Intelligenza Artificiale

Predicati e variabili logiche

Marco Piastra

1

Introduzione
al calcolo dei predicati

Limiti della logica proposizionale

- Logica proposizionale: solo *fatti*

  a: "*Socrate è un essere umano*" $\rightarrow$ b: "*Socrate è mortale*"

  a: "*Socrate è un essere umano*"

  ---

  b: "*Socrate è mortale*"

  $a \rightarrow b, a \vdash b$ (modus ponens)

- Nessuna *astrazione*

  u: "*Ogni essere umano*" $\rightarrow$ m: "*è mortale*"

  a: "*Socrate è un essere umano*"

  ---

  b: "*Socrate è mortale*" *

  $u \rightarrow m, a \nvdash b$ (?)

Fatti, oggetti e relazioni

- Occorre poter descrivere strutture più complesse
- I *fatti*

  "Socrate è un essere umano"

  "Socrate è mortale"

  "Kermit è amico di Miss Piggy"

  "Silvia è la madre di Giorgio e di Paola"

- sono espressi in riferimento a *oggetti*

  "*Socrate*", "*Kermit*", "*Miss Piggy*", …

- e *relazioni* *(o concetti)*

  "*essere umano*", "*mortale*", "*amico*", "*madre*", …

LPext – Predicati e costanti

- Linguaggio proposizionale esteso: LPext
- Al posto dell'insieme di **simboli proposizionali** (*atomici*)
- si adottano:
  - un insieme di **simboli predicativi**,
    con un numero predefinito di **argomenti**

    p.es. essereUmano(.), mortale(.), amico(..), madre(..), …
  - un insieme di **costanti individuali**

    p.es. Socrate, Kermit, MissPiggy, Silvia, Giorgio, Paola, …
- Ogni *fatto* deve essere espresso in LPext usando predicati e costanti
  - In forma atomica:
    un solo *simbolo predicativo* con una *costante* per ciascun *argomento*
  - Esempi di **fbf**:

    essereUmano(Socrate)

    essereUmano(Socrate) $\rightarrow$ mortale(Socrate)

    madre(Giorgio,Silvia) $\wedge$ madre(Paola,Silvia)

Non si può usare un *simbolo predicativo* come *argomento*

LPext – Interpretazioni

- Un'**interpretazione** di LPext è una funzione

  v : fbf(LPext) $\rightarrow$ {0, 1}

  - Si hanno quindi le definizioni già viste
    - **soddisfacibilità**, **modello**, **conseguenza logica**
- A parte la differenza di struttura delle formule
  - LPext è equivalente a (=traducibile in e viceversa) LP
    - Ogni formula φ di LPext può essere tradotta in una φ' in LP
    - In modo che $\Gamma \models \varphi$ sse $\Gamma' \models \varphi'$

LPext – Interpretazioni di Herbrand

- Costruire un'interpretazione con i simboli …
- Si usano **simboli predicativi** e le **costanti** di LPext
  - L'interpretazione si basa su un insieme H
  - H contiene i fatti (=fbf atomiche) che sono veri (in quella interpretazione)
  - La funzione v è definita in relazione ad H
  - Esempio:

    LPext : {Socrate, Giunone}, {mortale(.), essereUmano(.)}

    H = {mortale(Socrate), essereUmano(Socrate)}

    v(mortale(Socrate)) = 1 sse mortale(Socrate) ∈ H

    v(mortale(Giunone)) = 0 sse mortale(Socrate) ∉ H
  - il valore delle fbf composite viene associato in base alle usuali regole

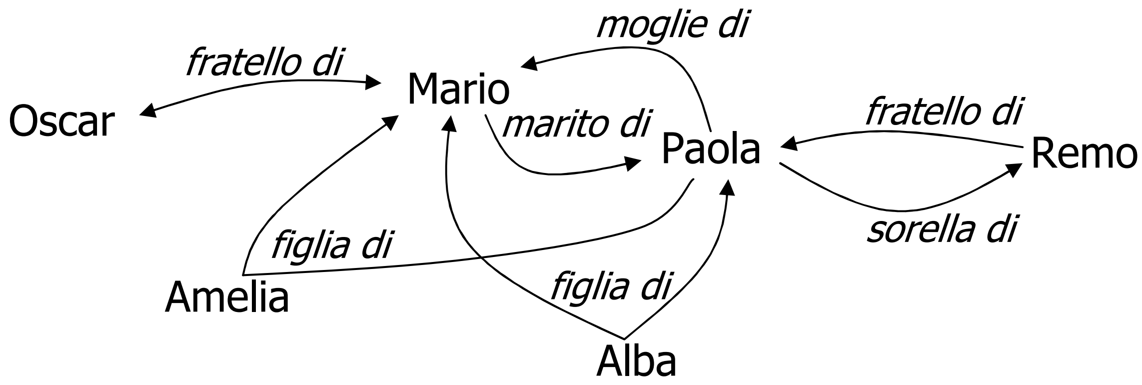
    v(mortale(Socrate) ∧ mortale(Giunone)) = 1
    sse mortale(Socrate) e mortale(Giunone) ∈ H

    v(mortale(Socrate) ∨ mortale(Giunone)) = 1
    sse mortale(Socrate) o mortale(Giunone) ∈ H

    v(¬mortale(Giunone)) = 1 sse mortale(Giunone) ∉ H

LPext – Interpretazioni, modelli

- Modello intuitivo



- **Interpretazione** formale
  - H = {fratelloDi(Oscar, Mario), fratelloDi(Mario, Oscar), moglieDi(Mario, Paola), maritoDi(Paola, Mario), figliaDi(Mario, Amelia), figliaDi(Paola, Amelia), figliaDi(Mario, Alba), figliaDi(Paola, Alba), fratelloDi(Paola, Remo), sorellaDi(Remo, Paola)}
  - esempi di fbf soddisfatte da H (cioè che H rende vere):

    maritoDi(Paola, Mario)
    fratelloDi(Oscar, Mario) $\wedge$ fratelloDi(Mario, Oscar)
    maritoDi(Paola, Remo) $\rightarrow$ (figliaDi(Mario, Amelia) $\wedge$ figliaDi(Mario, Alba))

