

Analisi decisionale dinamica integrata. Sue basi teoriche ed applicazioni

Cronologia sommaria dello sviluppo dell'”arte della congettura”

La distinzione fra ragionamento dimostrativo e ragionamento plausibile risale alla filosofia greca.

Per Platone ed Aristotele la “vera” conoscenza è quella data dal ragionamento dimostrativo, l'*epistème*, ovvero lo “studio della verità”. Il ragionamento plausibile o congetturale è classificato *doxa*, ovvero opinione.

La distinzione tra conoscenza e opinione conserva la sua legittimità filosofica fino al XVII secolo. Tuttavia a questa classificazione si oppongono gli scettici (Pirrone) che sostengono il radicale punto di vista che tutta la nostra conoscenza è *doxa*: noi possiamo formare solo opinioni e, per ogni opinione, possiamo dare ragioni pro e ragioni contro. Lo scettico pirroniano però è troppo radicale, dubita di tutto e lo fa in egual maniera, al punto che l'unico atteggiamento ragionevole che possa abbracciare chi voglia vivere saggiamente sarebbe la sospensione del giudizio.

Questa visione del ragionamento plausibile, nel quotidiano, è chiaramente inaccettabile: noi dubitiamo ma a volte di più e a volte di meno.

La rivoluzione scientifica del XVII secolo e la neonata teoria matematica delle probabilità porterà dallo scetticismo “distruttivo” ad uno scetticismo “costruttivo”, mostrando come il riconoscimento del carattere fallibile e congetturale della conoscenza non porta necessariamente con sé la sospensione del giudizio.

Ecco alcune citazioni:

1689 – John Lock: “Siccome Dio ha posto qualcosa in piena luce e ci ha dato qualche conoscenza certa, sebbene limitata a poche cose, (...) così per la maggior parte di ciò che ci interessa, ci ha concesso solo il crepuscolo, come si potrebbe dire, della probabilità.”

1705 – Leibnitz: "L'opinione fondata sul verosimile merita forse anch'essa il nome di conoscenza. Altrimenti crollerebbe la conoscenza degli storici e molte altre ancora. Ma senza far questione di nomi credo che la ricerca dei gradi di probabilità sia estremamente importante. Eppure questa ci manca, ed è un grave difetto dei nostri manuali di logica."

1740 – David Hume: "Giustamente Leibnitz aveva osservato che è un difetto ai comuni sistemi di logica il fatto che essi si dilungano troppo quando spiegano l'operazione dell'intelletto nella costruzione delle dimostrazioni, ma non hanno molto da dire quando trattano della probabilità di altre misure dell'evidenza, da cui però dipendono la vita e l'azione delle persone".

Nello stesso periodo il vescovo Butler della chiesa d'Inghilterra aveva escluso che qualsiasi cosa potesse essere probabile per un'intelligenza infinita come Dio, ma per noi, esseri dall'intelletto evidentemente più limitato, solo la probabilità è la guida della vita.

Questo solo per citare alcuni nomi. Nello stesso periodo un continuo dibattito animato da giocatori d'azzardo, eretici e teologi (tentativo di provare l'esistenza dei miracoli) vede interventi autorevoli di figure quali Pascal (1670) Bayes(1763) e Price.

La concezione soggettivista, nella sua forma intuitiva implicita nelle idee di Bayes, Price, Pascal, Leibnitz e dello stesso Hume, conosce una curiosa eclisse nell'ottocento a causa dell'idea che esista qualche cosa come una probabilità oggettiva che quindi non dipende dalle nostre stime ma è in

qualche modo data in natura. Questa concezione, sostenuta dalla scuola frequentista, trova i suoi principali teorici nella prima metà del novecento con i positivisti logici Von Mises e Reichenbach che sostengono che possiamo identificare la probabilità con la frequenza relativa.

Vedremo in seguito la portata anche pratica dei problemi che questo approccio crea.

