
  - Regole sintattiche per la composizione
    - L'insieme di tutte le **fbf** di L_P si indica con $\text{fbf}(L_P)$
  - $A \in \boldsymbol{P} \;\Rightarrow\; A \in \text{fbf}(L_P)$
  - $\varphi \in \text{fbf}(L_P) \;\Rightarrow\; (\neg\varphi) \in \text{fbf}(L_P)$
  - $\varphi, \psi \in \text{fbf}(L_P) \;\Rightarrow\; (\varphi \rightarrow \psi) \in \text{fbf}(L_P)$
  - $\varphi, \psi \in \text{fbf}(L_P) \;\Rightarrow\; (\varphi \vee \psi) \in \text{fbf}(L_P), \quad (\varphi \vee \psi) \;\Leftrightarrow\; ((\neg\varphi) \rightarrow \psi)$
  - $\varphi, \psi \in \text{fbf}(L_P) \;\Rightarrow\; (\varphi \wedge \psi) \in \text{fbf}(L_P), \quad (\varphi \wedge \psi) \;\Leftrightarrow\; (\neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi)))$
  - $\varphi, \psi \in \text{fbf}(L_P) \;\Rightarrow\; (\varphi \leftrightarrow \psi) \in \text{fbf}(L_P), \quad (\varphi \leftrightarrow \psi) \;\Leftrightarrow\; ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$

  Non ci sono regole di precedenza: si usano le parentesi

Interpretazioni

- Strutture e formule composite

  Data una struttura proposizionale $<\{0,1\}, \boldsymbol{P}, v>$
  la funzione $v : \boldsymbol{P} \rightarrow \{0,1\}$ può essere estesa a fbf qualsiasi
  Tramite gli operatori dell'algebra di Boole:

$$
\begin{array}{lcl}
v(\neg\varphi) & = & \text{NOT } v(\varphi) \\
v(\varphi \wedge \psi) & = & v(\varphi) \text{ AND } v(\psi) \\
v(\varphi \vee \psi) & = & v(\varphi) \text{ OR } v(\psi) \\
v(\varphi \rightarrow \psi) & = & (\text{NOT } v(\varphi)) \text{ OR } v(\psi) \\
v(\varphi \leftrightarrow \psi) & = & ((\text{NOT } v(\varphi)) \text{ OR } v(\psi)) \text{ AND } (v(\varphi) \text{ OR } (\text{NOT } (v(\psi)))
\end{array}
$$

- Interpretazioni

  La funzione v (così estesa) assegna un valore di verità a ***tutte*** le fbf di L_P

$$v : \text{fbf}(L_P) \rightarrow \{0,1\}$$

  Si dice che v è un'**interpretazione** di L_P

  Il valore delle fbf composite è univocamente determinato
  dal valore nei simboli nella *segnatura* $\boldsymbol{P}$

  Per brevità, il riferimento all'intera struttura proposizionale si omette e si cita solo v

Sottigliezze: linguaggio *oggetto* e *metalinguaggio*

- Il linguaggio logico proposizionale L_P è il **linguaggio oggetto**

    E' lo strumento con il quale ci proponiamo di lavorare

    E` composto unicamente dai costrutti appena introdotti:

    $\boldsymbol{P}$, $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow$, $(,)$, *regole sintattiche*, o di buona formazione

- **Metalinguaggio**: costrutti simbolici accessori

    Usati per definire le caratteristiche del linguaggio oggetto

    Primo esempio:

    Lettere greche minuscole (α, β, χ, φ, ψ) per indicare una <u>formula</u> (o fbf) qualsiasi

    Una formula $\varphi \rightarrow \psi$ descrive uno **schema** di fbf,
    da cui si possono generare infinite fbf per sostituzione

    Esempi:
    $A \rightarrow B$
    $(A \rightarrow B) \rightarrow C$
    $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

    Ma si possono sostituire anche variabili a variabili:
    $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$

