Intelligenza Artificiale

Logica proposizionale: calcolo simbolico

Marco Piastra

Parte 2

Calcolo logico
Assiomi
Derivazioni
Derivazioni e conseguenza logica
Completezza

Conseguenza, decidibilità

- Una fbf φ è **conseguenza logica** di un insieme di fbf Γ sse qualsiasi modello di Γ è anche modello di φ
    - Si scrive anche:

      $\Gamma \models \varphi$

- Una logica formale è **decidibile** se esiste una **procedura effettiva** per stabilire se:

  $\Gamma \models \varphi$

    - Per *procedura effettiva* si intende un algoritmo che fornisce la risposta corretta in ogni caso

- L_P è **decidibile**
    - Basta usare il metodo delle tavole di verità (= 2^n prove)
  - Esistono altri metodi?

Fatti, regole e procedure

- Esempio: "La macchina non parte"
  - Codifica:

    C = "La batteria è carica"
    L = "Le luci si accendono"
    A = "L'autoradio funziona"
    M = "Il motorino d'avviamento gira"
    G = "Il motorino d'avviamento è guasto"
    P = "Il motore parte"

  - Regole:

    r_1: $\neg C \rightarrow (\neg L \wedge \neg A \wedge \neg M)$
    r_2: $G \rightarrow \neg M$
    r_3: $\neg M \rightarrow \neg P$

  - Cosa accade se:
    - (utilizzando lo schema $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \models \psi$ visto in precedenza)

    $\neg C$ applicando r_1 si ottiene: $\neg L \wedge \neg A \wedge \neg M$

    G applicando r_2 si ottiene: $\neg M$
    applicando r_3 si ottiene: $\neg P$

Assiomi

- Gli assiomi (di una logica) sono fbf che ne riassumono le caratteristiche
  - Descrivono (in forma compatta) gli *schemi di ragionamento*
  - Costituiscono un punto di partenza

- ***Schemi** di assioma* per L_P :
  - $\varphi, \psi, \chi \in \mathrm{fbf}(L_P)$

    Ax1 $\quad \varphi \to (\psi \to \varphi)$

    Ax2 $\quad (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

    Ax3 $\quad (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

    - Ogni sostituzione delle variabili in Ax1, Ax2, Ax3 con una fbf è un assioma
    - Gli schemi di assioma sono *tautologie,* così come ogni singola sostituzione

  - Esempi di fbf ottenute per sostituzione:

    $A \to (\neg A \to A)$ $\quad$ [Ax1: φ/A, $\psi/\neg A$]

    $(\neg(B \vee C) \to \neg D) \to (D \to (B \vee C))$ $\quad$ [Ax3: $\varphi/(B \vee C)$, ψ/D]

Regole di inferenza

- Si rammenti lo schema $\varphi \to \psi, \varphi \models \psi$, di validità generale

- In una logica formale, il calcolo (simbolico) si basa regole di **derivazione** (o di **inferenza**) che operano sulle fbf
  - Vale a dire sul linguaggio, non sui valori di verità

- In L_P si ha una sola regola di derivazione
  - *Modus Ponens* (MP):

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi \to \psi \\ \varphi\end{array}}{\psi}$$

  - Si scrive anche così:

$\varphi \to \psi, \varphi \vdash \psi$ (da $\varphi \to \psi$ e φ è *derivabile* ψ – attenti alla notazione!)

  - Ogni fbf derivata tramite MP da due tautologie è una tautologia
  - Qualsiasi fbf derivata tramite MP dagli assiomi Ax_1, Ax_2, Ax_3 è una tautologia

Derivazioni (o *dimostrazioni*)

- Una *dimostrazione* (o *derivazione*) di una fbf φ da un insieme di fbf Γ
  - E` una successione *finita* di passi $<\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n>$
  - Ciascun passo α_i può essere di tre tipi:
    1) Si ricava una fbf per sostituzione da uno degli assiomi Ax_n
    2) Si importa una fbf presente nelle ipotesi Γ
    3) Si ottiene una nuova fbf dalle fbf ai passi precedenti, tramite *Modus Ponens*
  - Nel passo finale, si ottiene la formula da dimostrare: $\alpha_n = \varphi$
    - In generale, si scrive allora $\Gamma \vdash \varphi$ "φ è derivabile da Γ"
      - La dimostrazione non è necessariamente unica (anzi)

