

Intelligenza Artificiale I

Logica formale

Calcolo simbolico

Marco Piastra

Conseguenza, decidibilità

- Una fbf φ è **conseguenza logica** di un insieme di fbf Γ sse qualsiasi modello di Γ è anche modello di φ

Si scrive anche:

$$\Gamma \models \varphi$$

- Una logica formale è **decidibile** se esiste una **procedura effettiva** per stabilire se:

$$\Gamma \models \varphi$$

Per *procedura effettiva* si intende un algoritmo che fornisce la risposta corretta in ogni caso

- L_p è **decidibile**

Basta usare il metodo delle tavole di verità (= 2^n prove)

Esistono altri metodi?

Fatti, regole e procedure

- Esempio: “La macchina non parte”

Codifica:

$C =$	“La batteria è carica”
$L =$	“Le luci si accendono”
$A =$	“L’autoradio funziona”
$M =$	“Il motorino d’avviamento gira”
$G =$	“Il motorino d’avviamento è guasto”
$P =$	“Il motore parte”

Regole:

$r_1:$	$\neg C \rightarrow (\neg L \wedge \neg A \wedge \neg M)$
$r_2:$	$G \rightarrow \neg M$
$r_3:$	$\neg M \rightarrow \neg P$

Cosa accade se:

(utilizzando lo schema $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \models \psi$ visto in precedenza)

$\neg C$	applicando r_1 si ottiene:	$\neg L \wedge \neg A \wedge \neg M$
G	applicando r_2 si ottiene:	$\neg M$
	applicando r_3 si ottiene:	$\neg P$

Regole di inferenza

Si rammenti lo schema $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \models \psi$, di validità generale

- In una logica formale, il calcolo (simbolico) si basa regole di **derivazione** (o di inferenza) che operano sulle fbf

Vale a dire sul linguaggio, non sui valori di verità

- In L_P si ha una sola regola di derivazione

$$\text{Modus Ponens (MP):} \quad \begin{array}{c} \varphi \rightarrow \psi \\ \varphi \\ \hline \psi \end{array}$$

Si scrive anche così:

$$\varphi \rightarrow \psi, \varphi \vdash \psi \quad (\text{da } \varphi \rightarrow \psi \text{ e } \varphi \text{ è derivabile } \psi \text{ - attenti alla notazione!})$$

Ogni fbf derivata tramite *MP* da due tautologie è una tautologia

Qualsiasi fbf derivata tramite *MP* dagli assiomi Ax_1, Ax_2, Ax_3 è una tautologia

I punti di partenza: assiomi

Gli assiomi (di una logica) sono fbf che ne riassumono le caratteristiche
 Descrivono (in forma compatta) gli *schemi di ragionamento*

- *Schemi di assioma* per L_P :

$\varphi, \psi, \chi \in \text{fbf}(L_P)$

$$\text{Ax1} \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$\text{Ax2} \quad (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$\text{Ax3} \quad (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

Ogni sostituzione delle variabili in Ax1, Ax2, Ax3 con una fbf è un assioma
 Gli schemi di assioma sono *tautologie*, così come ogni singola sostituzione

Esempi di fbf ottenute per sostituzione:

$$A \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$$

$$[\text{Ax1: } \varphi/A, \psi/\neg A]$$

$$(\neg(B \vee C) \rightarrow \neg D) \rightarrow (D \rightarrow (B \vee C))$$

$$[\text{Ax3: } \varphi/(B \vee C), \psi/D]$$

Derivazioni (o *dimostrazioni*)

- Una *dimostrazione* (o *derivazione*) di una fbf φ da un insieme di fbf Γ E` una successione *finita* di passi $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$

Ciascun passo α_i può essere di tre tipi:

- 1) Si ricava una fbf per sostituzione da uno degli assiomi Ax_n
- 2) Si importa una fbf presente nelle ipotesi Γ
- 3) Si ottiene una nuova fbf dalle fbf ai passi precedenti, tramite *Modus Ponens*

Nel passo finale, si ottiene la formula da dimostrare: $\alpha_n = \varphi$

In generale, si scrive allora $\Gamma \vdash \varphi$ “ φ è derivabile da Γ ”

La dimostrazione non è necessariamente unica (anzi)

Proprietà notevoli:

- | | |
|-------------------------------------|---|
| $\vdash Ax_n$ | (un assioma, o sostituzione, è derivabile anche da un Γ vuoto) |
| $\Gamma \vdash Ax_n$ | (un assioma, o sostituzione, è derivabile da qualsiasi Γ) |
| $\{\varphi, \dots\} \vdash \varphi$ | (qualsiasi φ è derivabile da un Γ che già la contiene) |

Derivazioni, esempio

- Il problema visto in precedenza (“Giorgio è contento”)

$$B \vee D \vee \neg(A \wedge C), B \vee C, A \vee D, \neg B \vdash D$$

Nella versione riscritta usando \neg e \rightarrow

$$C \rightarrow (\neg B \rightarrow (A \rightarrow D)), \neg B \rightarrow C, \neg A \rightarrow D, \neg B \vdash D$$

Per comodità

$$\Gamma \vdash D$$

- 1: $\Gamma \vdash \neg B \rightarrow C$
- 2: $\Gamma \vdash \neg B$
- 3: $\Gamma \vdash C$ (MP 1,2)
- 4: $\Gamma \vdash C \rightarrow (\neg B \rightarrow (A \rightarrow D))$
- 5: $\Gamma \vdash \neg B \rightarrow (A \rightarrow D)$ (MP 3,4)
- 6: $\Gamma \vdash A \rightarrow D$ (MP 2,5)
- 7: $\Gamma \vdash \neg A \rightarrow D$
- 8*: $\Gamma \vdash (\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$ (Se fosse un assioma, ma non lo è)
- 9: $\Gamma \vdash (\neg A \rightarrow D) \rightarrow ((A \rightarrow D) \rightarrow D)$ (Sost)
- 10: $\Gamma \vdash (A \rightarrow D) \rightarrow D$ (MP 7,9)
- 11: $\Gamma \vdash D$ (MP 6,10)

Derivazioni: Teorema 0

- Qualsiasi fbf implica se stessa

$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$

- 1: $\vdash (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$ (Ax2)
- 2: $\vdash (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi))$ (Ax1)
- 3: $\vdash (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$ (MP 1,2)
- 4: $\vdash (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$ (Ax1)
- 5: $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$ (MP 3,4)

Teorema di deduzione

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

- Perché:

Sia $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \psi$ una derivazione di ψ da $\Gamma \cup \{\varphi\}$

Per α_1 sono dati due casi:

$\alpha_1 \in \Gamma$ oppure α_1 è ottenuto da un assioma

Usando Ax1, $\Gamma \vdash \alpha_1 \rightarrow (\varphi \rightarrow \alpha_1)$ ma anche $\Gamma \vdash \alpha_1$ e quindi $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \alpha_1$

$\alpha_1 = \varphi$

Per il Teorema 0, $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$ e quindi $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \alpha_1$

Per α_n , assumendo che la tesi valga per α_{n-1} , sono dati ancora due casi:

$\alpha_j \in \Gamma$ oppure α_j è ottenuto da un assioma oppure $\alpha_j = \varphi$

Vedi il caso di α_1

α_j è ottenuto per *MP* da due passi precedenti α_i e $\alpha_i \rightarrow \alpha_j$

Se la tesi vale fino a $n-1$, allora si ha $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \alpha_i$ e $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow (\alpha_i \rightarrow \alpha_j)$

Usando Ax2, $\vdash (\varphi \rightarrow (\alpha_i \rightarrow \alpha_j)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \alpha_i) \rightarrow (\varphi \rightarrow \alpha_j))$

ed applicando due volte il *MP* si ottiene $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \alpha_j$

Derivazioni: Teorema 1

- L'ordine delle ipotesi non è rilevante

$$\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$1: (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)), \psi, \varphi \vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))$$

$$2: (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)), \psi, \varphi \vdash \varphi$$

$$3: (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)), \psi, \varphi \vdash \psi \rightarrow \chi$$

(MP 1,2)

$$4: (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)), \psi, \varphi \vdash \psi$$

$$5: (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)), \psi, \varphi \vdash \chi$$

(MP 3,4)

$$6: (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)), \psi \vdash \varphi \rightarrow \chi$$

(Ded)

$$7: (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$$

(Ded)

$$8: \vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

(Ded)

Derivazioni: Teorema 2

- Doppia negazione implica affermazione

$$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$$

- | | |
|---|----------|
| 1: $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow (\neg\neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$ | (Ax1) |
| 2: $\neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$ | (Ded) |
| 3: $\neg\neg\varphi \vdash (\neg\neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\neg\varphi)$ | (Ax3) |
| 4: $\neg\neg\varphi \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\neg\neg\varphi$ | (MP 3,2) |
| 5: $\neg\neg\varphi \vdash (\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi)$ | (Ax3) |
| 6: $\neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ | (MP 5,4) |
| 7: $\neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi$ | |
| 8: $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$ | (MP 6,7) |
| 9: $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ | (Ded) |

