Intelligenza Artificiale

Logica – Prime definizioni

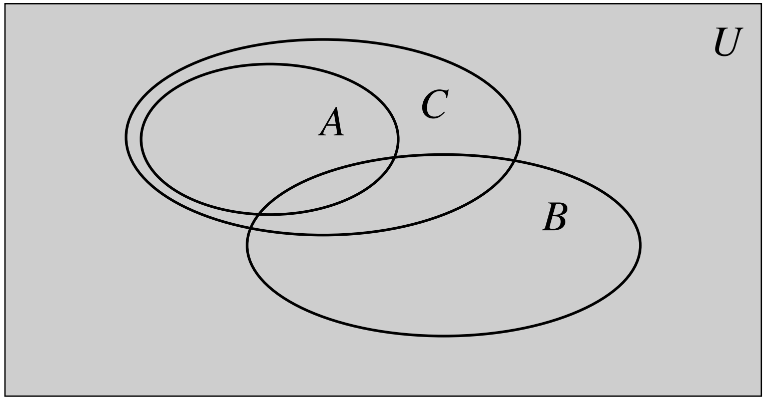
Marco Piastra

Parte 1

Sottoinsiemi
Algebra di Boole
Linguaggio proposizionale
Soddisfacibilità
Conseguenza logica

Sottoinsiemi e operazioni

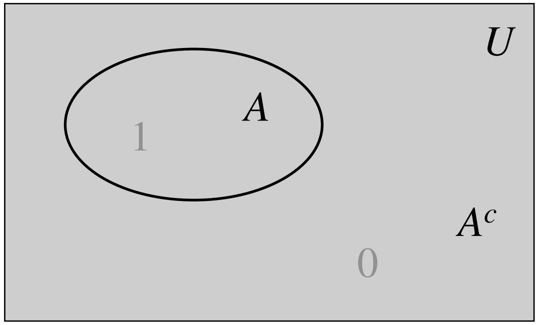
- Sottoinsiemi
  - U un insieme di riferimento
  - $A, B, C, \ldots$ sottoinsiemi di U
  - $\varnothing$ insieme vuoto (notare che $\varnothing \subseteq X, \forall X \subseteq U$)
- Operazioni
  - $A \cup B$ unione
  - $A \cap B$ intersezione
  - A^c complemento



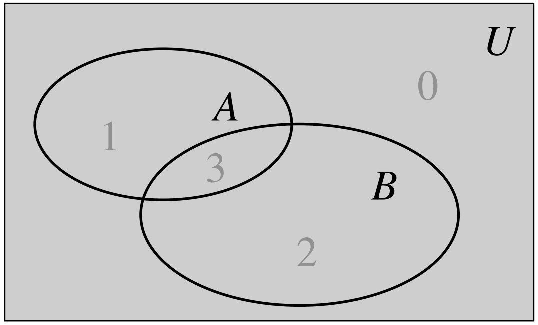
Algebra dei sottoinsiemi

- Assiomi
  - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C\,, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *associatività*
  - $A \cup B = B \cup A\,, \quad A \cap B = B \cap A$ *commutatività*
  - $A \cup (A \cap B) = A\,, \quad A \cap (A \cup B) = A$ *assorbimento*
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\,, \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *distributività*
  - $A \cup A^c = U\,, \quad A \cap A^c = \varnothing$

  – Esempi (calcolo intuitivo, operazioni sulle parti di U)