  - Notare che:

    $\vdash \mathrm{Ax}n$ (un assioma, o sostituzione, è derivabile anche da un Γ vuoto)

    $\Gamma \vdash \mathrm{Ax}n$ (un assioma, o sostituzione, è derivabile da qualsiasi Γ)

    $\{\varphi, ..\} \vdash \varphi$ (qualsiasi φ è derivabile da un Γ che già la contiene)

    $\Gamma \vdash \varphi \;\Rightarrow\; \Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$ (monotonia sintattica)

Derivazioni, esempio

- Il problema visto in precedenza ("Giorgio è contento")

  $B \vee D \vee \neg(A \wedge C),\ B \vee C,\ A \vee D,\ \neg B \vdash D$

  - Nella versione riscritta usando $\neg$ e $\rightarrow$

    $C \rightarrow (\neg B \rightarrow (A \rightarrow D)),\ \neg B \rightarrow C, \neg A \rightarrow D,\ \neg B \vdash D$

  - Per comodità

    $\Gamma \vdash D$

1:	$\Gamma \vdash \neg B \rightarrow C$	
2:	$\Gamma \vdash \neg B$	
3:	$\Gamma \vdash C$	(*MP* 1,2)
4:	$\Gamma \vdash C \rightarrow (\neg B \rightarrow (A \rightarrow D))$	
5:	$\Gamma \vdash \neg B \rightarrow (A \rightarrow D)$	(*MP* 3,4)
6:	$\Gamma \vdash A \rightarrow D$	(*MP* 2,5)
7:	$\Gamma \vdash \neg A \rightarrow D$	
8*:	$\Gamma \vdash (\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$	(***Se fosse un assioma, ma non lo è***)
9:	$\Gamma \vdash (\neg A \rightarrow D) \rightarrow ((A \rightarrow D) \rightarrow D)$	(*Sost*)
10:	$\Gamma \vdash (A \rightarrow D) \rightarrow D$	(*MP* 7,9)
11:	$\Gamma \vdash D$	(*MP* 6,10)

Derivazioni: Teorema 0

- Qualsiasi fbf implica se stessa

$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$

1:	$\vdash (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$	(Ax2)
2:	$\vdash (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi))$	(Ax1)
3:	$\vdash (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$	(*MP* 1,2)
4:	$\vdash (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$	(Ax1)
5:	$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$	(*MP* 3,4)

Teorema di deduzione

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi \to \psi$$

- Perché:
  - Sia $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n\text{-}1}, \psi$ una derivazione di ψ da $\Gamma \cup \{\varphi\}$
  - Per α_1 sono dati due casi:

    a) $\alpha_1 \in \Gamma$ oppure α_1 è ottenuto da un assioma
    Usando $\mathrm{Ax1}$, $\Gamma \vdash \alpha_1 \to (\varphi \to \alpha_1)$ ma anche $\Gamma \vdash \alpha_1$ e quindi $\Gamma \vdash \varphi \to \alpha_1$

    b) $\alpha_1 = \varphi$
    Per il Teorema 0, $\vdash \varphi \to \varphi$ e quindi $\Gamma \vdash \varphi \to \alpha_1$

  - Per α_n, assumendo che la tesi valga per $\alpha_{n\text{-}1}$, sono dati ancora due casi:
    - $\alpha_j \in \Gamma$ oppure α_j è ottenuto da un assioma oppure $\alpha_j = \varphi$
      Vedi il caso di α_1
    - α_j è ottenuto per MP da due passi precedenti α_i e $\alpha_i \to \alpha_j$
      Se la tesi vale fino a n-1, allora si ha $\Gamma \vdash \varphi \to \alpha_i$ e $\Gamma \vdash \varphi \to (\alpha_i \to \alpha_j)$
      Usando $\mathrm{Ax2}$, $\vdash (\varphi \to (\alpha_i \to \alpha_j)) \to ((\varphi \to \alpha_i) \to (\varphi \to \alpha_j))$
      ed applicando due volte il MP si ottiene $\Gamma \vdash \varphi \to \alpha_j$

