Intelligenza Artificiale I

Logica formale

Primi elementi

Marco Piastra

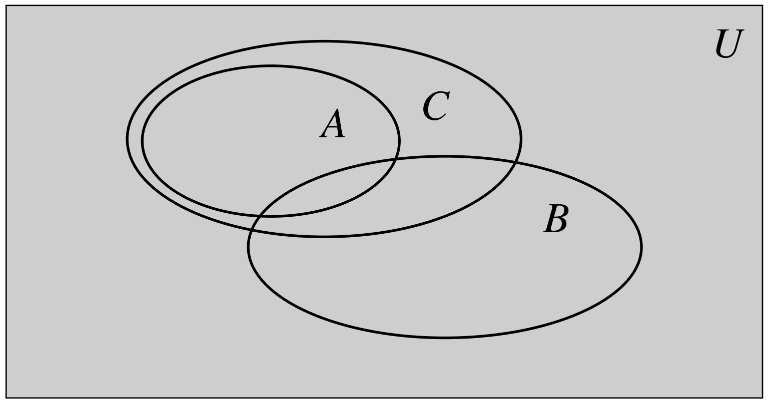
Sottoinsiemi e operatori

- Sottoinsiemi

U	Insieme di riferimento (insieme sostegno)
$\{A, B, C, \ldots\}$	Collezione di sottoinsiemi di U
$\varnothing$	Insieme vuoto
	(notare che $\varnothing \subseteq X, \forall X \subseteq U$)

- Operatori

$A \cup B$	unione
$A \cap B$	intersezione
A^c	complemento



Algebra dei sottoinsiemi

- Proprietà di base

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C\,,\quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *associatività*

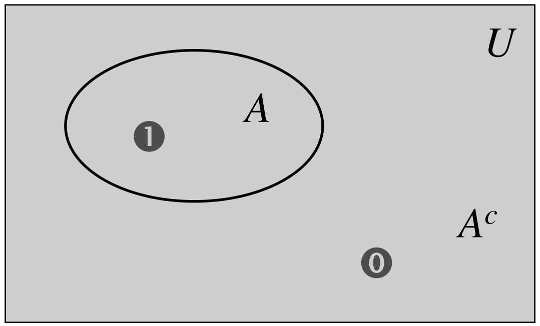
$A \cup B = B \cup A\,,\quad A \cap B = B \cap A$ *commutatività*

$A \cup (A \cap B) = A\,,\quad A \cap (A \cup B) = A$ *assorbimento*

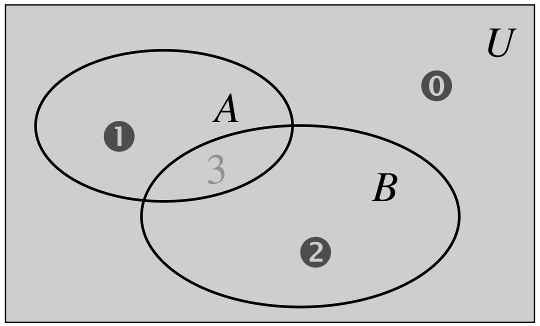
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\,,\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *distributività*

$A \cup A^c = U\,,\quad A \cap A^c = \varnothing$

Esempi (calcolo intuitivo, operazioni sulle parti di U)



A = ❶
A^c = ⓿
$A \cup A^c$ = ❶ + ⓿
U = ❶ + ⓿



A = ❶ + ❸
B = ❷ + ❸
$A \cup B$ = ❶ + ❷ + ❸
$A \cap (A \cup B)$ = ❶ + ❸

Altre proprietà

- Identità dimostrabili

$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$ *idempotenza*

$A \cup \varnothing = A, \quad A \cap U = A$

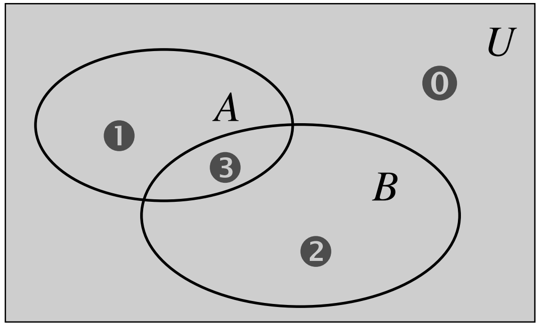
$A \cup U = U, \quad A \cap \varnothing = \varnothing$