$A = 1$
$A^c = 0$
$A \cup A^c = 1 + 0$
$U = 1 + 0$

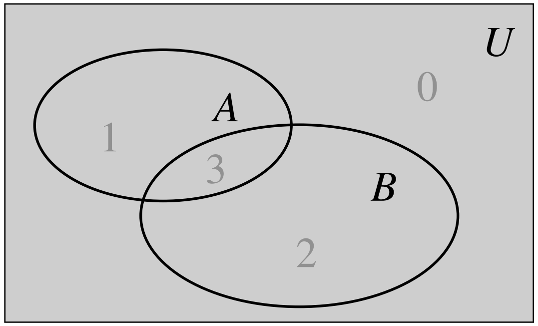


$A = 1 + 3$
$B = 2 + 3$
$A \cup B = 1 + 2 + 3$
$A \cap (A \cup B) = 1 + 3$

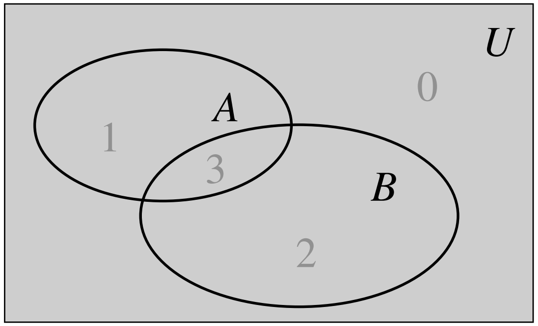
Proprietà

- Identità dimostrabili
  - $A \cup A = A\,,\quad A \cap A = A$ *idempotenza*
  - $A \cup \varnothing = A\,,\quad A \cap U = A$
    $A \cup U = U\,,\quad A \cap \varnothing = \varnothing$
  - $U^c = \varnothing\,,\quad \varnothing^c = U$
  - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c\,,\quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ *leggi di De Morgan*
  - $(A^c)^c = A$

– Esempi: legge di De Morgan ed una non-legge



$A = 1 + 3$
$A^c = 2 + 0$
$B = 2 + 3$
$B^c = 1 + 0$
$A \cup B = 1 + 2 + 3$
$(A \cup B)^c = 0$
$A^c \cap B^c = 0$



$A^c \cup B = U$
$A^c = 2 + 0$
$B = 2 + 3$
$A^c \cup B = 2 + 0 + 3$
Vale solo se $1 = \varnothing$
cioè se $A \subseteq B$

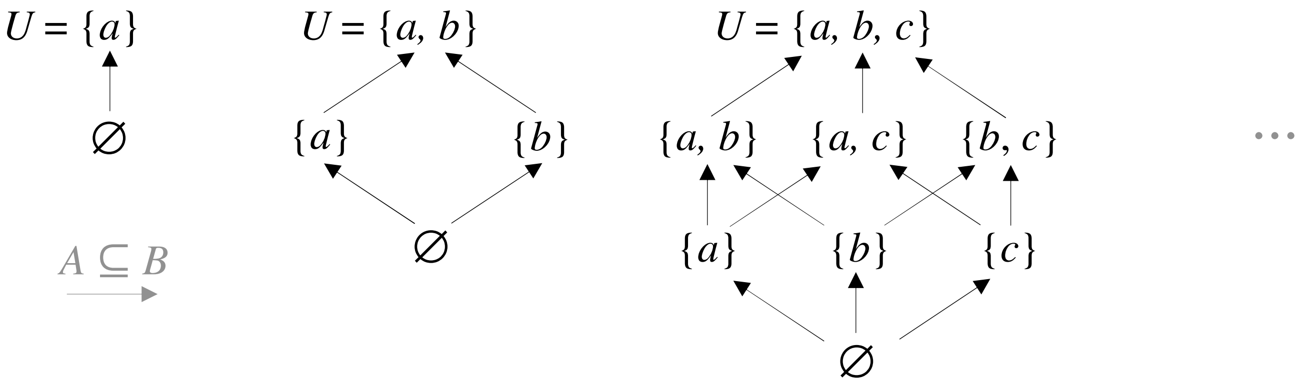
Algebra di Boole

– Dato un insieme U, qualsiasi collezione di sottoinsiemi di U che risulti *chiusa* rispetto alle operazioni $\cup$, $\cap$ e ^{c}

- (le operazioni $\cup$, $\cap$ e ^{c} soddisfano gli assiomi definiti in precedenza)

è un'algebra di Boole

- Un metodo semplice per costruire esempi:
  - Scegliere U
  - Costruire la collezione di tutti i sottoinsiemi (insieme delle parti, 2^U)



Operatori logici

- Si considera l'algebra più semplice: $\{U, \varnothing\}$ (~ 'tutto' e 'niente'; 'vero' e 'falso')
  - Algebra a due valori