Derivazioni: Teorema 3

- Una regola è falsa se la premessa è vera e la conseguenza non lo è

$$\vdash \varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi))$$

- | | |
|---|---------------------|
| 1: $\varphi, (\varphi \rightarrow \psi) \vdash \psi$ | (Regola <i>MP</i>) |
| 2: $\varphi \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$ | (<i>Ded</i>) |
| 3: $\varphi \vdash ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi))$ | (Ax3) |
| 4: $\varphi \vdash \neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi)$ | (<i>MP</i> 3,2) |
| 5: $\vdash \varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi))$ | (<i>Ded</i>) |

Derivazioni: Teorema 4

- Da un assurdo si deriva qualsiasi cosa (“*Ex absurdo sequitur quodlibet*”):

$\vdash \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$ (vale a dire $\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$)

- 1: $\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ (Ax1)
- 2: $\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi$
- 3: $\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ (MP 1,2)
- 4: $\varphi, \neg\varphi \vdash (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ (Ax3)
- 5: $\varphi, \neg\varphi \vdash \varphi \rightarrow \psi$ (MP 4,3)
- 6: $\varphi, \neg\varphi \vdash \varphi$
- 7: $\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$ (MP 5,6)
- 8: $\varphi \vdash \neg\varphi \rightarrow \psi$ (Ded)
- 9: $\vdash \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$ (Ded)

Derivazioni: Teorema 5

- Se la falsità implica una contraddizione, allora dev'esser vero:

$$\vdash (\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$$

$$1: \neg\varphi \rightarrow \varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi$$

$$2: \neg\varphi \rightarrow \varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi \rightarrow \varphi$$

$$3: \neg\varphi \rightarrow \varphi, \neg\varphi \vdash \varphi$$

(MP 1,2)

$$4: \neg\varphi \rightarrow \varphi, \neg\varphi \vdash \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg(\neg\varphi \rightarrow \varphi))$$

(Teorema 4)

$$5: \neg\varphi \rightarrow \varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg(\neg\varphi \rightarrow \varphi)$$

(MP 3,4)

$$6: \neg\varphi \rightarrow \varphi, \neg\varphi \vdash \neg(\neg\varphi \rightarrow \varphi)$$

(MP 1,5)

$$7: \neg\varphi \rightarrow \varphi \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg(\neg\varphi \rightarrow \varphi)$$

(Ded)

$$8: \neg\varphi \rightarrow \varphi \vdash (\neg\varphi \rightarrow \neg(\neg\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$$

(Ax3)

$$9: \neg\varphi \rightarrow \varphi \vdash (\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$$

(MP 7,8)

$$10: \neg\varphi \rightarrow \varphi \vdash \neg\varphi \rightarrow \varphi$$

$$11: \neg\varphi \rightarrow \varphi \vdash \varphi$$

(MP 7,8)

$$12: \vdash (\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$$

(Ded)

Derivazioni: Teorema "X"

- Regola di risoluzione (il risultato cercato per il primo esempio):

$$\vdash (\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$$

- | | | |
|-----|---|-------------|
| 1: | $(\neg\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \rightarrow \psi) \vdash (\neg\varphi \rightarrow \psi)$ | |
| 2: | $(\neg\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \rightarrow \psi) \vdash (\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \varphi)$ | (Ax3) |
| 3: | $(\neg\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \rightarrow \psi) \vdash (\neg\psi \rightarrow \varphi)$ | (MP 1,2) |
| 4: | $(\neg\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \rightarrow \psi), \neg\psi \vdash \varphi$ | (Ded) |
| 5: | $(\neg\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \rightarrow \psi), \neg\psi \vdash \varphi \rightarrow \psi$ | |
| 6: | $(\neg\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \rightarrow \psi), \neg\psi \vdash \psi$ | (MP 4,5) |
| 7: | $(\neg\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \rightarrow \psi) \vdash (\neg\psi \rightarrow \psi)$ | (Ded) |
| 8: | $(\neg\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \rightarrow \psi) \vdash ((\neg\psi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$ | (Teorema 5) |
| 9: | $(\neg\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \rightarrow \psi) \vdash \psi$ | (MP 7,8) |
| 10: | $(\neg\varphi \rightarrow \psi) \vdash ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$ | (Ded) |
| 11: | $\vdash (\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$ | (Ded) |

Proprietà delle derivazioni

- *Monotonia sintattica*

Dati Γ e Δ , se $\Gamma \vdash \varphi$ allora $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$

Qualsiasi derivazione di φ da Γ rimane valida anche estendendo Γ

- *Compattezza sintattica*

Se $\Gamma \vdash \varphi$ allora esiste un insieme Σ **finito**, con $\Sigma \subseteq \Gamma$, per cui $\Sigma \vdash \varphi$

Una derivazione di φ da Γ prevede un numero *finito* di passi,
quindi può coinvolgere al più un numero *finito* di fbf in Γ

- *Transitività*

Se per ogni $\varphi \in \Sigma$ si ha che $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Sigma \vdash \psi$ allora $\Gamma \vdash \psi$

Basta applicare ripetutamente il teorema di deduzione ed il *MP*

Teorie, teoremi, assiomatizzazione

- Teoria = insieme di fbf

Un insieme di fbf Σ (comunque definito) può essere detto una **teoria**

- Teoremi = insieme di fbf derivabili da un insieme di partenza

Dato un insieme di fbf Γ , l'insieme dei **teoremi** di Γ è l'insieme di tutte le fbf *derivabili* a partire da Γ

$$\text{Teoremi}(\Gamma) = \{\varphi : \Gamma \vdash \varphi\}$$

- Assiomatizzazione = insieme di fbf che riassume un'intera teoria

Un insieme di fbf Γ è un'assiomatizzazione di una teoria Σ sse

$$\Sigma \equiv \text{Teoremi}(\Gamma)$$

Il sistema di assiomi A_{XN} descrive la *teoria* delle fbf *valide* della **logica proposizionale classica** L_P

La formalizzazione di una logica basata su l'assiomatizzazione delle fbf valide è anche detta 'a la Hilbert'

Proprietà delle derivazioni (2)

- *Correttezza*

Le fbf φ derivabili da un insieme di fbf Γ sono una *conseguenza logica* di Γ

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$$

In una derivazione,

l'unico passo in cui si derivano nuove fbf è il *MP* che preserva la conseguenza logica

- *Coerenza sintattica*

Un insieme Γ è coerente se da Γ non è derivabile qualsiasi φ

Si veda il Teorema 3: da una contraddizione si deriva qualsiasi fbf

Inoltre, per la correttezza, solo le conseguenze logiche sono derivabili

- *Riduzione all'assurdo (refutazione)*

$$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ è incoerente } \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$$

$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ è incoerente significa che, per qualsiasi ψ , $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$

In particolare, si ha anche $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$

Per il teorema di deduzione $\Gamma \vdash \neg\varphi \rightarrow \varphi$

Dal Teorema 5 $\Gamma \vdash (\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$

Applicando il *MP* $\Gamma \vdash \varphi$

Completezza

▪ Completezza

Le *tautologie* (fbf valide) sono fbf derivabili dagli assiomi Ax_n

$$\models \varphi \Rightarrow \vdash \varphi$$

Perché:

Si consideri la tavola di verità di φ e dell'insieme di simboli atomici A_i che vi occorrono

Per ciascuna riga si costruisca un insieme di fbf $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$

dove $B_i = A_i$ se A_i ha valore 1 e $B_i = \neg A_i$ se A_i ha valore 0

Si prenda inoltre $\psi = \varphi$ se nella riga φ ha valore 1 e $\psi = \neg \varphi$ se φ ha valore 0

Allora $B_1, B_2, \dots, B_n \vdash \psi$

Chiaramente, la cosa è vera quando φ è una fbf atomica

Infatti, se $\psi = \varphi = A_1$ si ha

$$A_1 \vdash A_1$$

Se invece $\psi = \neg \varphi = \neg A_1$

$$\text{si ha } \neg A_1 \vdash \neg A_1$$

	A_1	A_2	...	A_n	φ
2^n righe	0	0	...	0	V_1
	0	0	...	1	V_2

	1	1	...	1	V_{2^n}

Completezza (2)

Per mostrare che $B_1, B_2, \dots, B_n \vdash \psi$ in generale si procede per induzione sulla composizione di φ assumendo che il fatto valga per le componenti più semplici

Primo caso: $\varphi = \neg\alpha$

Quando α ha valore 1, φ ha valore 0. Per l'ipotesi induttiva $B_1, B_2, \dots, B_n \vdash \alpha$

Quindi (variante del Teorema 2), $B_1, B_2, \dots, B_n \vdash \alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$ e dunque

$B_1, B_2, \dots, B_n \vdash \neg\neg\alpha$ (MP). Ma $\neg\neg\alpha = \neg\varphi = \psi$

Quando α ha valore 0, φ ha valore 1. Per l'ipotesi induttiva $B_1, B_2, \dots, B_n \vdash \neg\alpha$

Ma $\neg\alpha = \varphi = \psi$

Secondo caso: $\varphi = \alpha \rightarrow \beta$

Quando α ha valore 0, φ ha valore 1. Per l'ipotesi induttiva $B_1, B_2, \dots, B_n \vdash \neg\alpha$

Quindi (variante del Teorema 4), $B_1, B_2, \dots, B_n \vdash \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ e dunque

$B_1, B_2, \dots, B_n \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$ (MP). Ma $(\alpha \rightarrow \beta) = \varphi = \psi$

Quando β ha valore 1, φ ha valore 1. Per l'ipotesi induttiva $B_1, B_2, \dots, B_n \vdash \beta$

Quindi (Ax1), $B_1, B_2, \dots, B_n \vdash \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ e dunque $B_1, B_2, \dots, B_n \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$ (MP)

Quando α ha valore 1 e β ha valore 0, φ ha valore 0. Per l'ipotesi induttiva

$B_1, B_2, \dots, B_n \vdash \alpha$ e $B_1, B_2, \dots, B_n \vdash \neg\beta$.