$U^c = \varnothing, \quad \varnothing^c = U$

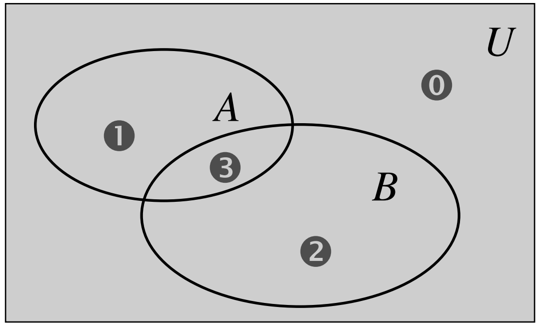
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ *leggi di De Morgan*

$(A^c)^c = A$

Esempi: legge di De Morgan ed una non-legge



A = ❶ + ❸
A^c = ❷ + ⓿
B = ❷ + ❸
B^c = ❶ + ⓿
$A \cup B$ = ❶ + ❷ + ❸
$(A \cup B)^c$ = ⓿
$A^c \cap B^c$ = ⓿



$A^c \cup B = U$
A^c = ❷ + ⓿
B = ❷ + ❸
$A^c \cup B$ = ❷ + ⓿ + ❸
Vale solo se ❶ = $\varnothing$
cioè se $A \subseteq B$

Algebra di Boole

Dato un insieme U, qualsiasi collezione di sottoinsiemi di U
che risulti *chiusa* rispetto alle operazioni $\cup$, $\cap$ e ^{c}

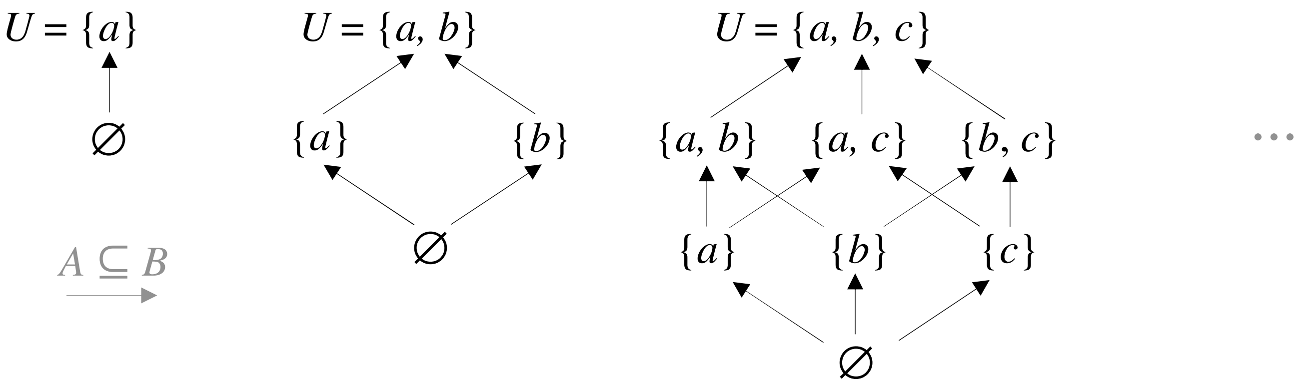
(le operazioni $\cup$, $\cap$ e ^{c} godono delle proprietà di base descritte in precedenza)

è un'algebra di Boole

- Un metodo semplice per costruire un'algebra di Boole:

  Scegliere l'insieme U

  Costruire la collezione di tutti i <u>sottoinsiemi</u> di U (detto anche **insieme delle parti**, 2^U)



Operatori logici

Si considera l'algebra più semplice: $\{U, \varnothing\}$ (~ 'tutto' e 'niente'; 'vero' e 'falso')

Algebra a due valori

- Notazione

  Si indicano U con 1 ('vero') e $\varnothing$ con 0 ('falso')