- Notazione
  - Si indicano U con 1 ('vero') e $\varnothing$ con 0 ('falso')
  - Si sostituiscono i simboli delle operazioni $\cup$, $\cap$ e ^{c} rispettivamente con $\vee$, $\wedge$ e $\neg$

- Tavole di verità (*truth tables*)
  - Definizione in forma concisa delle operazioni $\vee$, $\wedge$ e $\neg$ nel caso a due valori $\{1, 0\}$

OR

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

AND

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

NOT

A	$\neg A$
0	1
1	0

Espressioni composite

– Il metodo delle tavole di verità
- Può essere esteso alle espressioni comunque composite
- Ad esempio per verificare assiomi e leggi dell'algebra di Boole

1a legge di De Morgan

Le due colonne sono identiche

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

– In generale
- Un'espressione composita è una funzione

  $f(x_1, x_2, ..., x_n) : \{1, 0\}^n \to \{1, 0\}$

  dove $x_1, x_2, ..., x_n$ sono le lettere che compaiono nell'espressione

Quante operazioni base?

- Quante operazioni logiche occorrono per rappresentare tutte le possibili funzioni?
  - Cioè, per poter esprimere qualsiasi funzione come espressione composita?

2^n *righe*

x_1	x_2	...	x_n	$f(x_1, x_2, ..., x_n)$
0	0	...	0	f_1
0	0	...	1	f_2
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
1	1	...	1	f_{2^n}

- Le tre operazioni $\vee$, $\wedge$ e $\neg$ formano una base adeguata
  - La tavola di verità può essere riscritta come un'unica espressione:

  a) per ciascuna riga r in cui $f_r = 1$, si combinano con $\wedge$ le n lettere A_1, A_2, ... A_n prendendo A_i se la i-esima casella vale 1 e $\neg A_i$ se vale 0

  b) si aggregano in $\vee$ tutte le combinazioni ottenute al passo precedente

Altre operazioni logiche

- Anche $\{\vee, \neg\}$ o $\{\wedge, \neg\}$ sono basi adeguate
  - Una base adeguata è costituita anche dal solo *NOR* o dal solo *NAND*:

NOR

A	B	$\neg(A \vee B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

NAND

A	B	$\neg(A \wedge B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Implicazione ed equivalenza
  - I logici matematici preferiscono usare come base $\{\rightarrow, \neg\}$
    - Cui si aggiunge di solito anche $\leftrightarrow$

Implicazione

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Equivalenza

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Identità notevoli $\quad A \rightarrow B \;=\; \neg A \vee B \qquad A \leftrightarrow B \;=\; (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

Linguaggio proposizionale

- Un linguaggio logico proposizionale L_P contiene:
  - Un insieme P di **simboli proposizionali**: $P = \{A, B, C, ...\}$
  - Due **connettivi** principali: $\neg, \rightarrow$
  - Tre **connettivi** derivati: $\wedge, \vee, \leftrightarrow$
  - Le parentesi: $(,)$

  – Regole sintattiche per la composizione di **formule ben formate** (**fbf**)
  - L'insieme di tutte le **fbf** di L_P si indica con $\mathrm{fbf}(L_P)$
  - $A \in P \;\Rightarrow\; A \in \mathrm{fbf}(L_P)$
  - $\varphi \in \mathrm{fbf}(L_P) \;\Rightarrow\; (\neg\varphi) \in \mathrm{fbf}(L_P)$
  - $\varphi, \psi \in \mathrm{fbf}(L_P) \;\Rightarrow\; (\varphi \rightarrow \psi) \in \mathrm{fbf}(L_P)$
  - $\varphi, \psi \in \mathrm{fbf}(L_P) \;\Rightarrow\; (\varphi \vee \psi) \in \mathrm{fbf}(L_P), \quad (\varphi \vee \psi) \;\Leftrightarrow\; ((\neg\varphi) \rightarrow \psi)$
  - $\varphi, \psi \in \mathrm{fbf}(L_P) \;\Rightarrow\; (\varphi \wedge \psi) \in \mathrm{fbf}(L_P), \quad (\varphi \wedge \psi) \;\Leftrightarrow\; (\neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi)))$
  - $\varphi, \psi \in \mathrm{fbf}(L_P) \;\Rightarrow\; (\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathrm{fbf}(L_P), \quad (\varphi \leftrightarrow \psi) \;\Leftrightarrow\; ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$

