# Intelligenza Artificiale

## Logica del primo ordine
## (introduzione)

Marco Piastra

# Parte 4

Linguaggio del primo ordine
Soddisfacibilità
Modelli
Conseguenza logica

# Limiti del linguaggio proposizionale

- *Esempio*:
  - "Ogni essere umano è mortale"
    "Socrate è un essere umano"
  - "Socrate è mortale"
    - Il legame logico (intuitivo) è evidente

| | | | |
|---|---|---|---|
| (Essere umano) implica (essere mortale) | $A \to B$ | Schema del | $\varphi \to \psi$ |
| *Socrate* è un essere umano | $C$ | *modus ponens* | $\varphi$ |
| *Socrate* è mortale | $D$ | | $\psi$ |

- Nella traduzione logico-proposizionale $A$, $B$, $C$ e $D$ non hanno alcun legame

- Altri esempi 'intraducibili':
  - "Quando capra e cavolo stanno sulla stessa riva, la capra mangia il cavolo"
  - "Il cacciatore sente una brezza quando si trova sul ciglio di una trappola"

# Logica del primo ordine

- **Logica proposizionale**
  - Rappresentazione del mondo come sulla base di **fatti** atomici (proposizioni)

- **Logica del primo ordine**
  - Una base più complessa e articolata per la rappresentazione

  - **Oggetti**
    - persone, numeri, costruzioni, colori, storie, percorsi, pezzi di legno, …
  - **Proprietà** (di oggetti) e **relazioni** (tra oggetti)
    - rosso, grande, primo, fratello di, maggiore di, compreso tra, …
  - **Funzioni** (di oggetti)
    - successore, padre di, …

# Linguaggio del primo ordine

- Simboli del linguaggio $L_{PO}$
  - **Costanti** individuali (singoli oggetti)
    - Esempi: *Socrate*, *Sfera1*, *MickeyMouse*, *Amelia*, ...
    - In generale: $a$, $b$, $c$, …
  - **Predicati**
    - Esempi: *Red*(.), *Large*(.), *GreaterThan*(..), =
    - Ogni predicato ha un numero di argomenti prestabilito
    - In generale: $P(.)$, $Q(.)$, $R(..)$, …
      (spesso si omettono parentesi e punti)
  - **Funzioni**
    - Esempi: *sqrt*(.), *colorOf*(.), *greatestCommonDivisor*(..)
    - Ogni funzione ha un numero di argomenti prestabilito
    - In generale: $f(.)$, $g(.)$, $h(..)$, …
      (spesso si omettono parentesi e punti)

Convenzionalmente, per il predicato binario = si usa la forma infissa (p.es. '$a = b$')

# Linguaggio del primo ordine (2)

- Ulteriori simboli del linguaggio $L_{PO}$
  - **Variabili**
    - Convenzionalmente indicate come $x, y, z, \ldots$
  - **Connettivi**
    - Come in logica proposizionale: $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow$
  - **Parentesi e virgola**

    ( ) ,
  - **Quantificatori**
    - Universale: $\forall$
    - Esistenziale: $\exists$
    - Si applicano **sempre** ad una ed una sola variabile
      Esempi: $\forall x$, $\exists y$, $\forall x \forall y$

Si dice linguaggio **del primo ordine** in quanto
i quantificatori agiscono solo sugli **oggetti**,
vale a dire sulle variabili $x$, $y$, $z$ ..., e non sulle **relazioni** e **funzioni**
(*In una logica del secondo ordine si hanno formule del tipo*: $\exists F\ F(a,b)$)

# Esempi di formule

- "Essere fratelli significa essere parenti"

  $\forall x \forall y\ (Fratello(x, y) \rightarrow Parente(x, y))$
- "La relazione di parentela è simmetrica"

  $\forall x \forall y\ (Parente(x ,y) \leftrightarrow Parente(y, x))$
- "Una madre è un genitore di sesso femminile"

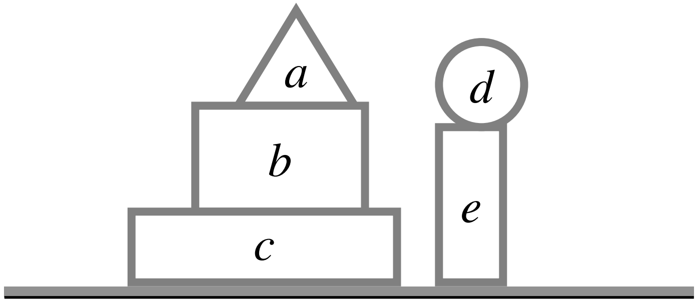
  $\forall x \forall y\ (Madre(x, y) \leftrightarrow (Genitore(x, y) \land Femmina(x)))$
- "Un cugino è figlio di un fratello o una sorella di uno dei genitori"