  Si sostituiscono i simboli delle operazioni $\cup$, $\cap$ e ^{c} rispettivamente con $\vee$, $\wedge$ e $\neg$

- Tavole di verità (*truth tables*)

  Definizione in forma concisa delle operazioni $\vee$, $\wedge$ e $\neg$ nel caso a due valori $\{1, 0\}$

OR

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

AND

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

NOT

A	$\neg A$
0	1
1	0

Espressioni composite

Il metodo delle tavole di verità

Può essere esteso alle espressioni comunque composite

Ad esempio per verificare assiomi e leggi dell'algebra di Boole

Le due colonne sono identiche

1a legge di De Morgan

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

In generale

Un'espressione composita è una funzione

$f(x_1, x_2, ..., x_n) : \{1, 0\}^n \to \{1, 0\}$

dove $x_1, x_2, ..., x_n$ sono le lettere che compaiono nell'espressione

Quante operazioni base?

- Quanti operatori logici occorrono per rappresentare tutte le possibili funzioni?
  - Cioè, per poter esprimere qualsiasi funzione come espressione composita?

2^n righe

x_1	x_2	...	x_n	$f(x_1, x_2, ..., x_n)$
0	0	...	0	f_1
0	0	...	1	f_2
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
1	1	...	1	f_{2^n}

Le tre operazioni $\vee$, $\wedge$ e $\neg$ formano una base adeguata

- La tavola di verità può essere riscritta come un'unica espressione:
- per ciascuna riga r in cui $f_r = 1$, si combinano con $\wedge$ le n lettere A_1, A_2, ... A_n
  prendendo A_i se la i-esima casella vale 1 e $\neg A_i$ se vale 0
- si aggregano in $\vee$ tutte le combinazioni ottenute al passo precedente

Altre operazioni logiche

Anche $\{\vee, \neg\}$ o $\{\wedge, \neg\}$ sono basi adeguate

Una base adeguata è costituita anche dal solo *NOR* o dal solo *NAND*:

NOR

A	B	$\neg(A \vee B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

NAND

A	B	$\neg(A \wedge B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Implicazione ed equivalenza

I logici matematici preferiscono usare come base $\{\rightarrow, \neg\}$

Cui si aggiunge di solito anche $\leftrightarrow$

Implicazione

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Equivalenza

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Identità notevoli $\quad A \rightarrow B \;=\; \neg A \vee B \qquad A \leftrightarrow B \;=\; (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

Linguaggio proposizionale

- Un linguaggio logico proposizionale L_P contiene:
  - Un insieme P di simboli proposizionali: $P = \{A, B, C, ...\}$
  - Due connettivi principali: $\neg, \rightarrow$
  - Tre connettivi derivati: $\wedge, \vee, \leftrightarrow$
  - Le parentesi: $(,)$

Regole sintattiche per la composizione di formule ben formate (fbf)

L'insieme di tutte le **fbf** di L_P si indica con $\mathrm{fbf}(L_P)$

$A \in P \;\Rightarrow\; A \in \mathrm{fbf}(L_P)$

$\varphi \in \mathrm{fbf}(L_P) \;\Rightarrow\; (\neg\varphi) \in \mathrm{fbf}(L_P)$

$\varphi, \psi \in \mathrm{fbf}(L_P) \;\Rightarrow\; (\varphi \rightarrow \psi) \in \mathrm{fbf}(L_P)$

$\varphi, \psi \in \mathrm{fbf}(L_P) \;\Rightarrow\; (\varphi \vee \psi) \in \mathrm{fbf}(L_P), \quad (\varphi \vee \psi) \;\Leftrightarrow\; ((\neg\varphi) \rightarrow \psi)$

$\varphi, \psi \in \mathrm{fbf}(L_P) \;\Rightarrow\; (\varphi \wedge \psi) \in \mathrm{fbf}(L_P), \quad (\varphi \wedge \psi) \;\Leftrightarrow\; (\neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi)))$