  - Non ci sono regole di precedenza: si usano le parentesi

Linguaggio e metalinguaggio

- Il linguaggio logico proposizionale L_P
  - E` composto da:
    - P, $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$, (,)
    - Regole sintattiche, o di buona formazione
  - Al linguaggio appartengono solo le formule ben formate o fbf
    - (*well formed formulas* o wff, nei testi in inglese)
- Altri costrutti vengono utilizzati per descrive le proprietà di L_P
    - Si dice appartengano al **metalinguaggio** rispetto al **linguaggio oggetto** L_P
  - Useremo le lettere greche (α, β, χ, φ, ψ) per le variabili proposizionali
    - Una variabile proposizionale indica una fbf qualsiasi
    - Ad esempio, la formula $\varphi \rightarrow \psi$ descrive uno **schema** di fbf, da cui si possono generare fbf per sostituzione
    - Esempi: $A \rightarrow B$
$(A \rightarrow B) \rightarrow C$
$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
    - Ma anche: $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$

Ulteriori costrutti particolari verranno introdotti gradualmente

Interpretazioni

- Un'**interpretazione** proposizionale
  - E` una <u>funzione</u> $v : \mathrm{fbf}(L_P) \to \{1, 0\}$
  - Attribuisce un significato o **valore di verità** a <u>tutte</u> le fbf di L_P
- – Il 'contenuto informativo' di un'interpretazione v
  - v assegna un valore alle fbf **atomiche** (= formate da un solo simbolo in P)
  - Il valore delle fbf composite è determinato secondo le regole dei connettivi
- – Caratteristiche (vincoli) di v :
  - $A \in P \;\Rightarrow\; v(A) \in \{1, 0\}$
  - $v(\neg\varphi) = 1 \;\Leftrightarrow\; v(\varphi) = 0$
  - $v(\varphi \wedge \psi) = 1 \;\Leftrightarrow\; v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$
  - $v(\varphi \vee \psi) = 1 \;\Leftrightarrow\; v(\varphi) = 1$ oppure $v(\psi) = 1$
  - $v(\varphi \to \psi) = 1 \;\Leftrightarrow\;$ non $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$
  - $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \;\Leftrightarrow\; v(\varphi) = v(\psi)$

Vedi tavole di verità

Soddisfacimento

- Interpretazioni e tavole di verità

  Esempio: $\varphi = (A \lor B) \land C$

  - Ciascuna riga rappresenta un'interpretazione
  - Ciascuna interpretazione assegna un valore a <u>tutte</u> le fbf di L_P
  - In accordo con le definizioni dei connettivi

	A	B	C	$A \lor B$	$(A \lor B) \land C$
v_1	0	0	0	0	0
v_2	0	0	1	0	0
v_3	0	1	0	1	0
v_4	0	1	1	1	1
v_5	1	0	0	1	0
v_6	1	0	1	1	1
v_7	1	1	0	1	0
v_8	1	1	1	1	1

  – Un'interpretazione v **soddisfa** una fbf φ sse $v(\varphi) = 1$
    - Nella tavola di verità, le righe evidenziate corrispondono alle interpretazioni che soddisfano φ

  – Si dice anche che v è un **modello** di φ
    - Per estensione, si dice che v soddisfa (è un modello di) un insieme di fbf $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ sse v soddisfa (è un modello di) tutte le fbf $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$

Tautologie, contraddizioni

- Una **tautologia**
  - E` una fbf soddisfatta da tutte le interpretazioni
    - Si dice anche fbf **valida**
    - Qualsiasi fbf del tipo $\varphi \vee \neg\varphi$ è una tautologia
- Una **contraddizione**
  - E` una fbf insoddisfacibile, (che non può essere soddisfatta da alcuna interpretazione)
    - Qualsiasi fbf del tipo $\varphi \wedge \neg\varphi$ è una contraddizione