  $\forall x \forall y\ (Cugino(x, y) \leftrightarrow$
  $\quad \exists z \exists w\ (Genitore(z, x) \land Genitore(w, y) \land (Fratello(z, w) \lor Sorella(z, w))))$
- "Ciascuno ha una madre"

  $\forall x \exists y\ Madre(y, x)$
  - Fare attenzione all'ordine dei quantificatori

  $\exists y \forall x\ Madre(y, x)$
  - "Esiste una madre di tutti"

# Descrivere un mondo




- Insiemi

  $Pyramid(a)$
  $Parallelepiped(b) \wedge Parallelepiped(c) \wedge Parallelepiped(e)$
  $Sphere(d)$
  $Ontable(c) \wedge Ontable(e)$

- Relazioni

  $Above(a,b) \wedge Above(b,c) \wedge Above(a,c) \wedge Above(d,e)$
  $Clear(a) \wedge Clear(d)$

- Regole

  $\forall x \forall y\ (On(x,y) \leftrightarrow (Above(x,y) \wedge \neg \exists z\ (Above(x,z) \wedge Above(z,y))))$
  $\forall x\ (Ontable(x) \leftrightarrow \neg \exists z\ Above(x,z))$
  $\forall x\ (Clear(x) \leftrightarrow \neg \exists z\ Above(z,x))$

# Termini e formule atomiche

- **Termini**
  - Ogni *variabile* o *costante individuale* è un **termine**
  - Se $f$ è un *simbolo funzionale* a *n* argomenti e $t_1, \ldots, t_n$ sono **termini**, allora $f(t_1, \ldots, t_n)$ è un **termine**
  - Un termine **chiuso** (*ground*) non contiene variabili
- **Formula atomica**
  - Se $P$ è un *simbolo predicativo* a *n* argomenti e $t_1, \ldots, t_n$ sono **termini**, allora $P(t_1, \ldots, t_n)$ è una **formula atomica**

  - Esempi:

$$\underbrace{\underbrace{Sorella}_{\text{predicato}}(\underbrace{\underbrace{Amelia}_{\text{costante}}}_{\text{termine}}, \underbrace{\underbrace{Alba}_{\text{costante}}}_{\text{termine}})}_{\text{formula atomica}}$$

$$\underbrace{\underbrace{shapeOf(\underbrace{b}_{\text{costante}})}_{\text{termine}} \underbrace{=}_{\text{predicato}} \underbrace{shapeOf(\underbrace{x}_{\text{variabile}})}_{\text{termine}}}_{\text{formula atomica}}$$

# Regole di buona formazione

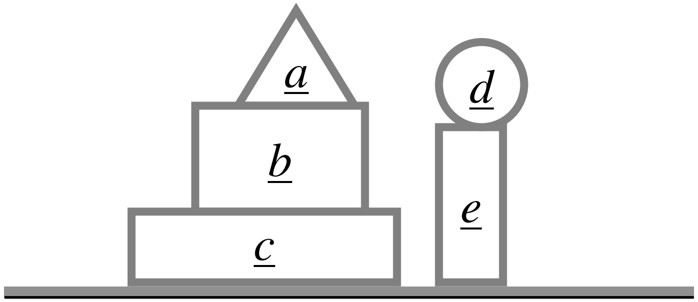
- Formule ben formate di $L_{PO}$
  - Ogni *formula atomica* è una fbf (poco diversa rispetto ad $L_P$)
  - $\varphi \in \text{fbf}(L_{PO}) \;\Rightarrow\; (\neg\varphi) \in \text{fbf}(L_{PO})$
  - $\varphi, \psi \in \text{fbf}(L_{PO}) \;\Rightarrow\; (\varphi \rightarrow \psi) \in \text{fbf}(L_{PO})$
  - $\varphi \in \text{fbf}(L_{PO}) \;\Rightarrow\; (\forall x\, \varphi) \in \text{fbf}(L_{PO})$ (aggiuntiva rispetto ad $L_P$)
  - $\varphi, \psi \in \text{fbf}(L_{PO}),\quad (\varphi \vee \psi) \;\Leftrightarrow\; ((\neg\varphi) \rightarrow \psi)$
  - $\varphi, \psi \in \text{fbf}(L_{PO}),\quad (\varphi \wedge \psi) \;\Leftrightarrow\; (\neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi)))$
  - $\varphi, \psi \in \text{fbf}(L_{PO}),\quad (\varphi \leftrightarrow \psi) \;\Leftrightarrow\; ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$
  - $\varphi \in \text{fbf}(L_{PO}) \qquad (\exists x\, \varphi) \Leftrightarrow (\neg\forall x\, \neg\varphi)$ (aggiuntiva rispetto ad $L_P$)