Si noti anche che i principi dei primi soggettivisti, come Pascal e Huygens non fanno alcun riferimento alle “frequenze” con cui un certo evento accade o cose simili, e nemmeno presuppongono che tali frequenze esistano, anche se, ovviamente, sono perfettamente compatibili con la loro esistenza. Il concetto primitivo da essi impiegato, invece, è quello di *valore previsto o speranza matematica* di un gioco d’azzardo, da cui è immediatamente derivabile il concetto di “probabilità” interpretabile come “grado di credenza razionale”. (Il valore previsto di un gioco d’azzardo è la posta che è “equo” pagare per partecipare al gioco, come il prezzo “equo” di un biglietto di lotteria)

Ecco infine due interventi dei primi due soggettivisti del nostro tempo, in perfetto accordo nonostante siano frutto di elaborazioni indipendenti:

1931 - Ramsey: la misurazione della probabilità soggettiva è “basata essenzialmente sulla scommessa, ma questo non pare irragionevole, se si pensa che in un certo senso noi scommettiamo per tutta la vita. Ogni volta che noi andiamo alla stazione scommettiamo che il treno partirà davvero, e se non avessimo un sufficiente grado di credenza in questo fatto, rinunceremo alla scommessa e ce ne rimarremo a casa nostra. Le scelte che Dio ci concede sono sempre condizionate dalle nostre congetture sulla verità di una certa proposizione.”

1931 – De Finetti : "Nel mondo dei vecchi razionalisti la scienza aveva come base la logica. Sferrando contro il razionalismo il suo travolgente attacco il pensiero relativista non può, a mio modo di vedere, sfuggire a due corni di un dilemma: o distruggere la scienza o negare alla logica la pretesa di informare di se' la scienza. Ma se vogliamo non rinunciare alla scienza, dobbiamo assumere come strumento fondamentale del pensiero scientifico, in luogo della logica ordinaria, categoria rigida e fredda, una logica viva, elastica e psicologica. Insomma lo strumento che ci occorre e' la logica dell'incerto, che io chiamerei meglio una teoria soggettiva della probabilità".

Per De Finetti quindi la probabilità e' qualcosa di radicalmente soggettivo ed e' semplicemente " il grado di fiducia che un individuo sente nell'avverarsi di un certo evento "

Questa posizione è in accordo con la rivoluzione portata dalla Fisica moderna, che introduce nella scienza e nella filosofia il concetto di “indeterminazione”: lo scienziato non cerca più una “legge” della natura ma costruisce modelli, solitamente perfettibili, cioè in qualche grado errati, per cercare di darsi una spiegazione del “come” la natura agisce; spesso non è possibile neppure spiegarsi il perché agisce o sembra agire in quel modo.

Feynman - La legge fisica - 1965

“Immaginiamo di inventare una buona ipotesi, di calcolarne le conseguenze e di scoprire che ogni volta queste si accordano con l’esperimento. La teoria è dunque giusta? No, non si è dimostrato che è errata. In futuro si potrebbero calcolare ulteriori conseguenze, si potrebbero fare altri esperimenti e si potrebbe allora scoprire che essa è sbagliata. Questo è il motivo per cui leggi come quella di Newton sul moto dei pianeti durano così a lungo. Egli intuì la legge

della gravitazione, calcolò ogni sorta di conseguenze per il sistema e così via, le confrontò con l'esperienza e ci sono volute varie centinaia di anni prima che fosse poi osservato il piccolo errore del moto di Mercurio. Durante tutto quel tempo non si era dimostrato che la teoria era errata per cui poteva essere supposta temporaneamente corretta. Ma non poteva mai essere dimostrata vera, perchè l'esperimento di domani poteva provare sbagliato quello che si pensava essere giusto. Noi non possiamo mai essere definitivamente sicuri di avere una teoria giusta, mentre possiamo essere sicuri di averne una sbagliata. E' tuttavia piuttosto notevole che si possano avere delle idee che durano così a lungo."

Alla luce dei nuovi concetti di scienza e conoscibilità la distinzione fra i "fatti" e le "opinioni" è solamente una questione di grado, di "gradi" di probabilità, per la precisione. Ciò che consideriamo "fatti" sono opinioni che riteniamo estremamente probabili.

Feynman - Da "Il valore della scienza" (Discorso tenuto all'assemblea dell'Accademia nazionale delle scienze - 1955)

"Lo scienziato ha una vasta esperienza dell'ignoranza, del dubbio, dell'incertezza, un'esperienza fondamentale, credo. Quando uno scienziato non sa la risposta a una domanda, è ignorante. Quando ha una vaga idea del probabile risultato, è incerto. E quando è sicuro del risultato, maledizione, gli rimane ancora qualche dubbio. La conoscenza scientifica è un insieme di dichiarazioni a vari livelli di certezza - alcune quasi del tutto insicure, altre quasi sicure, ma nessuna assolutamente certa.