$\varphi, \psi \in \mathrm{fbf}(L_P) \;\Rightarrow\; (\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathrm{fbf}(L_P), \quad (\varphi \leftrightarrow \psi) \;\Leftrightarrow\; ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$

Non ci sono regole di precedenza: si usano le parentesi

Linguaggio e metalinguaggio

- Il linguaggio logico proposizionale L_P

  E` composto da:

  $P, \neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow, (,)$

  Regole sintattiche, o di buona formazione

- Metalinguaggio: serve a descrivere le proprietà di L_P

  L_P si dice anche **linguaggio oggetto**

  Lettere greche ($\alpha, \beta, \chi, \varphi, \psi$) per le **variabili proposizionali**:
  Una variabile proposizionale indica una formula (o fbf) qualsiasi

  Una formula $\varphi \rightarrow \psi$ descrive uno **schema** di fbf,
  da cui si possono generare infinite fbf per sostituzione

  Esempi: $A \rightarrow B$

  $(A \rightarrow B) \rightarrow C$

  $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

  Ma si possono sostituire anche variabili a variabili:

  $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$

Ulteriori costrutti particolari
verranno introdotti gradualmente

Semantica: interpretazioni

- Un'interpretazione proposizionale

  E` una funzione $v : \mathrm{fbf}(L_P) \to \{1, 0\}$

  Attribuisce un significato o valore di verità a tutte le fbf di L_P

  Il 'contenuto informativo' di un'interpretazione v

  v assegna un valore alle fbf atomiche (= formate da un solo simbolo in P)

  Il valore delle fbf composite è determinato secondo le regole dei connettivi

  Caratteristiche (vincoli) di v :

  $A \in P \;\Rightarrow\; v(A) \in \{1, 0\}$

  $v(\neg\varphi) = 1 \;\Leftrightarrow\; v(\varphi) = 0$

  $v(\varphi \wedge \psi) = 1 \;\Leftrightarrow\; v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$

  $v(\varphi \vee \psi) = 1 \;\Leftrightarrow\; v(\varphi) = 1$ oppure $v(\psi) = 1$

  $v(\varphi \to \psi) = 1 \;\Leftrightarrow\;$ non $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$

  $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \;\Leftrightarrow\; v(\varphi) = v(\psi)$

  Vedi tavole di verità

Soddisfacimento

- Interpretazioni e tavole di verità

  Esempio: $\varphi = (A \lor B) \land C$

  Ciascuna riga rappresenta un'interpretazione

  Ciascuna interpretazione assegna un valore a <u>tutte</u> le fbf di L_P

  In accordo con le definizioni dei connettivi

	A	B	C	$A \lor B$	$(A \lor B) \land C$
v_1	0	0	0	0	0
v_2	0	0	1	0	0
v_3	0	1	0	1	0
v_4	0	1	1	1	1
v_5	1	0	0	1	0
v_6	1	0	1	1	1
v_7	1	1	0	1	0
v_8	1	1	1	1	1

  Un'interpretazione v **soddisfa** una fbf φ sse $v(\varphi) = 1$

  Nella tavola di verità, le righe evidenziate corrispondono alle interpretazioni che soddisfano φ

  Si dice anche che v è un **modello** di φ

  Per estensione, si dice che v soddisfa (è un modello di) un insieme di fbf $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ sse v soddisfa (è un modello di) tutte le fbf $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$

Tautologie, contraddizioni

- Una **tautologia**

  E` una fbf soddisfatta da tutte le interpretazioni

  Si dice anche fbf **valida**

  Qualsiasi fbf del tipo $\varphi \lor \neg\varphi$ è una tautologia

- Una **contraddizione**

  E` una fbf insoddisfacibile, (che non può essere soddisfatta da alcuna interpretazione)

  Qualsiasi fbf del tipo $\varphi \land \neg\varphi$ è una contraddizione

A	$A \land \neg A$	$A \lor \neg A$
0	0	1
1	0	1

A	B	$(\neg A \lor B) \lor (\neg B \lor A)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	B	$\neg((\neg A \lor B) \lor (\neg B \lor A))$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

- Notare:

  Non tutte le fbf sono tautologie o contraddizioni

  Se φ è una tautologia $\neg\varphi$ è una contraddizione e viceversa

Interpretazioni e mondi possibili

- Intuitivamente

  Un'interpretazione descrive un possibile 'stato delle cose'

  Come può essere immaginato da un'agente razionale
  passando attraverso il 'filtro' del linguaggio formale L_P

  La scelta di L_P determina quali sono i fatti atomici, la 'granularità' della rappresentazione

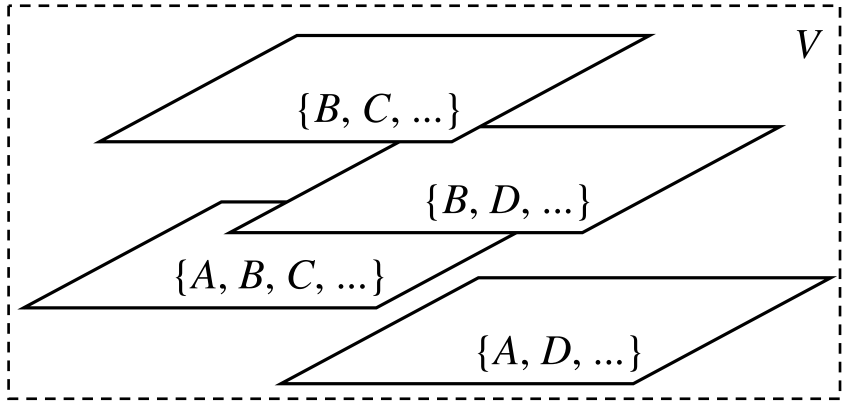
- Interpretazioni come insiemi

  Un'interpretazione v può essere descritta da un sottoinsieme di $P = \{A, B, C, D, ...\}$

  Per qualsiasi sottoinsieme $Q \subseteq P$ e per qualsiasi $A \in P, \quad v(A) = 1 \;\Leftrightarrow\; A \in Q$

  Il valore delle fbf composite
  viene determinato secondo le
  regole viste in precedenza

  In ciascun mondo possibile,
  alcune fbf sono vere ed altre false



Linguaggio naturale, linguaggio logico

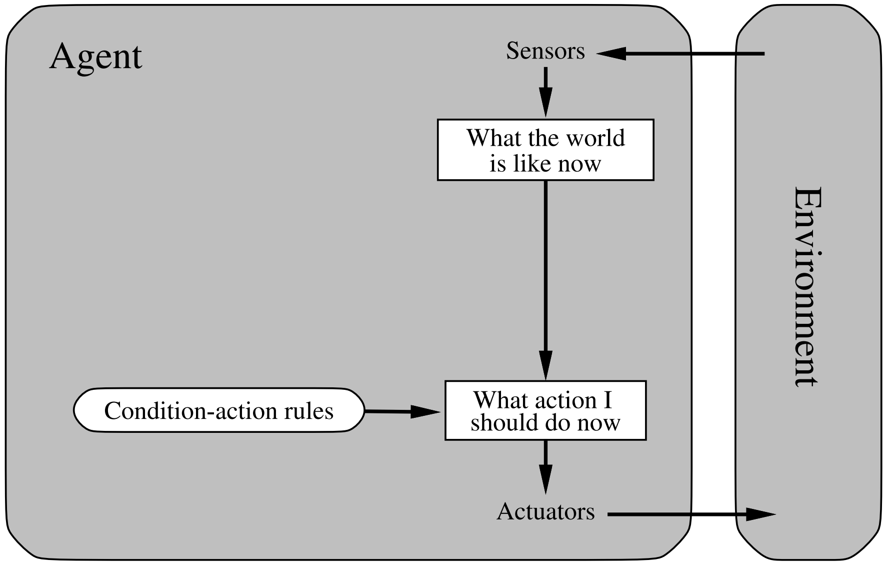
- Il processo di traduzione (o formalizzazione)
  - Il linguaggio logico L_P è composto da simboli e regole di formazione
  - Le interpretazioni assegnano un significato (formale) alle fbf di L_P
  - Che cosa rappresenta tutto ciò?
- Le fbf di L_P sono le frasi di un linguaggio formale
  - Ciascuna rappresenta una frase in linguaggio naturale (p.es. in italiano)
  - Le fbf atomiche rappresentano proposizioni singole
    - "Giorgio è contento"
    - "Giorgio è un bipede senza piume"
    - "Tutti gli esseri umani sono bipedi senza piume"
- Le fbf di L_P rappresentano frasi affermative, di senso compiuto
  - Di cui si può dire che siano vere o false