A	$A \wedge \neg A$	$A \vee \neg A$
0	0	1
1	0	1

A	B	$(\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee A)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	B	$\neg((\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee A))$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

- Notare:
  - Non tutte le fbf sono tautologie o contraddizioni
  - Se φ è una tautologia $\neg\varphi$ è una contraddizione e viceversa

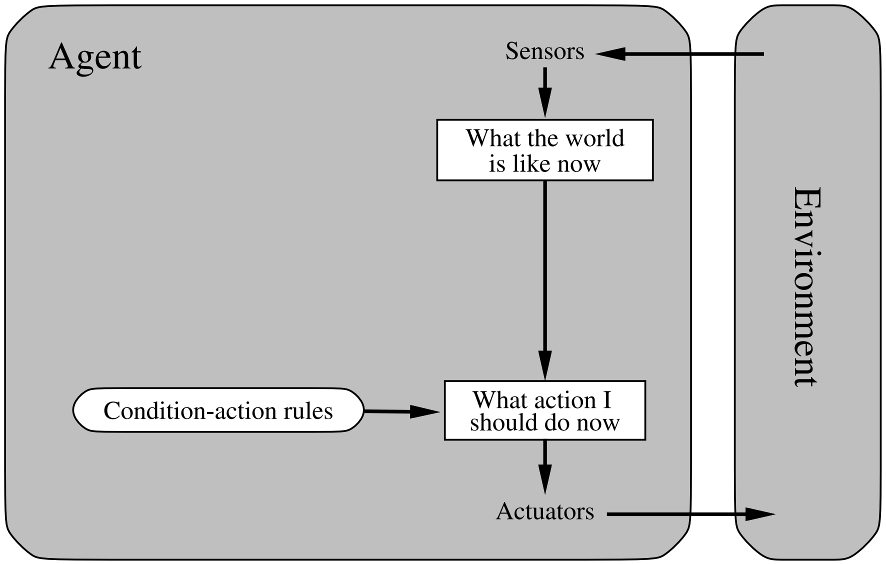
Linguaggio naturale, linguaggio logico

- Il processo di traduzione (o formalizzazione)
  - Il linguaggio logico L_P è composto da simboli e regole di formazione
  - Le interpretazioni assegnano un significato (formale) alle fbf di L_P
  - Che cosa rappresenta tutto ciò?
- – Le fbf di L_P sono le frasi di un linguaggio formale
  - Ciascuna rappresenta una frase in linguaggio naturale (p.es. in italiano)
  - Le fbf atomiche rappresentano proposizioni singole
    - "Giorgio è contento"
    - "Giorgio è un bipede senza piume"
    - "Tutti gli esseri umani sono bipedi senza piume"
- – Le fbf di L_P rappresentano frasi affermative, di senso compiuto
  - Di cui si può dire che siano vere o false

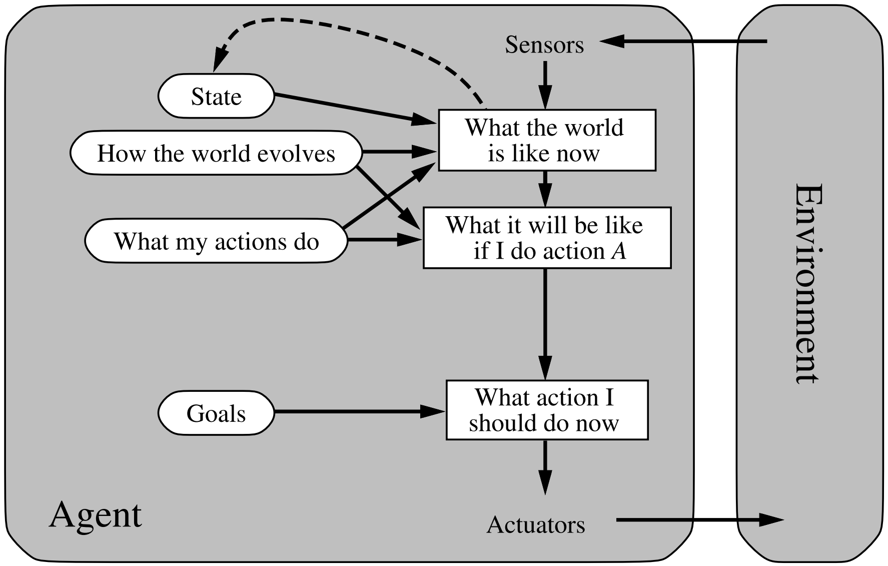
  - Quest'idea di traduzione non è esente da guai (paradossi)
    - "Questa proposizione è falsa"