Derivazioni: Teorema 1

- L'ordine delle ipotesi non è rilevante

$$\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$\begin{array}{lll}
1: & (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)), \psi, \varphi \vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) & \\
2: & (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)), \psi, \varphi \vdash \varphi & \\
3: & (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)), \psi, \varphi \vdash \psi \rightarrow \chi & (MP\ 1,2) \\
4: & (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)), \psi, \varphi \vdash \psi & \\
5: & (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)), \psi, \varphi \vdash \chi & (MP\ 3,4) \\
6: & (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)), \psi \vdash \varphi \rightarrow \chi & (Ded) \\
7: & (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) & (Ded) \\
8: & \vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) & (Ded)
\end{array}$$

Derivazioni: Teorema 2

- Doppia negazione implica affermazione

$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$

1:	$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow (\neg\neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$	(Ax1)
2:	$\neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$	(*Ded*)
3:	$\neg\neg\varphi \vdash (\neg\neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\neg\varphi)$	(Ax3)
4:	$\neg\neg\varphi \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\neg\neg\varphi$	(*MP* 3,2)
5:	$\neg\neg\varphi \vdash (\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi)$	(Ax3)
6:	$\neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	(*MP* 5,4)
7:	$\neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi$	
8:	$\neg\neg\varphi \vdash \varphi$	(*MP* 6,7)
9:	$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	(*Ded*)

Derivazioni: Teorema 3

- Una regola è falsa se la premessa è vera e la conseguenza non lo è

$$\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$$

1: $\varphi, (\varphi \to \psi) \vdash \psi$ (Regola *MP*)
2: $\varphi \vdash (\varphi \to \psi) \to \psi$ (*Ded*)
3: $\varphi \vdash ((\varphi \to \psi) \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$ (Ax3)
4: $\varphi \vdash \neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi)$ (*MP* 3,2)
5: $\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$ (*Ded*)

Derivazioni: Teorema 4

- Da un assurdo si deriva qualsiasi cosa ("*Ex absurdo sequitur quodlibet*"):

  $\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$ (vale a dire $\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$)

1:	$\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	(Ax1)
2:	$\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi$	
3:	$\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$	(*MP* 1,2)
4:	$\varphi, \neg\varphi \vdash (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$	(Ax3)
5:	$\varphi, \neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$	(*MP* 4,3)
6:	$\varphi, \neg\varphi \vdash \varphi$	
7:	$\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$	(*MP* 5,6)
8:	$\varphi \vdash \neg\varphi \to \psi$	(*Ded*)
9:	$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$	(*Ded*)

Derivazioni: Teorema 5

- Se la falsità implica una contraddizione, allora dev'esser vero:

  $\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$

1:	$\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi$	
2:	$\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi \to \varphi$	
3:	$\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi \vdash \varphi$	(*MP* 1,2)
4:	$\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi \vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi))$	(Teorema 4)
5:	$\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi)$	(*MP* 3,4)
6:	$\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi \vdash \neg(\neg\varphi \to \varphi)$	(*MP* 1,5)
7:	$\neg\varphi \to \varphi \vdash \neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi)$	(*Ded*)
8:	$\neg\varphi \to \varphi \vdash (\neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi)) \to ((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi)$	(Ax3)
9:	$\neg\varphi \to \varphi \vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$	(*MP* 7,8)
10:	$\neg\varphi \to \varphi \vdash \neg\varphi \to \varphi$	
11:	$\neg\varphi \to \varphi \vdash \varphi$	(*MP* 7,8)
12:	$\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$	(*Ded*)

Derivazioni: Teorema “X”

- Regola di risoluzione (il risultato cercato per il primo esempio):

  $\vdash (\neg\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \psi) \to \psi)$