Quindi (Teorema 3), $B_1, B_2, \dots, B_n \vdash \alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta))$ e dunque

$B_1, B_2, \dots, B_n \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$ (doppio MP). Ma $\neg(\alpha \rightarrow \beta) = \neg\varphi = \psi$

Completezza (3)

Per mostrare che: $\models \varphi \Rightarrow \vdash \varphi$

Se φ è una tautologia, allora si ha $B_1, B_2, \dots, B_n \vdash \varphi$

In particolare, considerando $A_1, A_1, B_2, \dots, B_n \vdash \varphi$ e $\neg A_1, B_2, \dots, B_n \vdash \varphi$

Quindi si ha $B_2, \dots, B_n \vdash A_1 \rightarrow \varphi$ (*Ded*) e $B_2, \dots, B_n \vdash \neg A_1 \rightarrow \varphi$ (*Ded*)

Dal Teorema "X", $B_2, \dots, B_n \vdash (\neg A_1 \rightarrow \varphi) \rightarrow ((A_1 \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$ e dunque $B_2, \dots, B_n \vdash \varphi$ (doppio *MP*).

Iterando il procedimento per tutte le A_i si ottiene $\vdash \varphi$

▪ Completezza

Le *conseguenze logiche* di un Γ qualsiasi sono fbf φ *derivabili*

$$\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$$

Perché:

Si consideri un insieme Σ finito, con $\Sigma \subseteq \Gamma$, per cui $\Sigma \vdash \varphi$ (Compattezza)

Applicando ripetutamente il teorema di deduzione, si ottiene una tautologia e si ritorna al caso precedente

Indipendenza degli schemi A_{Xn}

- Insieme minimo

Per provare la completezza di A_{Xn} sono stati usati tutti e tre gli schemi

- Indipendenza

I tre schemi sono **logicamente indipendenti**:

Non è possibile derivare uno di essi dai restanti due

- Esistono altre assiomatizzazioni di L_P

Si può avere anche uno schema solo

Non si può invece evitare di usare schemi di assioma

Avendo, di fatto, un insieme di assiomi infinito

In alternativa, si può usare un insieme finito introducendo una nuova regola di inferenza che permette di 'clonare' gli assiomi per sostituzione (cioè si tratta della stessa cosa in forma diversa)

Diversi assiomi, diverse teorie

- Assiomi (schemi di assioma) della logica proposizionale

$$\text{Ax1} \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$\text{Ax2} \quad (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$\text{Ax3} \quad (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

La teoria assiomatizzata da Ax1, Ax2 e Ax3 coincide con l'insieme delle fbf valide
Ricordare la proprietà di completezza

Diversi assiomi, diverse teorie

- Assiomi (schemi di assioma) della logica proposizionale

$$\text{Ax1} \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$\text{Ax2} \quad (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$\text{Ax3} \quad (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

La teoria assiomatizzata da Ax1, Ax2 e Ax3 coincide con l'insieme delle fbf valide

- Assiomi di una teoria specifica

$$r_1: \quad \neg C \rightarrow (\neg L \wedge \neg A \wedge \neg M)$$

$$r_2: \quad G \rightarrow \neg M$$

$$r_3: \quad \neg M \rightarrow \neg P$$

Quali fbf sono derivabili dalle regole r_1 , r_2 ed r_3 ?

Notare che le tre regole NON sono fbf valide

Ricordando la definizione di derivazione:

- Tutte le fbf valide ($\vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$)
- Altre fbf specifiche (p.es. $\neg C \rightarrow (\neg L \wedge \neg A \wedge \neg P)$, $G \rightarrow \neg P$)

Nemmeno queste sono fbf valide

Diversi assiomi, diverse teorie

- Assiomi (schemi di assioma) della logica proposizionale

$$\text{Ax1} \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$\text{Ax2} \quad (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$\text{Ax3} \quad (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

Le fbf della teoria assiomatizzata da Ax1, Ax2 e Ax3 sono vere in tutti i mondi possibili

- Assiomi di una teoria specifica

$$r_1: \quad \neg C \rightarrow (\neg L \wedge \neg A \wedge \neg M)$$

$$r_2: \quad G \rightarrow \neg M$$

$$r_3: \quad \neg M \rightarrow \neg P$$

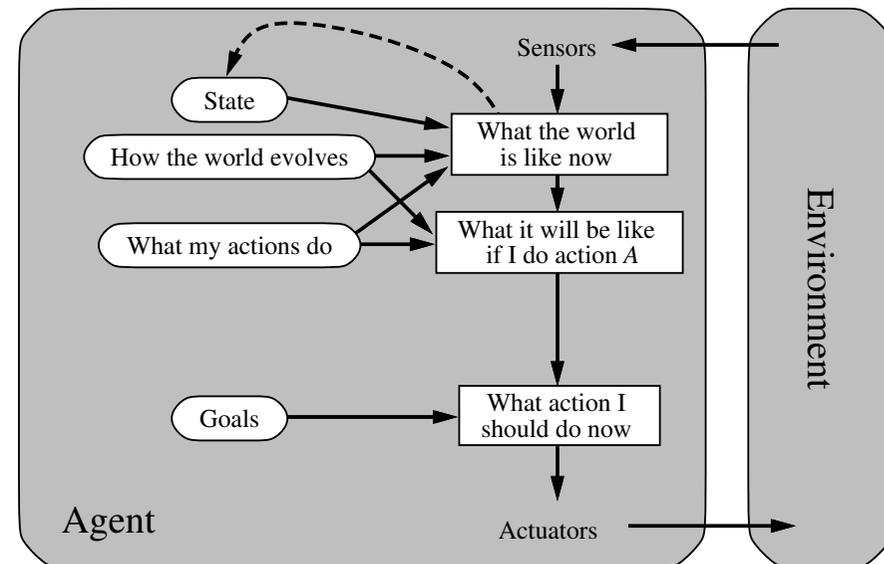
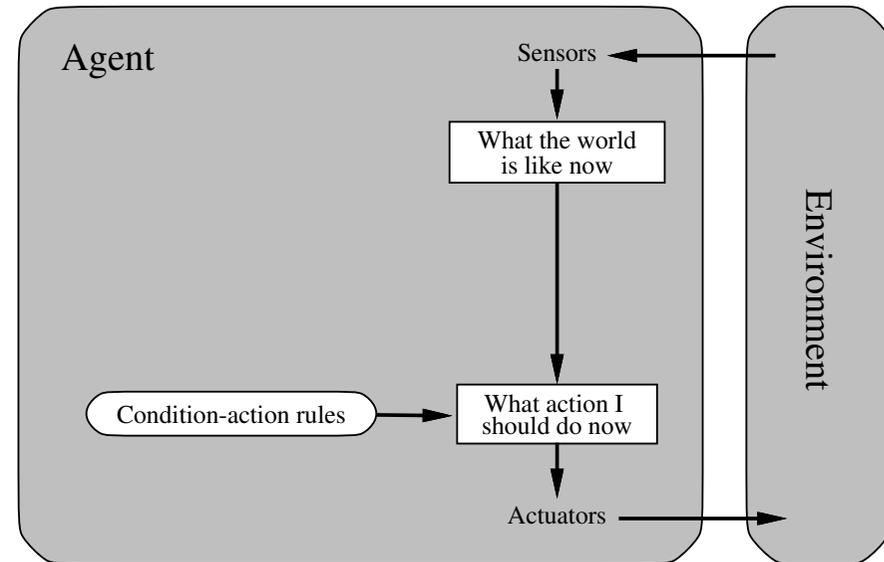
Le fbf della teoria assiomatizzata da r_1 , r_2 ed r_3 sono (simultaneamente) vere solo nei mondi possibili in cui sono vere r_1 , r_2 ed r_3

Gli assiomi di una teoria specifica agiscono con una sorta di 'filtro' sui mondi possibili