LPred – Variabili e quantificatore

- Si arricchisce il linguaggio: **LPred**
- A LPext si aggiungono:
  - un insieme di **variabili**
    - p.es. x, y, z, ...
  - il **quantificatore universale** ∀
- Regole (aggiuntive) di buona formazione:
  - è ammesso l'uso delle **variabili** al posto delle **costanti individuali**
    - p.es. mortale(x), madreDi(x, y)
  - il quantificatore universale è associato ad una variabile e si usa come un connettivo unario
    - se $\varphi \in$ fbf(LPred) allora (∀x φ) $\in$ fbf(LPred)
  - Esempi:

    mortale(x)
    (∀x mortale(x))
    (∀x (essereUmano(x) $\rightarrow$ mortale(x)))

LPred – Significato intuitivo

- Le fbf **aperte** (i.e. con variabili non quantificate) indicano **astrazioni**
  - Un aggettivo predicativo (p.es. 'mortale') indica una qualità o una proprietà che gli oggetti possiedono o meno
  - la fbf 'mortale(x)'
    indica l'insieme di oggetti che possiedono questa proprietà
  - analogamente, la fbf 'madreDi(x, y)'
    indica l'insieme di coppie di oggetti per cui sussiste tale relazione
- Le fbf **chiuse** (i.e. tutte le variabili sono quantificate)
  indicano **fatti** o **regole**
  - la fbf '$\forall$x (essereUmano(x) $\rightarrow$ mortale(x))'
    indica un fatto, sebbene di carattere generale

    mentre la fbf 'essereUmano(Socrate) $\rightarrow$ mortale(Socrate)'
    indica un fatto specifico
  - solo le fbf chiuse hanno un valore di verità
    le formule aperte, in certo senso, sono strutture simboliche incomplete

LPred – Interpretazioni, modelli

- * **LPred** **Non è la logica del primo ordine**

- Un'interpretazione v di LPred
  - si basa sulla interpretazione di Herbrand H (già introdotta per LPext)
  - si aggiunge la regola per il quantificatore ∀
    - sia φ una fbf in cui x è l'unica variabile ed in φ non si hanno altri quantificatori
    - $v(\forall x\ \varphi) = 1$ sse tutte le sostituzioni di x con una costante di LPred generano una fbf φ' | $v(\varphi') = 1$
    - Esempio: $v(\forall x$ essereUmano(x)) = 1 sse

      essereUmano(Socrate) ∈ H
      essereUmano(Kermit) ∈ H
      essereUmano(Silvia) ∈ H
      …
  - la regola di interpretazione è estesa ai quantificatori multipli
    - p.es. (∀x ∀y sorellaDi(x,y))
  - ed alla composizione di formule
    - p.es. ((∀x essereUmano(x)) → (∀y mortale(y)))

LPred – Derivazioni

- Valgono le regole di inferenza, di derivazione e gli assiomi di LP
- Si aggiunge una nuova regola, di ***istanziazione***
  - a partire da una formula chiusa,
    contenente un numero qualsiasi di variabili quantificate
  - si può derivare una formula chiusa da cui
    - un quantificatore viene eliminato
    - sostituendo alla corrispondenti variabile una costante individuale
    - Esempi:

$$\frac{\forall x\ (\text{essereUmano}(x) \rightarrow \text{mortale}(x))}{(\text{essereUmano}(\text{Socrate}) \rightarrow \text{mortale}(\text{Socrate}))}$$

$$\frac{\forall x\ \forall y\ \text{figliaDi}(x,y)}{\forall x\ \text{figliaDi}(x,\text{Silvia})}$$

LPred – Teorie

- Si definisce

  AK: $\forall x\ (\text{essereUmano}(x) \rightarrow \text{mortale}(x))$

  come l'assioma di una teoria specifica K

- Per definizione la *teoria* Σ
  è composta da tutte le formule derivabili da AK
  - quindi, tutte le *istanziazioni* di AK
  - più tutte le formule derivabili in base alle regole proposizionali
  - Esempio: derivazione di "Socrate è mortale"

    $\text{essereUmano}(\text{Socrate}) \vdash \text{mortale}(\text{Socrate})$

    1: $\vdash \forall x\ (\text{essereUmano}(x) \rightarrow \text{mortale}(x))$ (AK)
    2: $\vdash \text{essereUmano}(\text{Socrate}) \rightarrow \text{mortale}(\text{Socrate})$ (ist)
    3: $\text{essereUmano}(\text{Socrate}) \vdash \text{mortale}(\text{Socrate})$ (ded)

LPred – Derivazione e conseguenza

- Si consideri ancora la teoria K, con l'unico assioma

  AK: $\forall$x (essereUmano(x) $\rightarrow$ mortale(x))

- Si consideri un LPred con *infinite* costanti individuali
  - Qualsiasi modello di K costruito con una struttura H è infinito
  - La relazione $\Gamma \models \varphi$ non può essere calcolata direttamente
    - Non si può più verificare in modo diretto la derivazione precedente
  - Ma se il calcolo dei predicati fosse **completo** ,
    si può utilizzare il calcolo simbolico al posto di quello semantico
    - LPred è **corretto** e non è **completo** rispetto ad H
  - *** LPred Non è la logica del primo ordine**
    - (serve come base teorica per i *sistemi a regole*)