1:	$(\neg\varphi \to \psi), (\varphi \to \psi) \vdash (\neg\varphi \to \psi)$	
2:	$(\neg\varphi \to \psi), (\varphi \to \psi) \vdash (\neg\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \varphi)$	(Ax3)
3:	$(\neg\varphi \to \psi), (\varphi \to \psi) \vdash (\neg\psi \to \varphi)$	(*MP* 1,2)
4:	$(\neg\varphi \to \psi), (\varphi \to \psi), \neg\psi \vdash \varphi$	(*Ded*)
5:	$(\neg\varphi \to \psi), (\varphi \to \psi), \neg\psi \vdash \varphi \to \psi$	
6:	$(\neg\varphi \to \psi), (\varphi \to \psi), \neg\psi \vdash \psi$	(*MP* 4,5)
7:	$(\neg\varphi \to \psi), (\varphi \to \psi) \vdash (\neg\psi \to \psi)$	(*Ded*)
8:	$(\neg\varphi \to \psi), (\varphi \to \psi) \vdash ((\neg\psi \to \psi) \to \psi)$	(Teorema 5)
9:	$(\neg\varphi \to \psi), (\varphi \to \psi) \vdash \psi$	(*MP* 7,8)
10:	$(\neg\varphi \to \psi) \vdash ((\varphi \to \psi) \to \psi)$	(*Ded*)
11:	$\vdash (\neg\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \psi) \to \psi)$	(*Ded*)

Proprietà delle derivazioni

- *Monotonia sintattica*
  - Dati Γ e Δ, se $\Gamma \vdash \varphi$ allora $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$
    - Qualsiasi derivazione di φ da Γ rimane valida anche estendendo Γ
- *Compattezza sintattica*
  - Se $\Gamma \vdash \varphi$ allora esiste un insieme Σ **finito**, con $\Sigma \subseteq \Gamma$, per cui $\Sigma \vdash \varphi$
    - Una derivazione di φ da Γ prevede un numero *finito* di passi,
      quindi può coinvolgere al più un numero *finito* di fbf in Γ
- *Transitività*
  - Se per ogni $\varphi \in \Sigma$ si ha che $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Sigma \vdash \psi$ allora $\Gamma \vdash \psi$
    - Basta applicare ripetutamente il teorema di deduzione ed il MP

Proprietà delle derivazioni (2)

- *Correttezza*
  - Le fbf φ *derivabili* da un insieme di fbf Γ sono una *conseguenza logica* di Γ

    $\Gamma \vdash \varphi \;\Rightarrow\; \Gamma \models \varphi$
    - In una derivazione, l'unico passo in cui si derivano nuove fbf è il MP che preserva la conseguenza logica
- *Coerenza sintattica*
  - Un insieme Γ è coerente se da Γ non è derivabile qualsiasi φ
    - Si veda il teorema 3: da una contraddizione si deriva qualsiasi fbf
    - Inoltre, per la correttezza, solo le conseguenze logiche sono derivabili
- *Riduzione all'assurdo* *(refutazione)*
  - $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ è incoerente $\Leftrightarrow$ $\Gamma \vdash \varphi$
    - Per la correttezza $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$ quindi $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ è contraddittorio
    - Il che significa che, per qualsiasi ψ, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$
    - Incluse le ψ palesemente false (p.es. $\neg(\varphi \rightarrow \varphi)$, cioè $\neg\varphi \wedge \varphi$)

Completezza

- *Completezza*
  - Le *tautologie* (fbf *valide*) sono fbf *derivabili* dagli assiomi $\mathrm{Ax}n$

    $\models \varphi \;\Rightarrow\; \vdash \varphi$

  - Perché:
    - Si consideri la tavola di verità di φ e dell'insieme di lettere A_i che vi occorrono
    - Per ciascuna riga si costruisca un insieme di fbf $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ dove $B_i = A_i$ se A_i ha valore 1 e $B_i = \neg A_i$ se A_i ha valore 0
    - Si prenda inoltre $\psi = \varphi$ se φ ha valore 1 e $\psi = \neg\varphi$ se φ ha valore 0
  - Allora $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \psi$
    - Chiaramente, la cosa è vera quando φ è una fbf atomica
    - Infatti, se $\psi = \varphi = A_1$ si ha $A_1 \vdash A_1$
    - Se invece $\psi = \neg\varphi = \neg A_1$ si ha $\neg A_1 \vdash \neg A_1$

2^n righe

A_1	A_2	...	A_n	φ
0	0	...	0	V_1
0	0	...	1	V_2
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
1	1	...	1	V_{2^n}

Completezza (2)