Ulteriori costrutti particolari
verranno introdotti gradualmente

Soddisfacimento

- Interpretazioni e tavole di verità
  - Esempio: $\varphi = (A \lor B) \land C$
    - Ciascuna riga rappresenta un'interpretazione
    - Ciascuna interpretazione assegna un valore a tutte le fbf di L_P

	A	B	C	$A \lor B$	$(A \lor B) \land C$
v_1	0	0	0	0	0
v_2	0	0	1	0	0
v_3	0	1	0	1	0
v_4	0	1	1	1	1
v_5	1	0	0	1	0
v_6	1	0	1	1	1
v_7	1	1	0	1	0
v_8	1	1	1	1	1

Un'interpretazione v **soddisfa** una fbf φ sse $v(\varphi) = 1$

- Si può scrivere anche $v \models \varphi$
- Nella tavola di verità, le righe evidenziate corrispondono alle interpretazioni che soddisfano φ

Si dice anche che v è un **modello** di φ

- Per estensione, si dice che v soddisfa (è un modello di) un insieme di fbf $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ sse v soddisfa (è un modello di) tutte le fbf $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$
- Si può scrivere anche $v \models \Gamma$

Tautologie, contraddizioni

- Una **tautologia**

  E` una fbf soddisfatta da tutte le interpretazioni

  Si dice anche fbf **valida**

  Qualsiasi fbf del tipo $\varphi \lor \neg\varphi$ è una tautologia

- Una **contraddizione**

  E` una fbf insoddisfacibile, (che non può essere soddisfatta da alcuna interpretazione)

  Qualsiasi fbf del tipo $\varphi \land \neg\varphi$ è una contraddizione

A	$A \land \neg A$	$A \lor \neg A$
0	0	1
1	0	1

A	B	$(\neg A \lor B) \lor (\neg B \lor A)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	B	$\neg((\neg A \lor B) \lor (\neg B \lor A))$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Notare:

- Non tutte le fbf sono tautologie o contraddizioni
- Se φ è una tautologia $\neg\varphi$ è una contraddizione e viceversa

Linguaggio naturale, linguaggio logico

- Il processo di traduzione (o formalizzazione)
  - Il linguaggio logico L_P è composto da simboli e regole di formazione
  - Le interpretazioni assegnano un significato (formale) alle fbf di L_P
  - Che cosa rappresenta tutto ciò?
- Le fbf di L_P sono le frasi di un linguaggio formale
  - Ciascuna rappresenta una frase in linguaggio naturale (p.es. in italiano)
  - Le fbf atomiche rappresentano singole affermazioni
    - "Giorgio è contento"
    - "Giorgio è un bipede senza piume"
    - "Tutti gli esseri umani sono bipedi senza piume"
- Le fbf di L_P rappresentano frasi affermative composite, di senso compiuto
  - Di cui si può dire che siano vere o false

  - Quest'idea di traduzione non è esente da guai (paradossi)
    - "Questa proposizione è falsa"

Relazioni tra formule

- Premesse:

$\varphi_1 = B \lor D \lor \neg(A \land C)$

"Silvia è madre di Giorgio" OR "Giorgio è contento"
OR NOT("Giorgio è umano" AND "Giorgio è un bipede senza piume")

$\varphi_2 = B \lor C$

"Silvia è madre di Giorgio" OR "Giorgio è un bipede senza piume"

$\varphi_3 = A \lor D$

"Giorgio è umano" OR "Giorgio è contento"

$\varphi_4 = \neg B$

NOT "Silvia è madre di Giorgio"

- Affermazione:

$\psi = D$

"Giorgio è contento"

Qual'è il **legame logico** tra le premesse e l'affermazione?

E tra le premesse?