# Formule aperte, enunciati

- Variabili **libere** e **vincolate**
  - una variabile (in una fbf) è **vincolata** se si trova nel raggio di azione di un **quantificatore** per quella variabile
  - una variabile è **libera** se non è *vincolata*
    - esempi di variabile vincolata:
      $\forall x\ P(x)$
      $\exists x\ (P(x) \rightarrow (A(x) \wedge B(x))$
    - esempi di variabile libera:
      $P(\boldsymbol{x})$
      $\exists y\ (P(y) \rightarrow (A(\boldsymbol{x},y) \wedge B(y)))$

- **Formule aperte** e **chiuse**
  - Una fbf è **aperta** se in essa vi è almeno una variabile libera
  - Una fbf è **chiusa** (anche **enunciato** - *sentence*) in caso contrario
    - solo le fbf *chiuse*, cioè gli *enunciati*, hanno un valore di verità (in quanto rappresentano delle *affermazioni* ...)

# Semantica estensionale




- **Universo del discorso U**
  - Un insieme di oggetti di base
    $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}, \underline{e}\}$
  - Le costanti individuali indicano oggetti di **U**
    - Esempi: $v(a) = \underline{a}$, $v(b) = \underline{b}$
  - Le variabili assumono valori in **U**

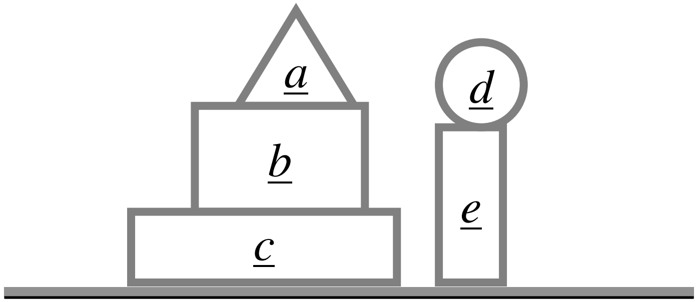
Si usa $a$ per indicare la costante
ed $\underline{a}$ per indicare l'oggetto
(*solo per comodità)

- **Relazioni**
  - Insiemi di tuple formate a partire da **U**
    $\underline{Ontable} : \{\underline{c}, \underline{e}\}$
    $\underline{Above} : \{<\underline{a}, \underline{b}>, <\underline{a}, \underline{c}>, <\underline{b}, \underline{c}>, <\underline{d}, \underline{e}>\}$
    $\underline{On} : \{<\underline{a}, \underline{b}>, <\underline{b}, \underline{c}>, <\underline{d}, \underline{e}>\}$
    $\underline{Between} : \{<\underline{b}, \underline{a}, \underline{c}>\}$
  - Predicati e funzioni indicano relazioni e funzioni in **U**
    $v(Above(..)) : \{<\underline{a}, \underline{b}>, <\underline{a}, \underline{c}>, <\underline{b}, \underline{c}>, <\underline{d}, \underline{e}>\}$

# Strutture, interpretazioni e assegnazioni

- Una **struttura** $<\mathbf{U}, v>$ per $L_{PO}$ contiene:
  - Un insieme di oggetti $\mathbf{U}$ (l'universo del discorso)
  - Un'**interpretazione** $v$ che associa
    - ad ogni **costante** $c$ un **oggetto** di $\mathbf{U}$
      $v(c) \in \mathbf{U}$
    - ad ogni **predicato** $P$ a $n$ argomenti una **relazione** $n$-aria in $\mathbf{U}^n$
      $v(P) \subseteq \mathbf{U}^n$
    - ad ogni **funzione** $f$ a $n$ argomenti una **funzione** da $\mathbf{U}^n$ a $\mathbf{U}$
      $v(f) \subseteq \mathbf{U}^n \to \mathbf{U}$
  - Un'interpretazione (ovviamente) non fissa il valore delle variabili
- Assegnazione
  - Data una struttura $<\mathbf{U}, v>$, un'**assegnazione** (*valuation*) $s$
    - è una *funzione* che associa ad ogni **variabile** $x$ un **oggetto** di $\mathbf{U}$
      $s(x) \in \mathbf{U}$
    - La combinazione di una $<\mathbf{U}, v>$ e di una $s$ determina univocamente gli oggetti associati a ciascun elemento di $L_{PO}$