- Per mostrare che $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \psi$ in generale si procede per induzione sulla composizione di φ assumendo che il fatto valga per le componenti più semplici

– Primo caso: $\varphi = \neg\alpha$

- Quando α ha valore 1, φ ha valore 0. Per l'ipotesi induttiva $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \alpha$ Quindi (variante del Teorema 2), $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$ e dunque $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \neg\neg\alpha$ (MP). Ma $\neg\neg\alpha = \neg\varphi = \psi$
- Quando α ha valore 0, φ ha valore 1. Per l'ipotesi induttiva $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \neg\alpha$ Ma $\neg\alpha = \varphi = \psi$

– Secondo caso: $\varphi = \alpha \to \beta$

- Quando α ha valore 0, φ ha valore 1. Per l'ipotesi induttiva $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \neg\alpha$ Quindi (variante del Teorema 4), $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$ e dunque $B_1, B_2, ..., B_n \vdash (\alpha \to \beta)$ (MP). Ma $(\alpha \to \beta) = \varphi = \psi$
- Quando β ha valore 1, φ ha valore 1. Per l'ipotesi induttiva $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \beta$ Quindi (Ax1), $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \beta \to (\alpha \to \beta)$ e dunque $B_1, B_2, ..., B_n \vdash (\alpha \to \beta)$ (MP)
- Quando α ha valore 1 e β ha valore 0, φ ha valore 0. Per l'ipotesi induttiva $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \alpha$ e $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \neg\beta$.
  Quindi (Teorema 3), $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \alpha \to (\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta))$ e dunque $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \neg(\alpha \to \beta)$ (doppio MP). Ma $\neg(\alpha \to \beta) = \neg\varphi = \psi$

Completezza (3)

- Per mostrare che: $\models \varphi \;\Rightarrow\; \vdash \varphi$
  - Se φ è una tautologia, allora si ha $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \varphi$
  - In particolare, considerando A_1, $A_1, B_2, ..., B_n \vdash \varphi$ e $\neg A_1, B_2, ..., B_n \vdash \varphi$
    Quindi si ha $B_2, ..., B_n \vdash A_1 \to \varphi$ (Ded) e $B_2, ..., B_n \vdash \neg A_1 \to \varphi$ (Ded)
  - Dal Teorema "X", $B_2, ..., B_n \vdash (\neg A_1 \to \varphi) \to ((A_1 \to \varphi) \to \varphi)$ e dunque $B_2, ..., B_n \vdash \varphi$ (doppio MP).
  - Iterando il procedimento per tutte le A_i si ottiene $\vdash \varphi$

- *Completezza*
  - Le *conseguenze logiche* di un Γ qualsiasi sono fbf φ *derivabili*

    $$\Gamma \models \varphi \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash \varphi$$
  - Perché:
    - Si consideri un insieme Σ finito, con $\Sigma \subseteq \Gamma$, per cui $\Sigma \vdash \varphi$ (Compattezza)
    - Applicando ripetutamente il teorema di deduzione, si ottiene una tautologia e si ritorna al caso precedente

Teorie, assiomatizzazione

- Definizioni e terminologia
  - Un insieme di fbf Σ (comunque definito) può essere detto una **teoria**
  - Dato un insieme di fbf Γ, l'insieme dei **teoremi** di Γ è l'insieme di tutte le fbf *derivabili* a partire da Γ

    $Teo(\Gamma) = \{\varphi : \Gamma \vdash \varphi\}$
  - Un insieme di fbf Γ è un'**assiomatizzazione** di una teoria Σ sse

    $\Sigma \equiv Teo(\Gamma)$
  - Il sistema di assiomi $\mathrm{Ax}n$ descrive la *teoria* delle fbf *valide* della **logica proposizionale classica** L_P
    - La formalizzazione di una logica basata su l'assiomatizzazione delle fbf valide è anche detta 'a la Hilbert'