Conseguenza logica

- Costruendo la tavola di verità

  Per le fbf dell'esempio

$$\varphi_1 = B \lor D \lor \neg(A \land C)$$
$$\varphi_2 = B \lor C$$
$$\varphi_3 = A \lor D$$
$$\varphi_4 = \neg B$$
$$\overline{\psi = D}$$

A	B	C	D	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	ψ
0	0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	1

Si osserva che tutte le interpretazioni che soddisfano $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ soddisfano anche ψ

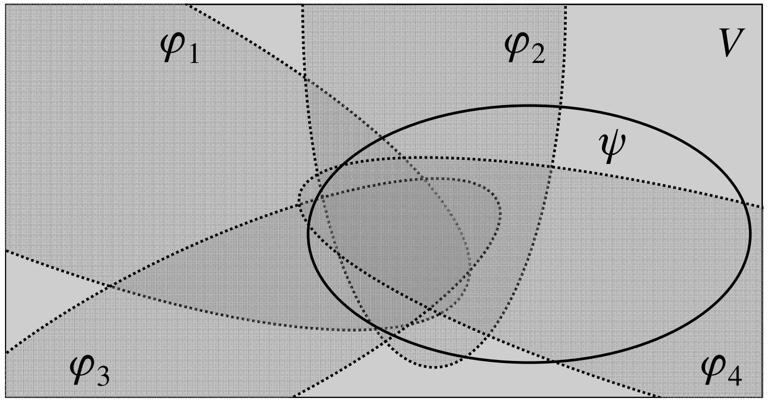
Relazione di **conseguenza logica**: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models \psi$
(*logical entailment*)

(Attenti alla notazione!)

Formule e sottoinsiemi

- Si consideri l'insieme V di tutte le possibili interpretazioni v
  - Ciascuna fbf di L_P (come $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi$) corrisponde a un sottoinsieme di V
    - Il sottoinsieme delle interpretazioni v che la soddisfano
    - Ad esempio, a ψ corrisponde $\{v : v(\psi) = 1\}$ (si scrive anche $\{v : v \models \psi\}$)
      - Il sottoinsieme potrebbe essere vuoto (se ψ è una contraddizione) o coincidente con V (se ψ è una tautologia)
  - L'insieme delle premesse $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ corrisponde all'intersezione dei sottoinsiemi corrispondenti a ciascuna fbf

- **Conseguenza logica**
  - Tutte le interpretazioni che soddisfano le premesse soddisfano anche la conseguenza
  - L'intersezione dei sottoinsiemi che corrispondono alle premesse *è incluso* nel sottoinsieme che corrisponde alla conseguenza



Implicazione

Le fbf del problema precedente possono essere riscritte così:

Usando la base $\{\rightarrow, \neg\}$

$$\varphi_1 = C \rightarrow (\neg B \rightarrow (A \rightarrow D))$$
$$\varphi_2 = \neg B \rightarrow C$$
$$\varphi_3 = \neg A \rightarrow D$$
$$\varphi_4 = \neg B$$
$$\psi = D$$

$$\varphi_1 = B \vee D \vee \neg(A \wedge C)$$
$$\varphi_2 = B \vee C$$
$$\varphi_3 = A \vee D$$
$$\varphi_4 = \neg B$$
$$\psi = D$$

- Validità (in termini di conseguenza logica) di schemi generali:

$$\begin{array}{l} \varphi \rightarrow \psi \\ \varphi \\ \hline \psi \end{array}$$

Si può verificare direttamente, che

$$\varphi \rightarrow \psi, \varphi \models \psi$$

Analogamente

$$\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \models \neg\varphi$$

Concetti essenziali

- Linguaggio simbolico
  - Formalismo rigoroso
    - Un insieme di simboli
    - Regole sintattiche (di buona formazione) per le fbf
- Semantica formale
  - Interpretazioni come funzioni dal linguaggio ad una struttura
    - Un'interpretazione assegna un valore a tutte le fbf del linguaggio
    - Per L_P la struttura di riferimento è molto semplice: $\{1, 0\}$
- Soddisfacimento, conseguenza logica
    - Una fbf è soddisfatta da un'interpretazione che la rende vera
  - La conseguenza logica è una relazione tra fbf e/o insiemi di fbf
    - Ciascuna fbf è soddisfatta solo da alcune interpretazioni (sottoinsieme)
    - La relazione sussiste quando le interpretazioni che soddisfano le fbf delle premesse soddisfano anche la fbf (o le fbf) della conseguenza
    - Occorre considerare tutte le possibili interpretazioni (semantica *estensionale*)