Agenti razionali

- "Frasi di senso compiuto"
    - Percezioni
      stato dell'ambiente esterno attraverso i sensori
    - Stato interno
      dell'agente
    - Previsioni
    - Possibili effetti delle azioni
    - Obiettivi (goal)
    - Azioni
    - Regole



- Processi di ragionamento
    - Si basano sui legami logici tra le formule (frasi)
    - Determinano il comportamento dell'agente razionale



Relazioni tra formule

- Premesse:

$\varphi_1 = B \vee D \vee \neg(A \wedge C)$

"Silvia è madre di Giorgio" OR "Giorgio è contento" OR NOT("Giorgio è umano" AND "Giorgio è un bipede senza piume")

$\varphi_2 = B \vee C$

"Silvia è madre di Giorgio" OR "Giorgio è un bipede senza piume"

$\varphi_3 = A \vee D$

"Giorgio è umano" OR "Giorgio è contento"

$\varphi_4 = \neg B$

NOT "Silvia è madre di Giorgio"

- Affermazione:

$\psi = D$

"Giorgio è contento"

Qual'è il **legame logico** tra le premesse e l'affermazione?

E tra le premesse?

Conseguenza logica

- Costruendo la tavola di verità
  - Per le fbf dell'esempio

$$\varphi_1 = B \vee D \vee \neg(A \wedge C)$$
$$\varphi_2 = B \vee C$$
$$\varphi_3 = A \vee D$$
$$\varphi_4 = \neg B$$
$$\overline{\psi = D}$$

A	B	C	D	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	ψ
0	0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	1

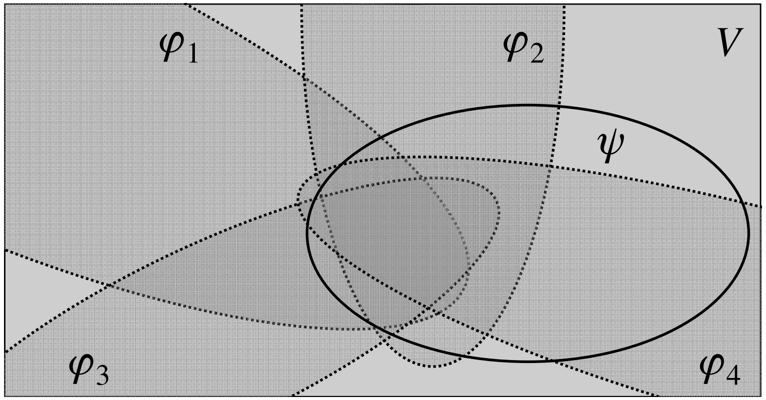
  - Si osserva che tutte le interpretazioni che soddisfano $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ soddisfano anche ψ
  - Relazione di **conseguenza logica**: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models \psi$
(*logical entailment*)

(Attenti alla notazione!)

Formule e sottoinsiemi

- Si consideri l'insieme V di tutte le possibili interpretazioni v
  - Ciascuna fbf di L_P (come $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi$) corrisponde a un sottoinsieme di V
    - Il sottoinsieme delle interpretazioni v che la soddisfano
    - Ad esempio, a ψ corrisponde $\{v : v(\psi) = 1\}$ (si scrive anche $\{v : v \models \psi\}$)
      - Il sottoinsieme potrebbe essere vuoto (se ψ è una contraddizione) o coincidente con V (se ψ è una tautologia)
  - L'insieme delle premesse $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ corrisponde all'intersezione dei sottoinsiemi corrispondenti a ciascuna fbf