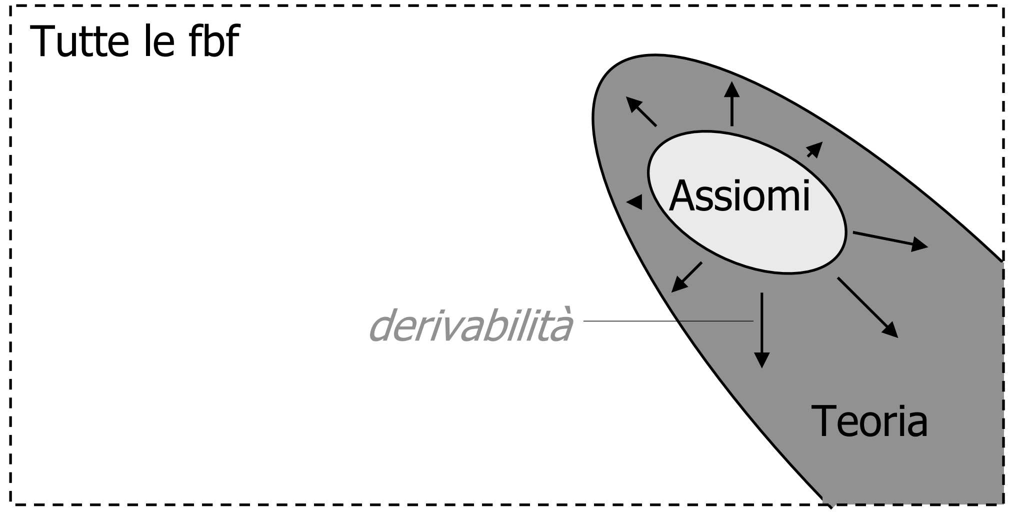
Indipendenza degli schemi Axn

- Insieme minimo
  - Per provare la completezza di Axn sono stati usati tutti e tre gli schemi
- Indipendenza
  - I tre schemi sono **logicamente indipendenti**:
    - Non è possibile derivare uno di essi dai restanti due

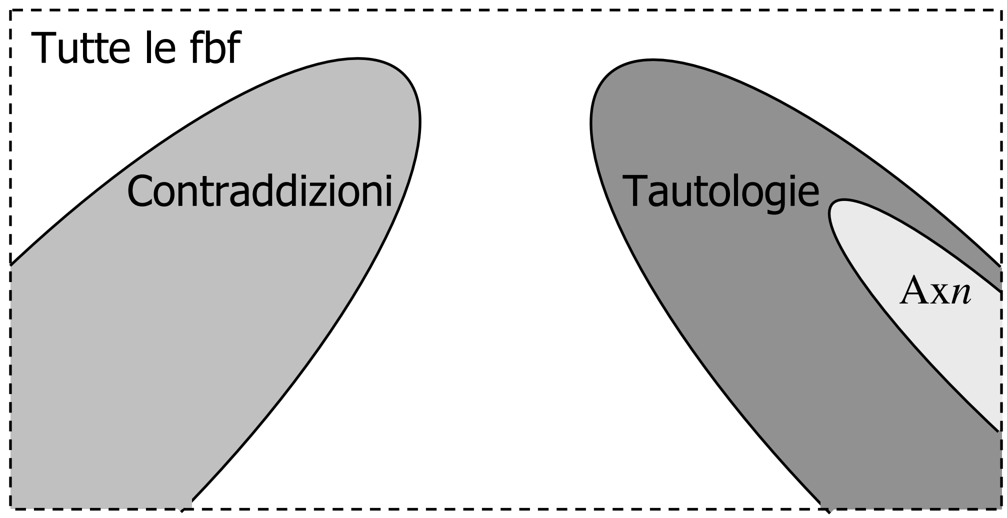
- Esistono altre assiomatizzazioni di L_P
  - Si può avere anche uno schema solo
  - Non si può invece evitare di usare schemi di assioma
    - Avendo, di fatto, un insieme di assiomi infinito
    - In alternativa, si può usare un insieme finito introducendo una nuova regola di inferenza che permette di 'clonare' gli assiomi per sostituzione (cioè si tratta della stessa cosa in forma diversa)

fbf e teorie

- Una **teoria** può essere **assiomatizzata**
  - In questo caso, la teoria coincide con i **teoremi** (fbf derivabili dagli assiomi)