# Il mondo dei blocchi



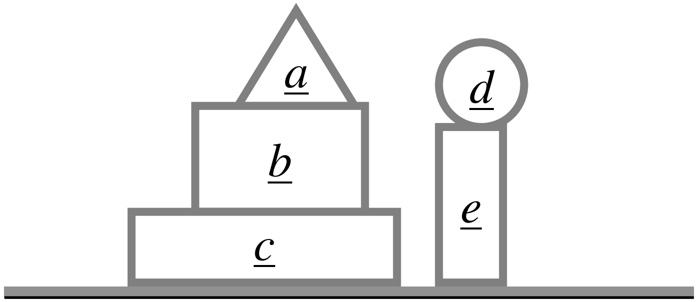

- Linguaggio
  - simboli predicativi: $Ontable(.)$, $Above(..)$, $On(..)$, $Between(\ldots)$
  - variabili: $x$, $y$, $z$, ...
  - costanti individuali: $a$, $b$, $c$, $d$, $e$
- Interpretazione
  - Universo del discorso
    $\mathbf{U} = \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}, \underline{e}\}$
  - Predicati
    $v(Ontable) = \{\underline{c}, \underline{e}\}$
    $v(Above) = \{<\underline{a}, \underline{b}>, <\underline{a}, \underline{c}>, <\underline{b}, \underline{c}>, <\underline{d}, \underline{e}>\}$
    $v(On) = \{<\underline{a}, \underline{b}>, <\underline{b}, \underline{c}>, <\underline{d}, \underline{e}>\}$
    $\mathrm{v}(Between) = \{<\underline{b}, \underline{a}, \underline{c}>\}$
  - Costanti individuali
    $v(a) = \underline{a}$ , $v(b) = \underline{b}$ , $v(c) = \underline{c}$ , $v(d) = \underline{d}$ , $v(e) = \underline{e}$
- Assegnazione
  - Esempio: $s = \{(x{:}\underline{a}), (y{:}\underline{b}), (z{:}\underline{a}) \ldots\}$ (per *tutte* le variabili del linguaggio)

Si usa $a$ per indicare la costante ed $\underline{a}$ per indicare l'oggetto (*solo per comodità)

# Soddisfacimento (forma intuitiva)

- Una fbf $\varphi$ è soddisfatta da $<\mathbf{U}, v>$ $[s]$
  sse $\varphi$ afferma una cosa vera in $<\mathbf{U}, v>$ $[s]$

- Nel mondo dei blocchi




$Pyramid(a)$

  - è vera perchè: $(v(a) = \underline{a}) \in v(Pyramid(.)) = \{\underline{a}\}$

$Parallelepiped(d)$

  - non è vera perchè: $(v(d) = \underline{d}) \notin v(Parallelepiped(.)) = \{\underline{b}, \underline{c}, \underline{e}\}$

$\neg\exists x\ (Parallelepiped(x) \land Sphere(x))$

  - è vera perché: $((v(Parallelepiped(.)) = \{\underline{b}, \underline{c}, \underline{e}\}) \cap (v(Sphere(.)) = \{\underline{d}\})) \equiv \varnothing$

$\forall x\ (Pyramid(x) \lor Parallelepiped(x) \lor Sphere(x))$

  - è vera perché:
    $((v(Pyramid(.)) = \{\underline{a}\}) \cup (v(Parallelepiped(.)) = \{\underline{b}, \underline{c}, \underline{e}\}) \cup (v(Sphere(.)) = \{\underline{d}\})) \equiv \mathbf{U}$

# Soddisfacimento

- Data una struttura $<\mathbf{U}, v>$ un'assegnazione $s$
  - Se $\varphi$ è una formula atomica, $<\mathbf{U}, v> [s] \models \varphi$ sse
    - se $\varphi$ ha la forma $P(t_1, \ldots, t_n)$ allora $<v(t_1)\ [s], \ldots, v(t_n)\ [s]> \in v(P)\ [s]$
  - Se $\varphi$ e $\psi$ sono fbf qualsiasi