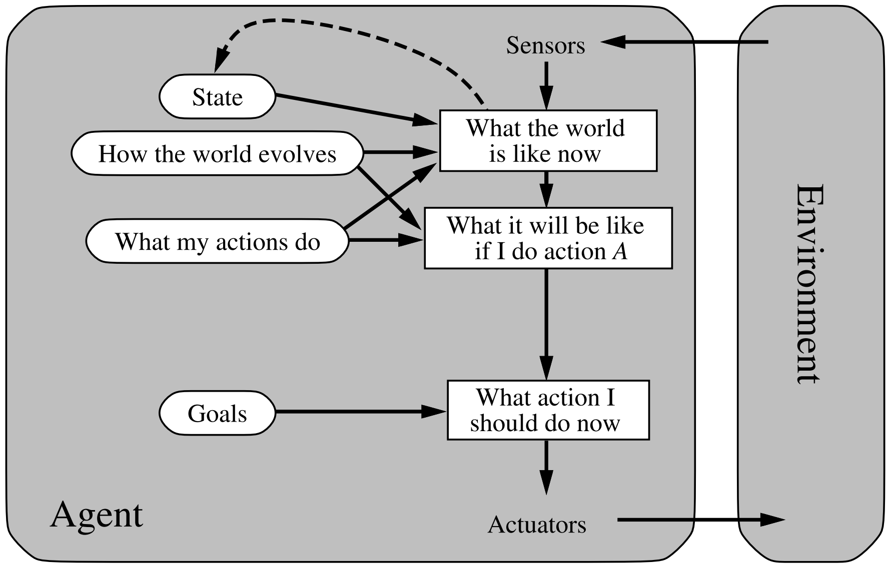
  - Quest'idea di traduzione non è esente da guai (paradossi)
    - "Questa proposizione è falsa"

Agenti razionali

- "Frasi di senso compiuto"
  - Percezioni stato dell'ambiente esterno accessibile tramite i sensori
  - Stato interno dell'agente
  - Previsioni evoluzione dell'ambiente
  - Possibili effetti delle azioni
  - Obiettivi (goal)
  - Azioni
  - Vincoli
- Calcolo simbolico
  - L'agente ragiona operando sulle frasi (~*pensa con il linguaggio*)
  - Il calcolo determina il comportamento dell'agente

Come lo sa l'agente che il calcolo è corretto? (ed in che senso?)





Relazioni tra formule

- Premesse:

$\varphi_1 = B \lor D \lor \neg(A \land C)$

"Silvia è madre di Giorgio" OR "Giorgio è contento"
OR NOT("Giorgio è umano" AND "Giorgio è un bipede senza piume")

$\varphi_2 = B \lor C$

"Silvia è madre di Giorgio" OR "Giorgio è un bipede senza piume"

$\varphi_3 = A \lor D$

"Giorgio è umano" OR "Giorgio è contento"

$\varphi_4 = \neg B$

NOT "Silvia è madre di Giorgio"

- Affermazione:

$\psi = D$

"Giorgio è contento"

Qual'è il **legame logico**
tra le premesse
e l'affermazione?

E tra le premesse?