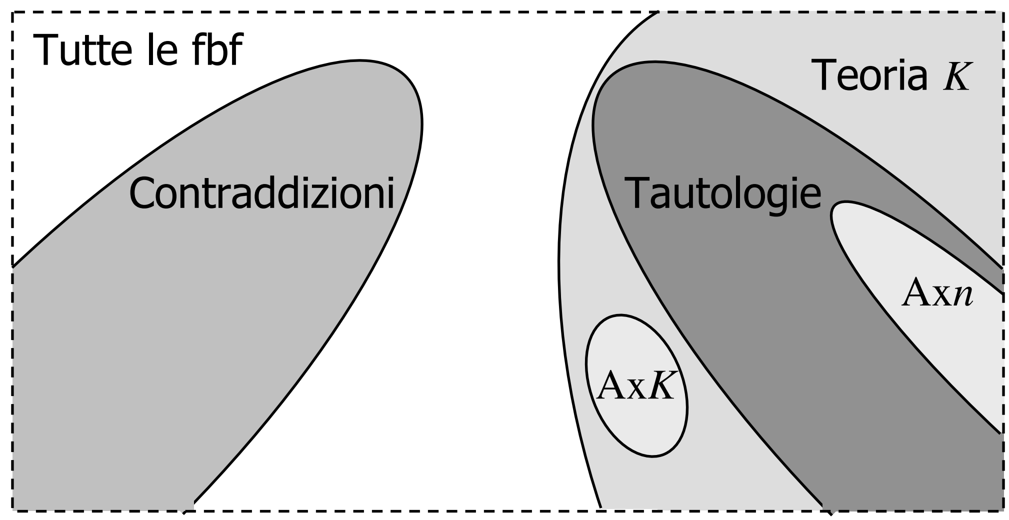


- Nel caso di $\mathrm{Ax}n$ per L_P
  - L'insieme di assiomi è infinito
  - La teoria è l'insieme delle tautologie (o fbf **valide**)



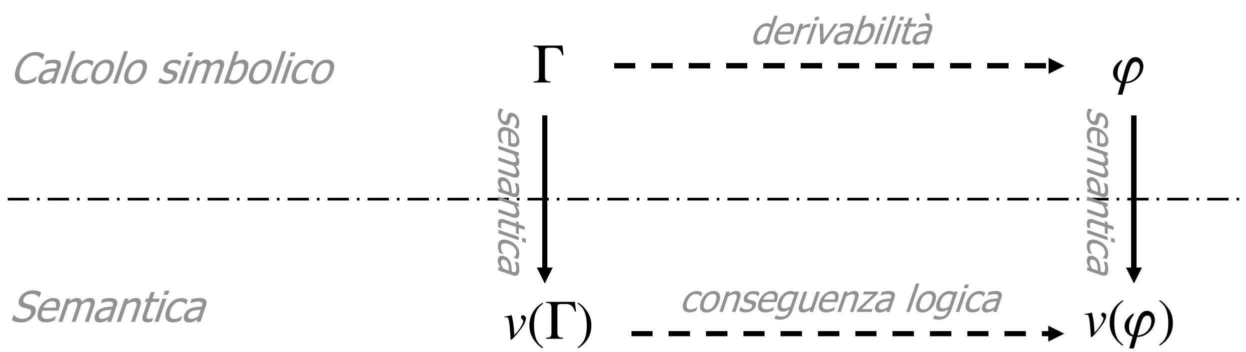
Teorie specifiche

- Qualsiasi teoria K (p.es. "la macchina non parte") può essere definita da assiomi $\mathrm{Ax}K$
  - La teoria K coincide con l'insieme di fbf derivabili da $\mathrm{Ax}K$
    - L'assiomatizzazione può essere finita, la teoria assiomatizzata no
- Qualsiasi teoria K include $\mathrm{Ax}n$ e tutte le tautologie (o fbf valide)
    - Si rammenti la definizione di derivazione
  - Non può contenere contraddizioni
    - Altrimenti include *tutte* le fbf



Calcolo simbolico

- Per la proprietà di *completezza*, la *derivazione* simbolica è rappresentativa delle relazioni semantiche (*conseguenza*)



  - Nel caso della logica proposizionale, la relazione di *conseguenza logica* può essere determinata in modo diretto
  - Nei sistemi più complessi, la derivazione simbolica è l’unica possibilità