    Come per LP
    - $<\mathbf{U}, v> [s] \models (\neg\varphi)$ sse $<\mathbf{U}, v> [s] \not\models \varphi$
    - $<\mathbf{U}, v> [s] \models (\varphi \wedge \psi)$ sse $<\mathbf{U}, v> [s] \models \varphi$ e $<\mathbf{U}, v> [s] \models \psi$
    - $<\mathbf{U}, v> [s] \models (\varphi \vee \psi)$ sse $<\mathbf{U}, v> [s] \models \varphi$ o $<\mathbf{U}, v> [s] \models \psi$
    - $<\mathbf{U}, v> [s] \models (\varphi \rightarrow \psi)$ allora non $<\mathbf{U}, v> [s] \models \varphi$ e $<\mathbf{U}, v> [s] \not\models \psi$
  - Formule con quantificatori
    - $<\mathbf{U}, v> [s] \models \forall x\, \varphi$ sse per ogni $\underline{d} \in \mathbf{U}$ si ha $<\mathbf{U}, v> [s](x{:}\underline{d}) \models \varphi$
    - $<\mathbf{U}, v> [s] \models \exists x\, \varphi$ sse esiste un $\underline{d} \in \mathbf{U}$ per cui si ha $<\mathbf{U}, v> [s](x{:}\underline{d}) \models \varphi$

# Modelli

- **Validità** in un'interpretazione, **modello**
  - Una fbf $\varphi$ tale per cui si ha $<\mathbf{U}, v> [s] \models \varphi$ per qualsiasi assegnazione $s$ è detta **valida** in $<\mathbf{U}, v>$
  - Si dice anche che $<\mathbf{U}, v>$ è un **modello** di $\varphi$
    - si scrive $<\mathbf{U}, v> \models \varphi$ (si elimina il riferimento a $s$)
  - Una struttura $<\mathbf{U}, v>$ è detta **modello** di un *insieme di fbf* $\Gamma$ sse è un modello di tutte le fbf in $\Gamma$
    - si scrive allora $<\mathbf{U}, v> \models \Gamma$

- **Verità**
  - Un **enunciato** $\psi$ si dice **vero** in $<\mathbf{U}, v>$ se è **valido** in $<\mathbf{U}, v>$
    - per un enunciato, basta l'esistenza di un'assegnazione $s$ per cui $<\mathbf{U}, v> [s] \models \psi$

# Validità

- Validità e verità logiche
  - Una fbf (aperta o chiusa) è **valida** (o **logicamente valida**) se è **valida** in qualsiasi $<\mathbf{U}, v>$
    - Esempi:

      $(P(x) \lor \neg P(x))$ (tautologia come formula aperta)
  - Un enunciato $\psi$ è **vero** (o **logicamente vero**) se è **vero** in qualsiasi $<\mathbf{U}, v>$
    - si scrive allora $\models \psi$ (si elimina il riferimento a $<\mathbf{U}, v>$)
    - Esempi:

      $\forall x\ (P(x) \lor \neg P(x))$ (generalizzazione di una tautologia)

      $\forall x \forall y\ (G(x,y) \rightarrow (H(x,y) \rightarrow G(x,y)))$ (generalizzazione di assioma – vedi oltre)

- Inconsistenza
  - Una fbf (aperta o chiusa) è **inconsistente** se non è soddisfacibile
  - Un enunciato $\psi$ è **inconsistente** se non ha un *modello*
    - Esempi:

      $\forall x\ (P(x) \land \neg P(x))$ (generalizzazione di una contraddizione)

# Conseguenza logica

- Definizione
  - Dato un insieme di fbf $\Gamma$ ed una fbf $\varphi$ di $L_{PO}$ si ha
    $\Gamma \models \varphi$
  - sse tutte le $<\mathbf{U}, v>[s]$ che soddisfano $\Gamma$ soddisfano anche $\varphi$

- Osservazioni
  - La definizione si estende a tutte le possibili $<\mathbf{U}, v>[s]$
  - Quindi, a tutti i possibili insiemi $\mathbf{U}$, alle relazioni e funzioni in $\mathbf{U}$ ed alle associazioni di oggetti di $\mathbf{U}$ a variabili e costanti
  - Il calcolo diretto della conseguenza logica in $L_{PO}$ è impossibile anche nelle forme più semplici