Agenti e fbf

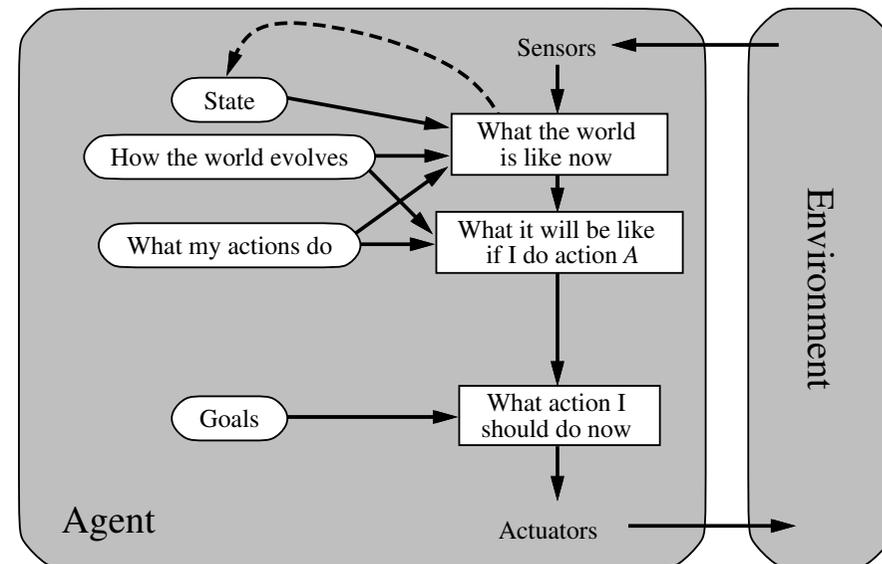
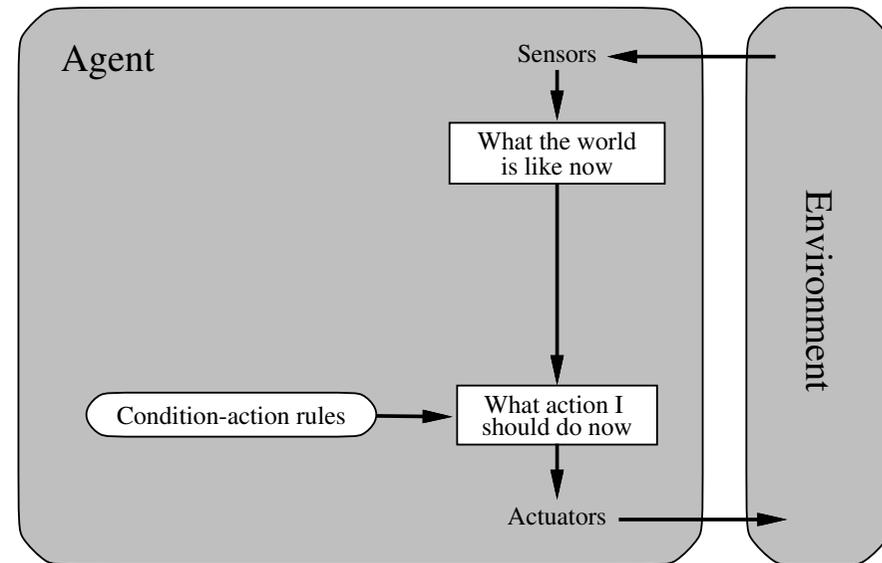
- Le fbf rappresentano
 - Percezioni stato dell'ambiente esterno accessibile tramite i sensori
 - Stato interno dell'agente
 - Previsioni evoluzione dell'ambiente
 - Possibili effetti delle azioni
 - Obiettivi (goal)
 - Azioni
 - Vincoli

- Calcolo simbolico



Agenti e fbf

- Le fbf rappresentano
 - Percezioni stato dell'ambiente esterno accessibile tramite i sensori
 - Stato interno dell'agente
 - Previsioni evoluzione dell'ambiente
 - Possibili effetti delle azioni
 - Obiettivi (goal)
 - Azioni
 - Vincoli
- Calcolo simbolico
 - Le fbf che descrivono le conoscenze 'a priori' dell'agente sono come assiomi specifici
 - Non sono tautologie



Agenti e fbf

Le fbf rappresentano

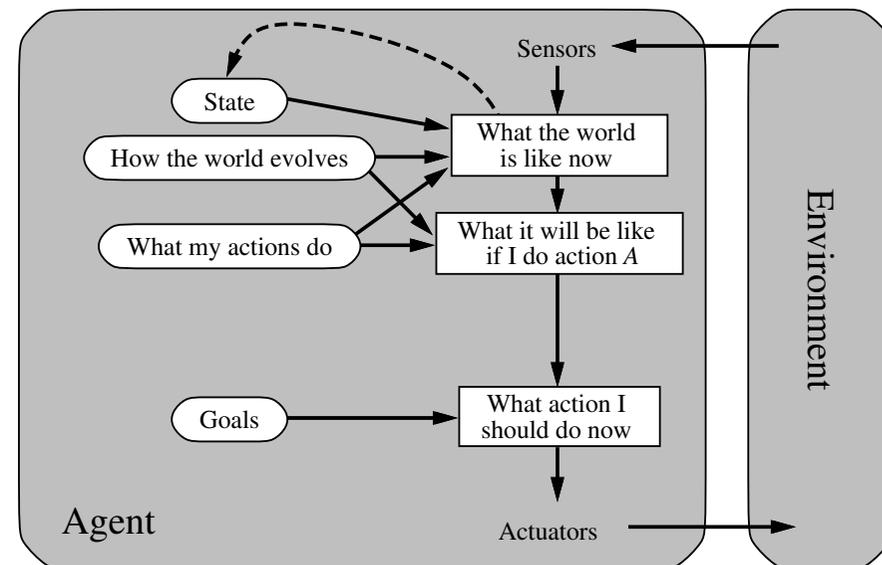
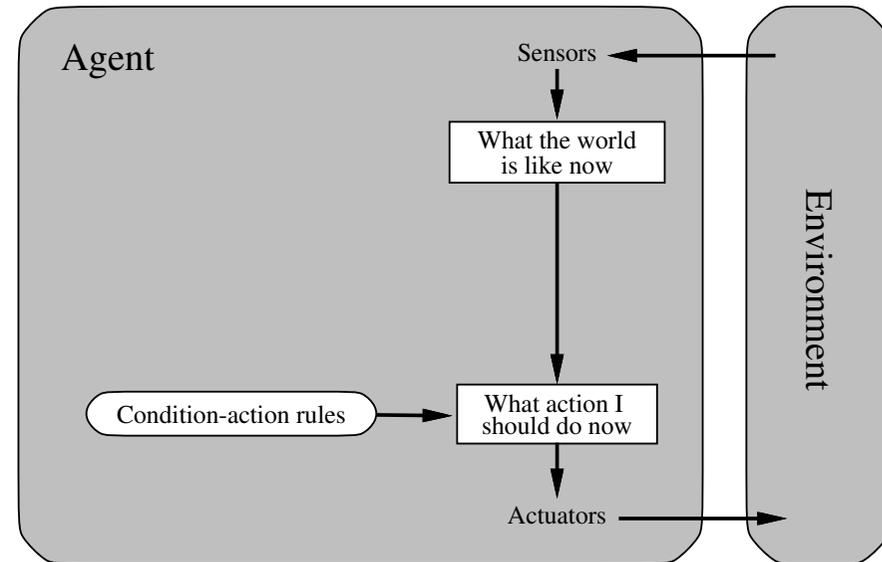
- Percezioni stato dell'ambiente esterno accessibile tramite i sensori
- Stato interno dell'agente
- Previsioni evoluzione dell'ambiente
- Possibili effetti delle azioni
- Obiettivi (goal)
- Azioni
- Vincoli

Calcolo simbolico

Le fbf che descrivono le conoscenze 'a priori' dell'agente sono come assiomi specifici