Noi scienziati ci siamo abituati, e diamo per scontato che sia perfettamente coerente non essere sicuri, che si possa vivere senza *sapere*. Non so però se tutti ne siano consapevoli. La nostra libertà di dubitare è nata da una lotta contro l'autorità, agli albori della scienza. Era una lotta profonda e possente: permetteteci di mettere in discussione, di dubitare, di non essere certi. E' importante, credo, non dimenticare questa lotta e non perdere così quanto abbiamo conquistato... Come scienziati, conosciamo i grandi progressi che scaturiscono da una soddisfacente filosofia dell'ignoranza e il grande progresso che nasce dalla libertà di pensiero; è nostra responsabilità ribadire il valore di questa libertà: insegnare che il dubbio non va temuto ma accolto e discusso."

La logica del metodo scientifico non è essenzialmente differente dalla logica con cui dovremmo fare le nostre previsioni nella vita di tutti i giorni; la differenza sostanziale sta nel fatto che il metodo scientifico garantisce un maggior grado di precisione grazie all'uso del linguaggio matematico.

1954 - Polya: "Rigorosamente parlando, tutta la nostra conoscenza al di fuori della matematica e della logica dimostrativa consiste solamente di congetture. Ci sono quelle altamente rispettabili e affidabili che sono espresse in certe leggi generali della fisica. Ce ne sono altre, nè affidabili nè rispettabili, alcune delle quali vi fanno infuriare quando le leggete nei giornali. E nel mezzo ci stanno tutti i tipi di congetture, ipotesi, intuizioni. Noi garantiamo il nostro sapere matematico per mezzo del ragionamento dimostrativo, ma sosteniamo le nostre congetture per mezzo del ragionamento plausibile. Una dimostrazione matematica è ragionamento dimostrativo, ma le prove induttive che ha a disposizione il fisico, le prove circostanziali che hanno a disposizione il giudice e l'avvocato, le prove documentarie dello storico, e i dati statistici dell'economista, appartengono tutte al campo del ragionamento plausibile."

Probabilità, coerenza e induzione

Probabilità

In accordo con il pensiero scientifico allora possiamo dire che la vita è agire sulla base di previsioni, e le previsioni sono sempre incerte.

Secondo Poincaré "per quanto una previsione possa sembrarci solidamente fondata, non siamo mai assolutamente sicuri che l'esperienza non la smentirà, se vogliamo verificarla".

Ma le previsioni presentano diversi gradi di affidabilità o attesa: alcune sembrano quasi certe e altre più aleatorie.

Questi diversi gradi di attesa giocano un ruolo cruciale nel processo decisionale (più o meno cosciente) che porta all'azione.

L'elemento sempre presente nelle decisioni è l'incertezza, la mancanza di conoscenza, a cui si cerca di porre rimedio regolandosi in base all'attesa e alle sue diverse gradazioni.

L'incertezza si manifesta presentandoci, più o meno esplicitamente, più possibilità alternative; a queste attribuiamo un nostro grado di attesa, che chiamiamo "probabilità".

Ma se i valori di probabilità assegnati alle alternative (e anche l'individuazione delle alternative) dipendono strettamente dal soggetto che deve prendere la decisione, dalle sue conoscenze, dalle sue esperienze passate e anche dal suo carattere, non si può comunque parlare di giudizi di probabilità arbitrari, perché bisogna sottostare a delle leggi: la necessità di **non** prendere una decisione che risulti sempre sicuramente in perdita, qualunque sia l'alternativa che si verifichi, è detta "necessità di coerenza".

Coerenza

L'analisi di casi semplici basati sullo "schema delle scommesse" o "schema delle penalizzazioni" ha evidenziato le leggi necessarie e sufficienti a garantire in ogni caso il principio di coerenza.

Queste leggi, dette anche condizioni di coerenza, contengono anche il principio di induzione, che risulta quindi legittimato e rappresenta la capacità di apprendimento dall'esperienza.

Possiamo affermare così che il principio di coerenza è un dettato essenzialmente biologico: una specie vivente incapace di evitare decisioni sicuramente in perdita ed incapace di apprendere dall'esperienza è una specie di fatto estinta.

Le condizioni di coerenza sono tre:

1. la condizione di convessità: $0 \leq p \leq 1$;
2. l'additività semplice: in particolare la probabilità di un insieme di eventi incompatibili è data dalla somma delle probabilità dei singoli eventi
 $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$;
3. la regola del prodotto: $p(AB) = p(A|B) \cdot p(B) = p(B|A) \cdot p(A)$
(che ha come conseguenza diretta il teorema di Bayes)

A questo proposito Dennis Lindley afferma:

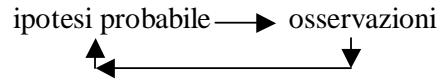
"Le proprietà di convessità, additività semplice e regola del prodotto sono le tre leggi alla base della teoria delle probabilità. Nessuna delle tre può essere dedotta dalle altre due, mentre qualsiasi altro risultato in merito alla probabilità può essere dedotto da esse. La teoria delle probabilità è un enorme tripode costruito su queste tre sole gambe... Il punto chiave consiste nel fatto che il modo in cui possono essere combinate delle valutazioni in merito a cose incerte non è affatto arbitrario. Non ci si può sedere e pensare a delle regole che sembrino ragionevoli. Le uniche sono le tre che sono state presentate, non più e non meno... Non si è liberi di sbizzarrirsi nell'esercizio intellettuale della creazione di leggi. Le leggi ci sono imposte e devono assicurare la coerenza di tutte le valutazioni."

Induzione

Se accettiamo il punto di vista di chi sostiene che la "Realtà" è di fatto un'entità mai completamente conoscibile, un'astrazione, l'antico concetto di induzione passa dall'impostazione classica

osservazioni → ipotesi (proposizione universale)

a quella soggettiva



Teorema di Bayes.

E' il meccanismo fondamentale che formalizza l'aumento di conoscenza dovuto all'esperienza, cioè come si può sfruttare un'osservazione pertinente con il mio modello previsionale in modo tale da aggiornarlo mantenendo la coerenza.

Dal punto di vista matematico il Teorema di Bayes è una diretta derivazione dal Teorema delle probabilità composte, o regola del prodotto:

Da

$p(A|B) \cdot p(B) = p(B|A) \cdot p(A)$ infatti si ricava immediatamente

$$p(A|B) = p(B|A) \cdot p(A) / p(B) = K \cdot p(B|A) \cdot p(A)$$

dove:

$1/p(B)$ è un fattore di normalizzazione (serve per riproporzionare le probabilità alla luce dell'avverarsi di B e quindi della riduzione del dominio delle possibilità)

$p(B|A)$ è la cosiddetta verosimiglianza: una verosimiglianza più o meno grande significa che la conoscenza di A ha il potere di rendere più o meno verosimile B.

Questa formuletta collega fra loro le probabilità malamente chiamate *a priori* e *a posteriori*, in pratica la valutazione di probabilità di un evento A prima e dopo l'avverarsi (o meglio ancora prima e dopo essere venuto a conoscenza dell'avverarsi) di un altro evento B.

Si noti che l'unico caso in cui non è possibile fare tesoro dell'esperienza è il caso in cui l'evento A sia considerato impossibile $p(A) = 0$.

Un comportamento "saggio" vuole che un'ipotesi, per quanto poco probabile, non sia dichiarata in modo semplicistico impossibile: un'ipotesi dalla probabilità bassissima, molto vicina allo 0, ma non rigidamente fissata a zero, può, in seguito a ripetute osservazioni che smentiscono la nostra credenza iniziale, essere recuperata.

Feynman - da "Il valore della scienza"

"Per il progresso della scienza occorre la capacità di sperimentare, l'onestà nel riferire i risultati (che vanno riportati senza tener conto di come avremmo voluto che fossero) e infine, cosa molto importante, l'intelligenza per interpretarli. L'essenziale è che questa intelligenza non deve essere sicura in anticipo di come le cose devono essere. E' chiaro che si possono avere pregiudizi che ci portano a dire: "Questo è molto improbabile; questo non mi piace." Pregiudizi di tal fatta sono però diversi dalla certezza assoluta, indicano soltanto un'inclinazione. Fino a che si è solo disposti sfavorevolmente ma non si ha un pregiudizio assoluto, si finirà prima o poi per tener conto degli esperimenti anche se i risultati sono diversi dalle nostre aspettative. Se invece si è assolutamente certi in anticipo di qualche precondizione che la scienza deve soddisfare si arriverà addirittura a trascurare i risultati. Per l'esistenza stessa della scienza è necessario che esistano delle menti che non ammettono che la natura debba soddisfare delle condizioni preconcrete."