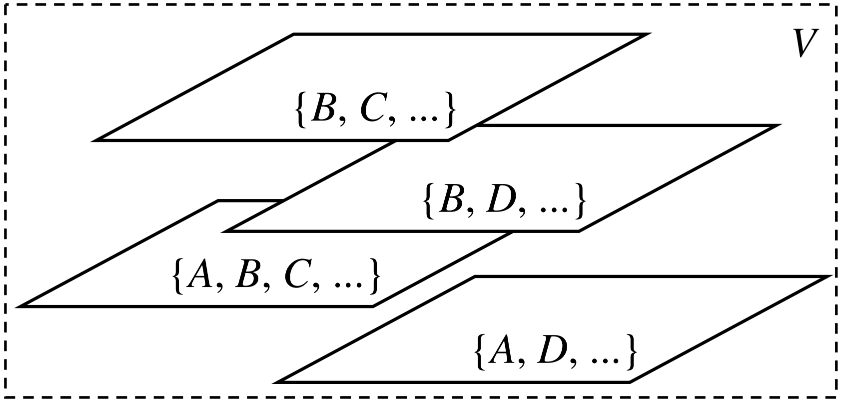
- **Conseguenza logica**
  - Tutte le interpretazioni che soddisfano le premesse soddisfano anche la conseguenza
  - L'intersezione dei sottoinsiemi che corrispondono alle premesse *è incluso* nel sottoinsieme che corrisponde alla conseguenza



Interpretazioni e mondi possibili

- In logica formale
  - Ciascuna interpretazione corrisponde ad un possibile 'stato delle cose'
    - P.es. come può essere immaginato da un'agente razionale passando attraverso il 'filtro' del linguaggio formale L_P
      - La scelta di L_P determina quali sono i fatti atomici, la 'granularità' della rappresentazione

- Interpretazioni come insiemi
  - Un'interpretazione v può essere vista come un sottoinsieme di $P = \{A, B, C, D, ...\}$
  - Per qualsiasi sottoinsieme $Q \subseteq P$ e per qualsiasi $A \in P,\ \ v(A) = 1 \ \Leftrightarrow \ A \in Q$
  - Il valore delle fbf composite viene determinato secondo le regole viste in precedenza
  - In ciascun mondo possibile, alcune fbf sono vere ed altre false



Implicazione

- Le fbf del problema precedente possono essere riscritte così:
  - Usando la base $\{\rightarrow, \neg\}$

$\varphi_1 = C \rightarrow (\neg B \rightarrow (A \rightarrow D))$	$\varphi_1 = B \vee D \vee \neg(A \wedge C)$
$\varphi_2 = \neg B \rightarrow C$	$\varphi_2 = B \vee C$
$\varphi_3 = \neg A \rightarrow D$	$\varphi_3 = A \vee D$
$\varphi_4 = \neg B$	$\varphi_4 = \neg B$
$\psi = D$	$\psi = D$

- Validità (in termini di conseguenza logica) di schemi generali:

$$\begin{array}{l} \varphi \rightarrow \psi \\ \varphi \\ \hline \psi \end{array}$$

- Si può verificare direttamente, che

$$\varphi \rightarrow \psi, \varphi \models \psi$$

- Analogamente

$$\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \models \neg\varphi$$

Concetti essenziali

- **Linguaggio simbolico**
  - Formalismo rigoroso
    - Un insieme di simboli
    - Regole sintattiche (di buona formazione) per le fbf
- **Semantica formale**
  - Interpretazioni come funzioni dal linguaggio ad una struttura
    - Un'interpretazione assegna un valore a <u>tutte</u> le fbf del linguaggio
    - Per L_P la struttura di riferimento è molto semplice: $\{1, 0\}$
- **Soddisfacimento, conseguenza logica**
    - Una fbf è soddisfatta da un'interpretazione che la rende <u>vera</u>
  - La conseguenza logica è una <u>relazione</u> tra fbf e/o insiemi di fbf
    - Ciascuna fbf è soddisfatta solo da alcune interpretazioni (sottoinsieme)
    - La relazione sussiste quando le interpretazioni che soddisfano le fbf delle premesse soddisfano anche la fbf (o le fbf) della conseguenza
    - Occorre considerare tutte le possibili interpretazioni (semantica *estensionale*)