Conseguenza logica

- Costruendo la tavola di verità

    Per le fbf dell'esempio

$$\varphi_1 = B \lor D \lor \neg(A \land C)$$
$$\varphi_2 = B \lor C$$
$$\varphi_3 = A \lor D$$
$$\varphi_4 = \neg B$$
$$\psi = D$$

A	B	C	D	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	ψ
0	0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	1

Si osserva che tutte le interpretazioni che soddisfano $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ soddisfano anche ψ

Relazione di **conseguenza logica**: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models \psi$

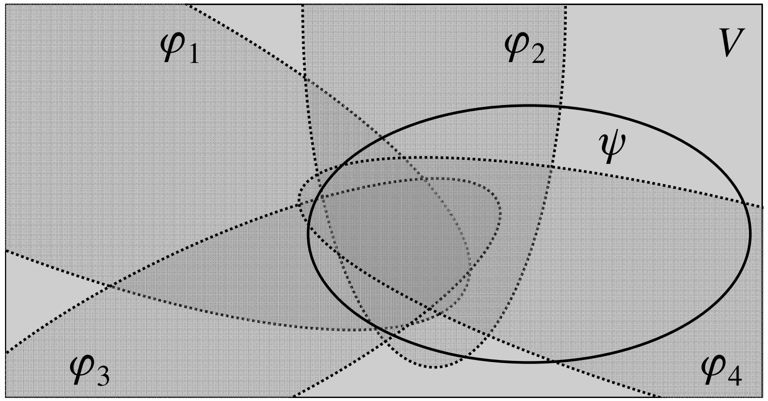
(*logical entailment*)

(Attenti alla notazione!)

Formule e sottoinsiemi

- Si consideri l'insieme V di tutte le possibili interpretazioni v
  - Ciascuna fbf di L_P (come $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi$) corrisponde a un sottoinsieme di V
    - Il sottoinsieme delle interpretazioni v che la soddisfano
    - Ad esempio, a ψ corrisponde $\{v : v(\psi) = 1\}$ (si scrive anche $\{v : v \models \psi\}$)
      - Il sottoinsieme potrebbe essere vuoto (se ψ è una contraddizione) o coincidente con V (se ψ è una tautologia)
  - L'insieme delle premesse $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ corrisponde all'intersezione dei sottoinsiemi corrispondenti a ciascuna fbf

- **Conseguenza logica**
  - Tutte le interpretazioni che soddisfano le premesse soddisfano anche la conseguenza
  - L'intersezione dei sottoinsiemi che corrispondono alle premesse *è incluso* nel sottoinsieme che corrisponde alla conseguenza



Implicazione

Le fbf del problema precedente possono essere riscritte così:

Usando la base $\{\rightarrow, \neg\}$

$$\varphi_1 = C \rightarrow (\neg B \rightarrow (A \rightarrow D))$$
$$\varphi_2 = \neg B \rightarrow C$$
$$\varphi_3 = \neg A \rightarrow D$$
$$\varphi_4 = \neg B$$
$$\psi = D$$

$$\varphi_1 = B \vee D \vee \neg(A \wedge C)$$
$$\varphi_2 = B \vee C$$
$$\varphi_3 = A \vee D$$
$$\varphi_4 = \neg B$$
$$\psi = D$$

- **Validità** (in termini di conseguenza logica) **di schemi generali:**

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi \rightarrow \psi \\ \varphi\end{array}}{\psi}$$

Si può verificare direttamente, che

$$\varphi \rightarrow \psi, \varphi \models \psi$$

Analogamente

$$\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \models \neg\varphi$$

Concetti essenziali

- **Linguaggio simbolico**
  - Formalismo rigoroso
    - Un insieme di simboli
    - Regole sintattiche (di buona formazione) per le fbf
- **Semantica formale**
  - Interpretazioni come funzioni dal linguaggio ad una struttura
    - Un'interpretazione assegna un valore a tutte le fbf del linguaggio
    - Per L_P la struttura di riferimento è molto semplice: $\{1, 0\}$
- **Soddisfacimento, conseguenza logica**
    - Una fbf è soddisfatta da un'interpretazione che la rende vera
  - La conseguenza logica è una relazione tra fbf e/o insiemi di fbf
    - Ciascuna fbf è soddisfatta solo da alcune interpretazioni (sottoinsieme)
    - La relazione sussiste quando le interpretazioni che soddisfano le fbf delle premesse soddisfano anche la fbf (o le fbf) della conseguenza
    - Occorre considerare tutte le possibili interpretazioni (semantica *estensionale*)