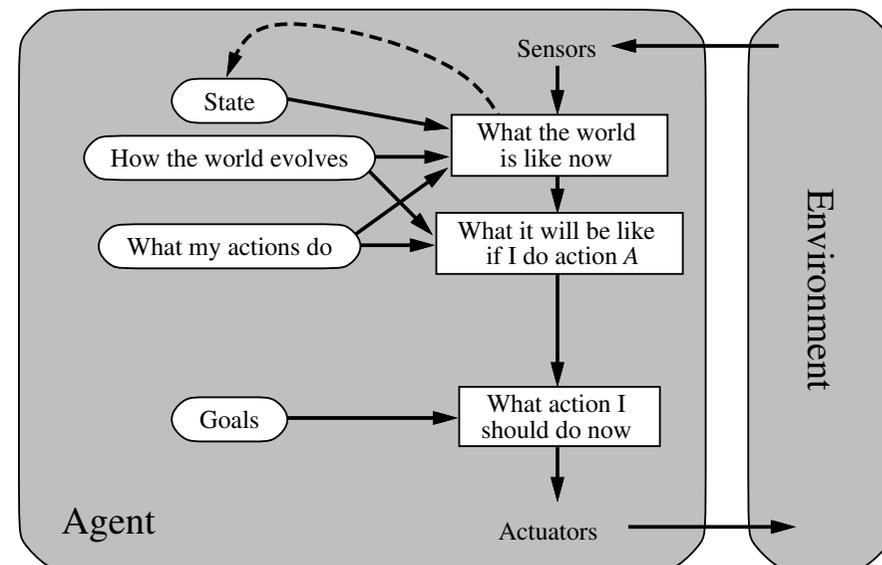
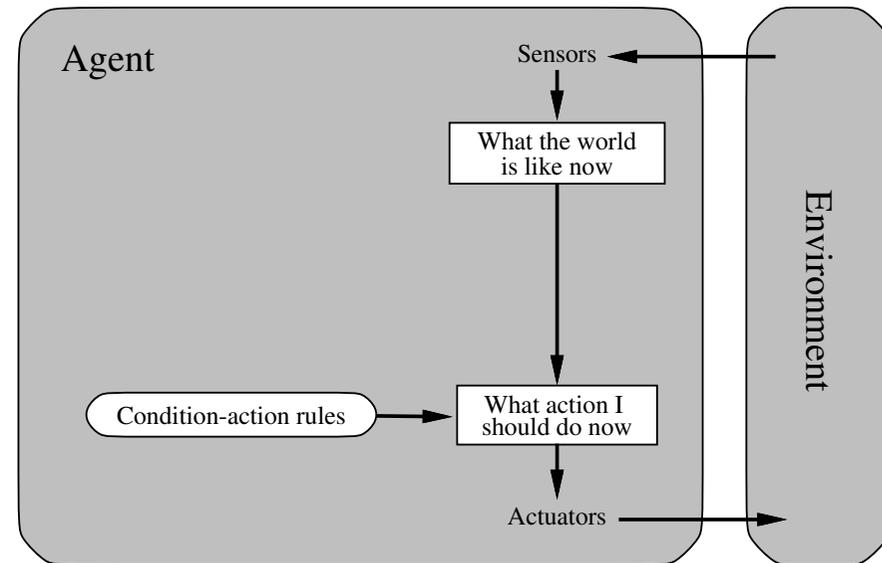
Non sono tautologie

Le fbf che descrivono le conoscenze contingenti (p.es. percezioni specifiche) sono ulteriori assiomi specifici



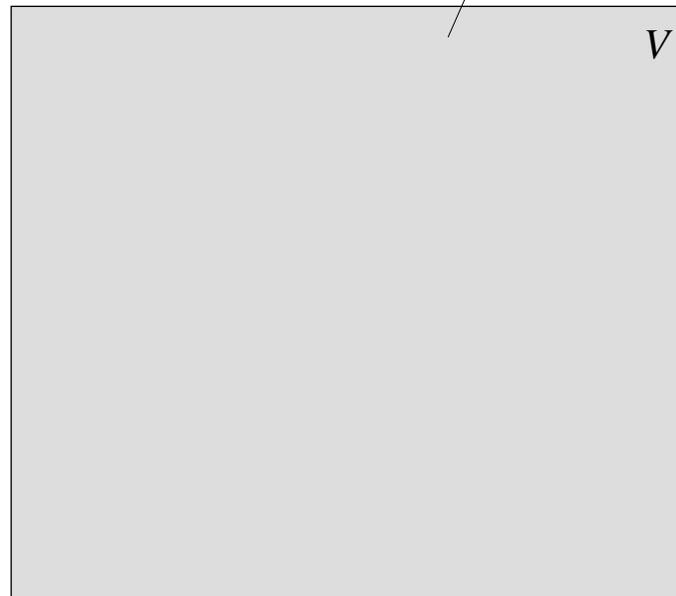
Agenti e fbf

- Le fbf rappresentano
 - Percezioni stato dell'ambiente esterno accessibile tramite i sensori
 - Stato interno dell'agente
 - Previsioni evoluzione dell'ambiente
 - Possibili effetti delle azioni
 - Obiettivi (goal)
 - Azioni
 - Vincoli
- Calcolo simbolico
 - Calcolo delle formule specifiche derivabili
 - Quali?
 - Tutte?
 - Solo quelle *che servono?*
 - Le fbf valide descrivono la logica (gli *schemi di ragionamento*) che l'agente utilizza

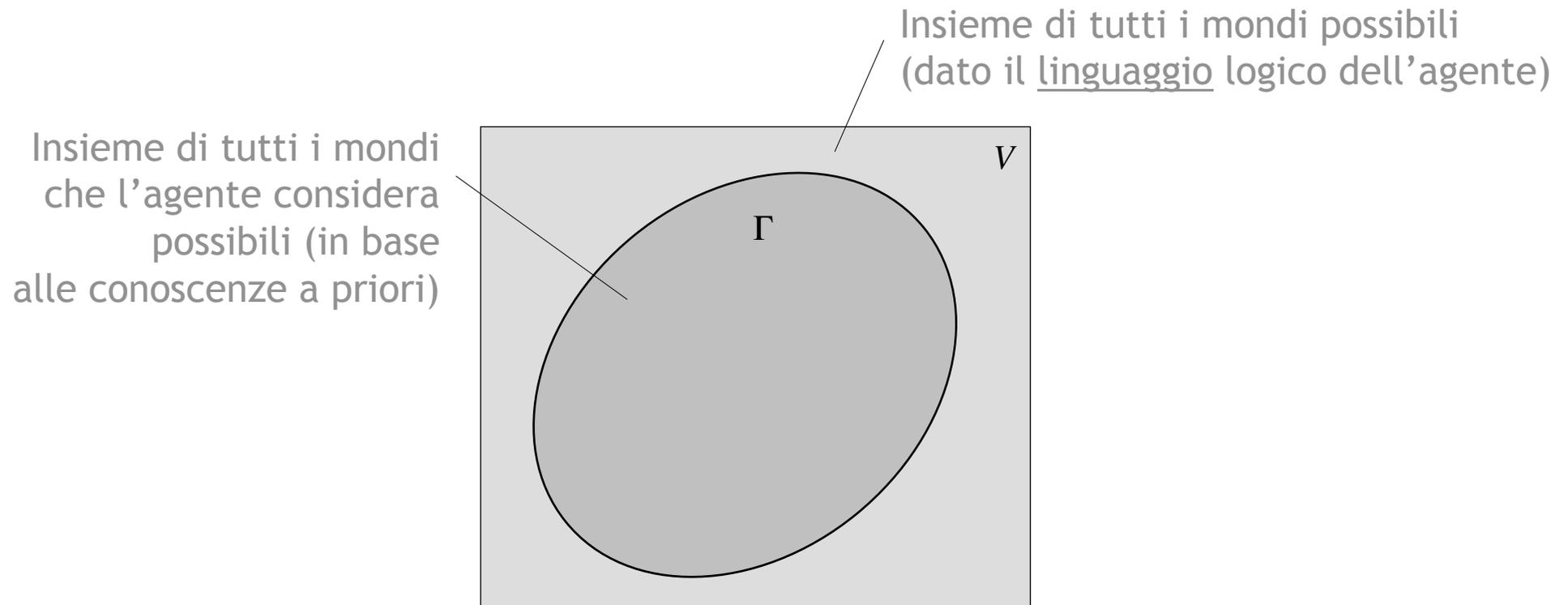


Conoscenze 'a priori' e contingenti

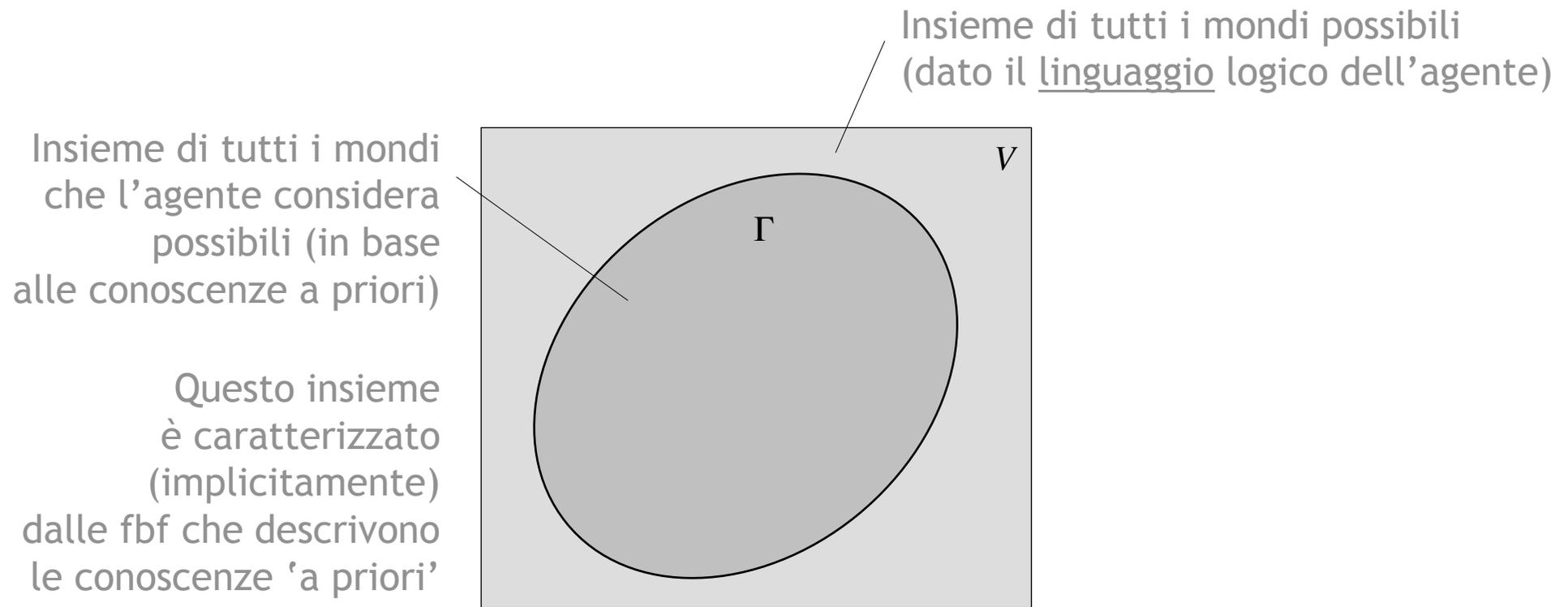
Insieme di tutti i mondi possibili
(dato il linguaggio logico dell'agente)



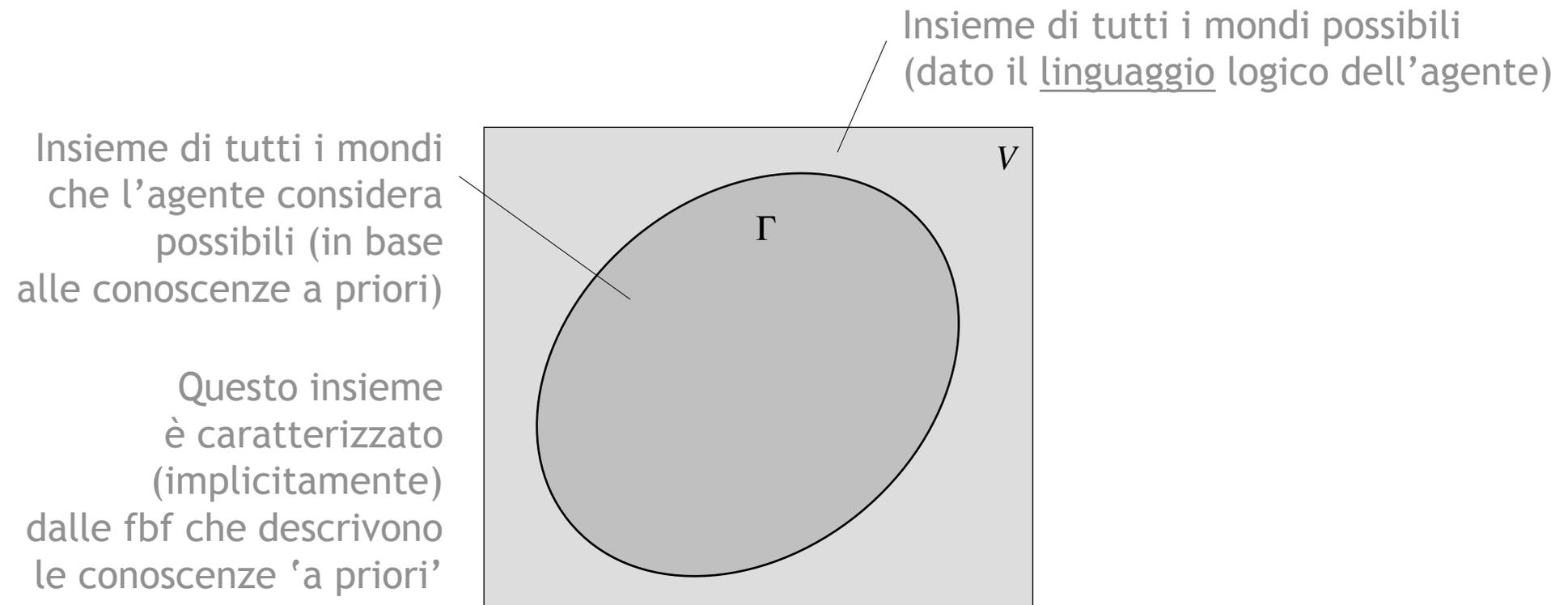
Conoscenze 'a priori' e contingenti



Conoscenze 'a priori' e contingenti



Conoscenze 'a priori' e contingenti



Esempio:

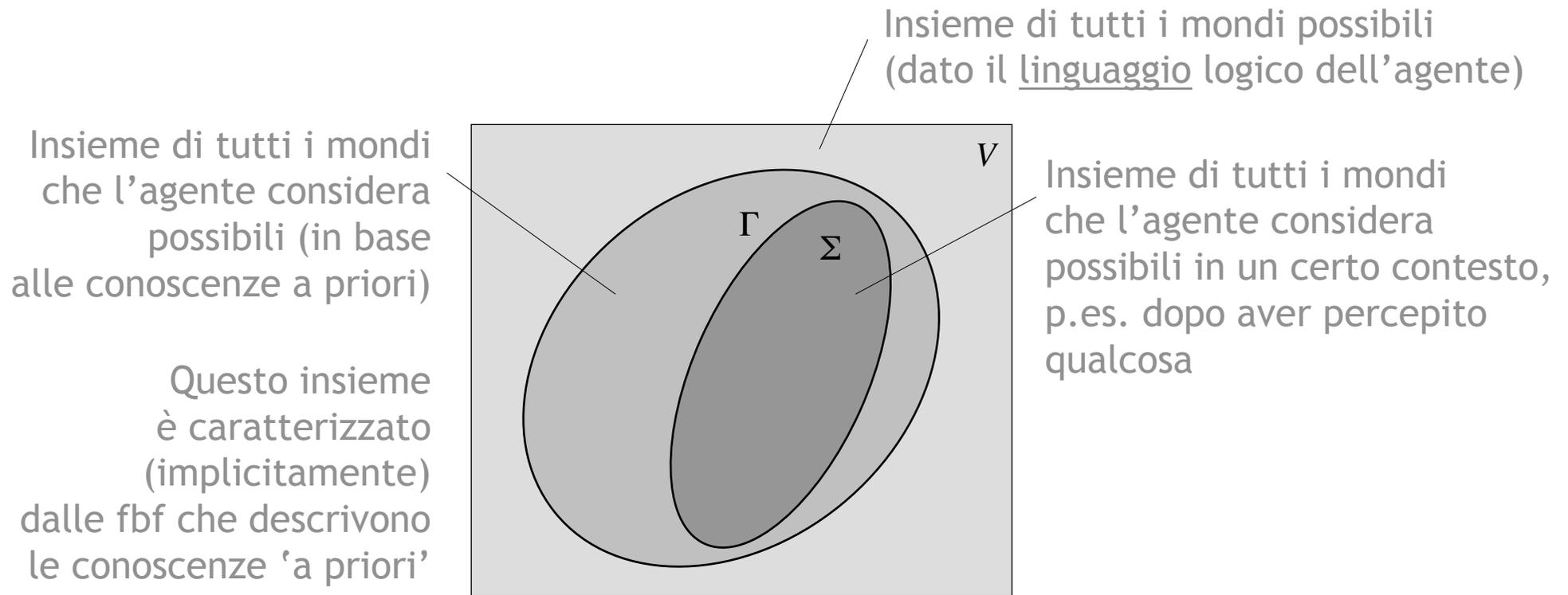
$$r_1: \quad \neg C \rightarrow (\neg L \wedge \neg A \wedge \neg M)$$

$$r_2: \quad G \rightarrow \neg M$$

$$r_3: \quad \neg M \rightarrow \neg P$$

(descrizione dei possibili malfunzionamenti)

Conoscenze 'a priori' e contingenti



Esempio:

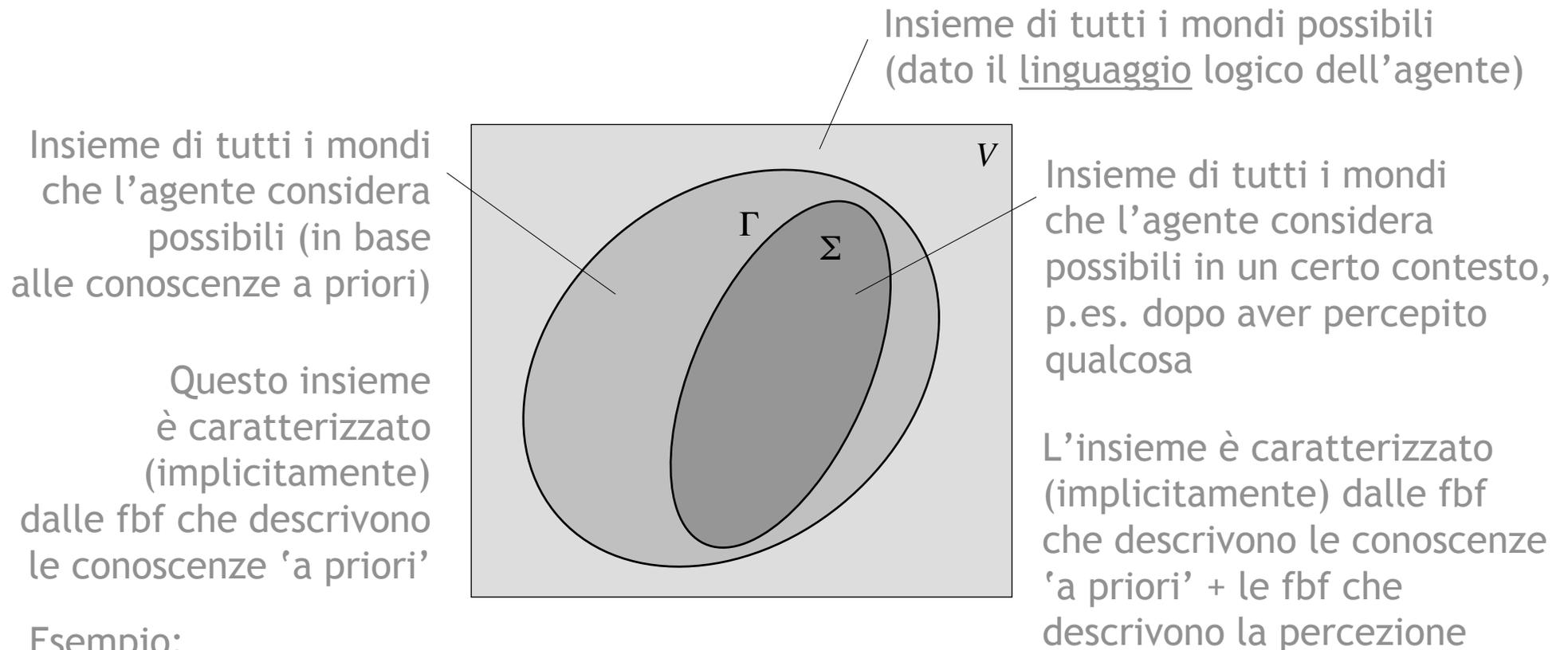
$$r_1: \quad \neg C \rightarrow (\neg L \wedge \neg A \wedge \neg M)$$

$$r_2: \quad G \rightarrow \neg M$$

$$r_3: \quad \neg M \rightarrow \neg P$$

(descrizione dei possibili malfunzionamenti)

Conoscenze 'a priori' e contingenti



Esempio:

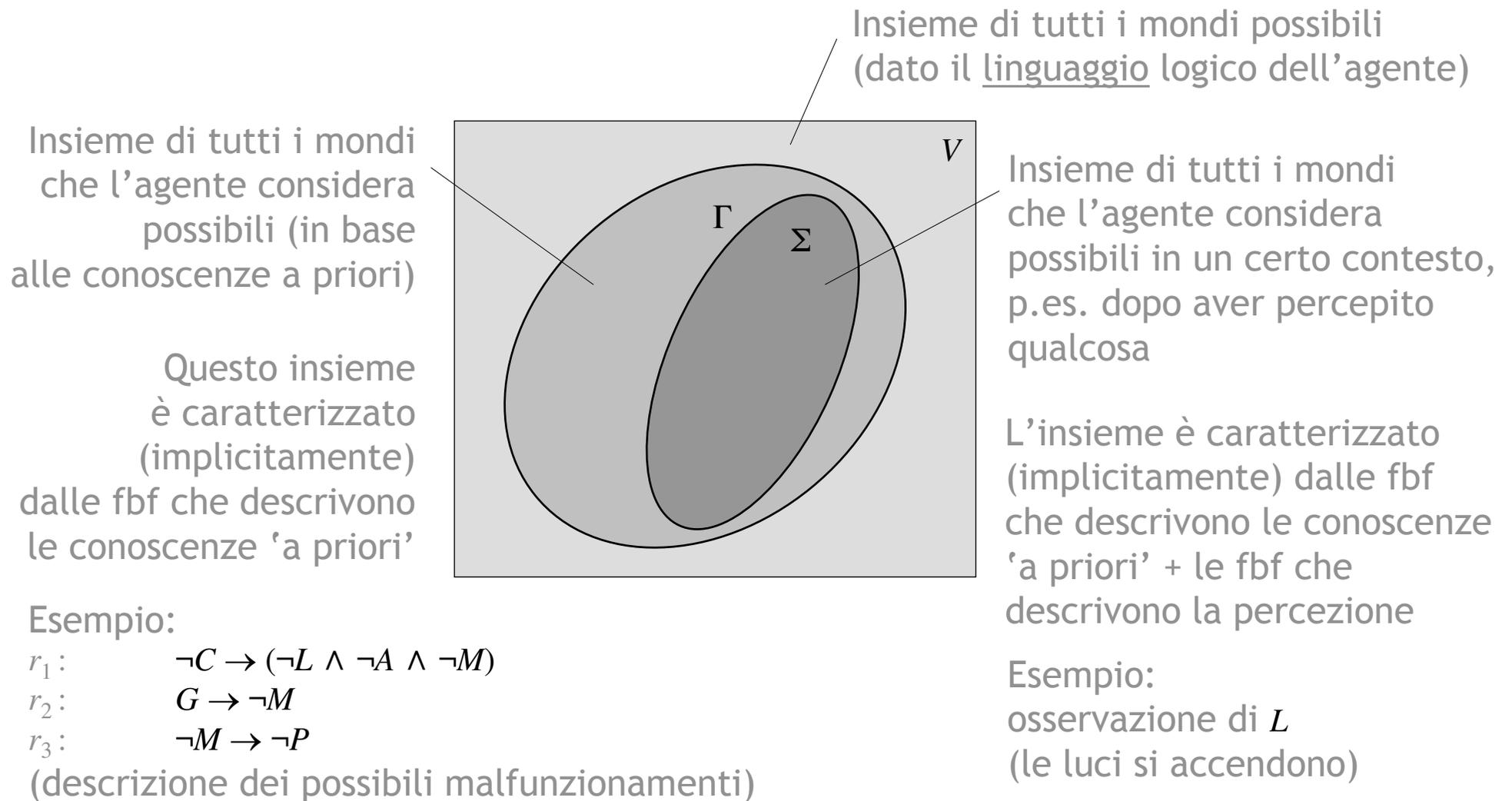
$$r_1: \quad \neg C \rightarrow (\neg L \wedge \neg A \wedge \neg M)$$

$$r_2: \quad G \rightarrow \neg M$$

$$r_3: \quad \neg M \rightarrow \neg P$$

(descrizione dei possibili malfunzionamenti)

Conoscenze 'a priori' e contingenti



Esempio:

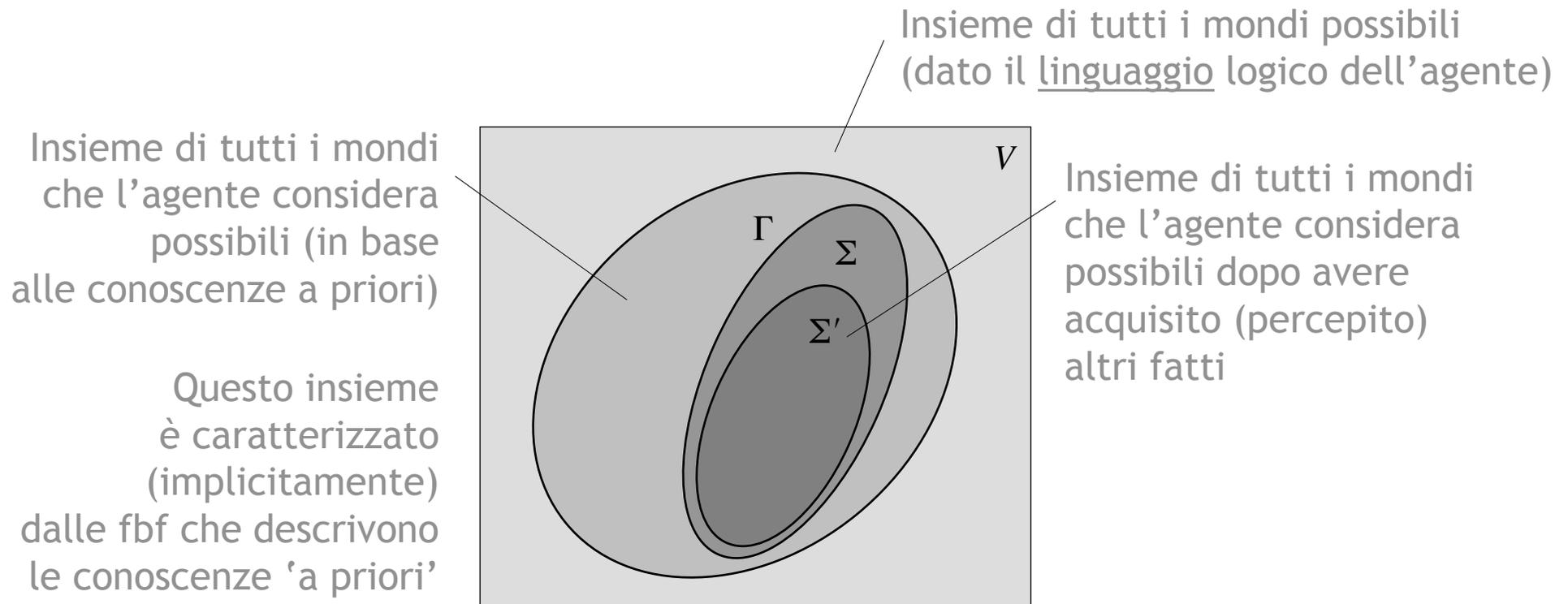
$$r_1: \quad \neg C \rightarrow (\neg L \wedge \neg A \wedge \neg M)$$

$$r_2: \quad G \rightarrow \neg M$$

$$r_3: \quad \neg M \rightarrow \neg P$$

(descrizione dei possibili malfunzionamenti)

Conoscenze 'a priori' e contingenti



Esempio:

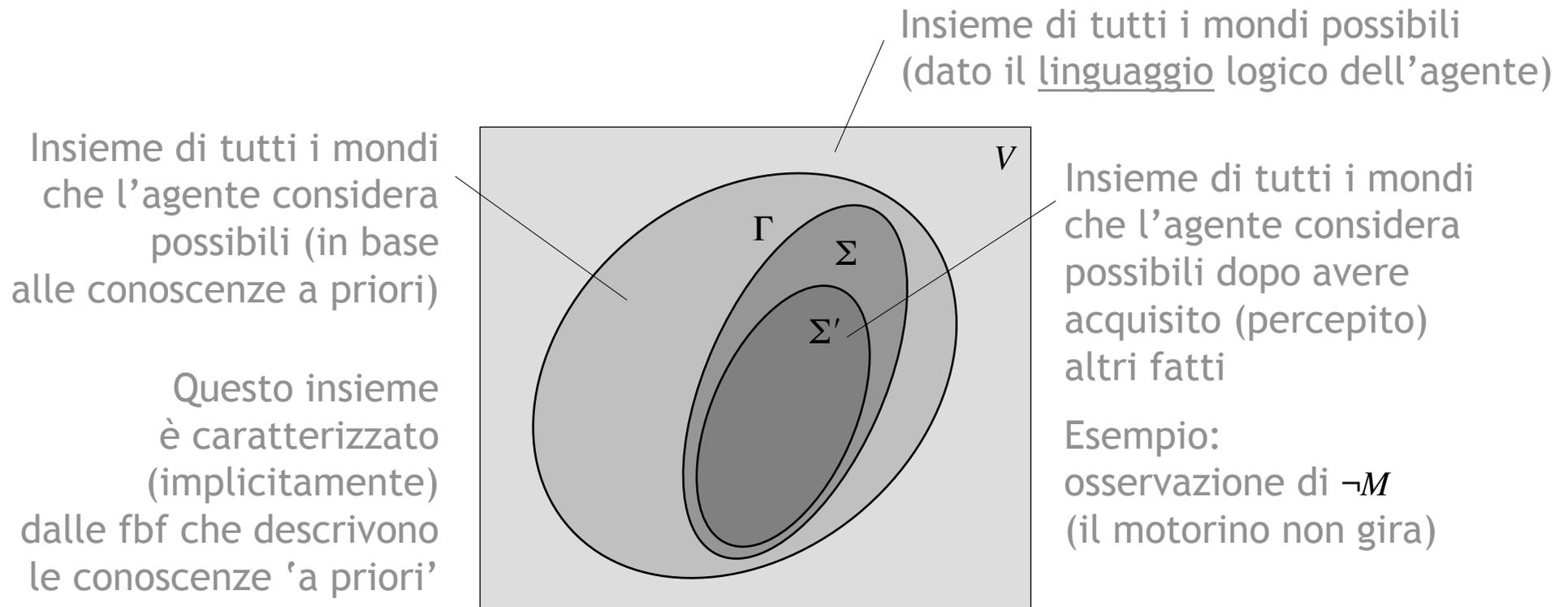
$$r_1: \quad \neg C \rightarrow (\neg L \wedge \neg A \wedge \neg M)$$

$$r_2: \quad G \rightarrow \neg M$$

$$r_3: \quad \neg M \rightarrow \neg P$$

(descrizione dei possibili malfunzionamenti)

Conoscenze 'a priori' e contingenti



Esempio:

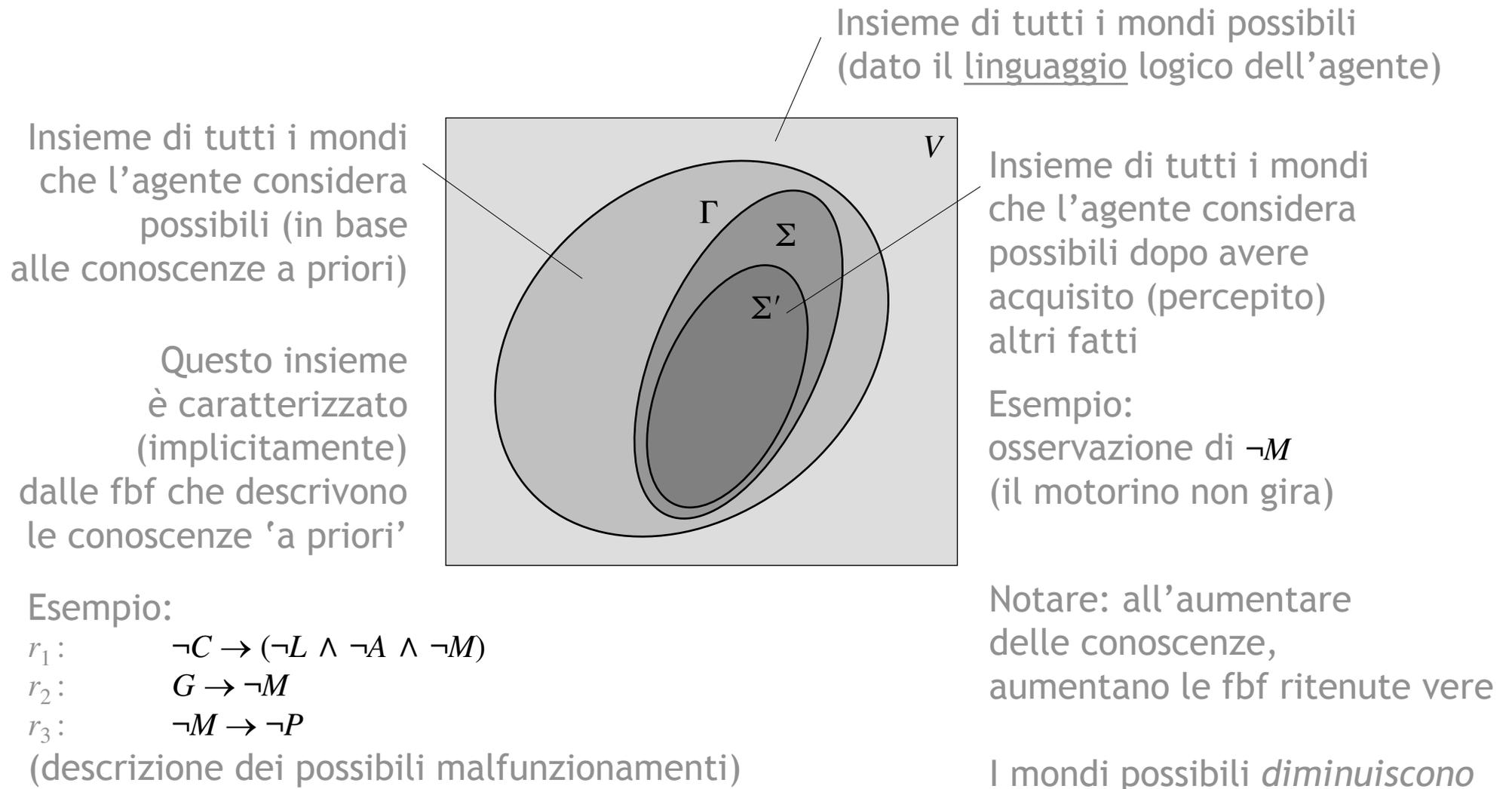
$$r_1: \quad \neg C \rightarrow (\neg L \wedge \neg A \wedge \neg M)$$

$$r_2: \quad G \rightarrow \neg M$$

$$r_3: \quad \neg M \rightarrow \neg P$$

(descrizione dei possibili malfunzionamenti)

Conoscenze 'a priori' e contingenti



Agenti e mondi possibili

■ Conoscenze dell'agente

Esprese come fbf logiche

Stato interno dell'agente

Previsioni evoluzione dell'ambiente

Possibili effetti delle azioni

Obiettivi (goal)

Azioni

Vincoli

■ Calcolo simbolico

Calcolo delle formule specifiche derivabili

Quali?

Tutte?

Solo quelle *che servono?*

Le fbf valide descrivono la logica (gli *schemi di ragionamento*) che l'agente utilizza