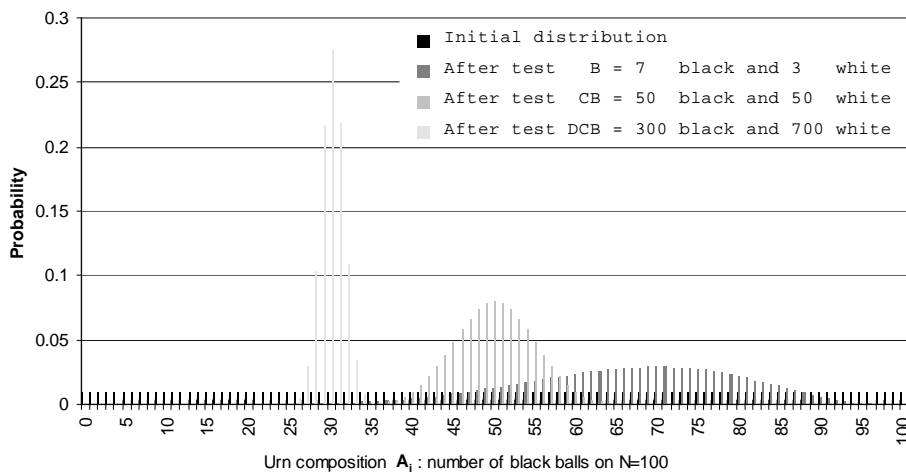
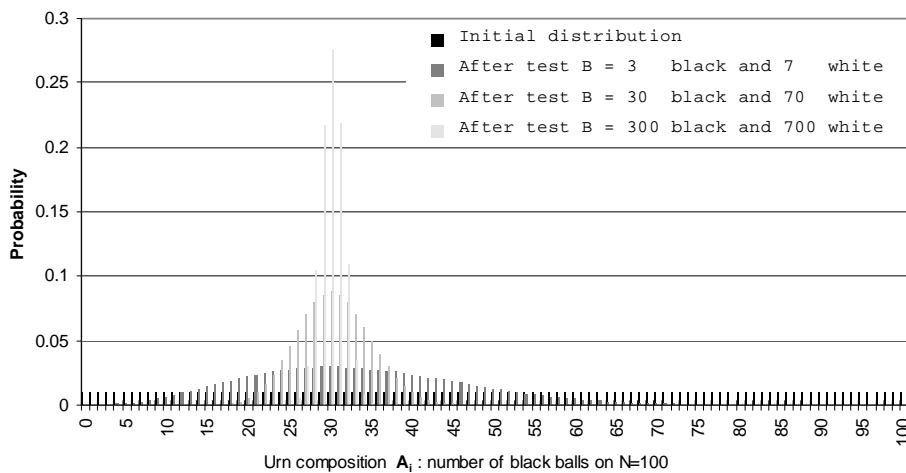
In sostanza, il vantaggio della interpretazione soggettiva rispetto al frequentismo sta nel fatto che, di fronte ad una nuova evidenza o osservazione, il modello precedentemente costruito non deve essere rigettato e rifatto in quanto *errato*, ma solo aggiornato al nuovo stato di conoscenza.

Questo implica che due soggetti che partissero da valutazioni iniziali diverse, per motivi personali o per informazioni in loro possesso differenti, messi di fronte alle stesse evidenze, col tempo esprimerebbero opinioni sempre più vicine, fino a renderle coincidenti, indipendenti dalle loro rispettive convinzioni iniziali.

Attenzione al “senno del poi”!

Non si tira ad indovinare cosa succederà, ma bisogna comportarsi coerentemente in base alle informazioni che si posseggono.

Esempio. Gioco a testa e croce:



Riporto un brano dell'introduzione di "Rules for Selecting Prior Distributions: A Review and Annotated Bibliography" di Kass e Wasserman, CMU per mostrare quanto sia facile cadere nell'illusione della "probabilità vera" o del "numero magico".

“In seguito agli scritti di Bayes e specialmente di Fisher (1922) lo scopo e il merito dell'inferenza bayesiana sono stati oggetto di dibattito. I critici trovano l'arbitrarietà nella scelta della probabilità a priori una difficoltà schiacciante, mentre i fautori sono attratti dalla consistenza logica, semplicità e flessibilità dell'approccio bayesiano e tendono a vedere la determinazione della probabilità a priori come un importante ma governabile dettaglio tecnico.

Oggi giorno la maggior parte dei bayesiani si basa sul fondamento soggettivista articolato da De Finetti e Savage. Questo ha portato a suggerimenti per una personale “elicitazione” della probabilità a priori, ma questi metodi strettamente collegati a problemi specifici non sono stati sviluppati in modo esteso ed hanno avuto un impatto relativo sulla pratica statistica. Perciò, poiché l’aumento della potenza di calcolo ha accresciuto l’interesse nei confronti delle tecniche bayesiane, nuove applicazioni continuano a sollevare il problema di come debbano essere scelte le probabilità a priori....”

Questi signori in pratica sono alla ricerca di regole formali, generali, indipendenti dal contesto, che diano delle probabilità “vere”, che si suppongono non conosciute.

Rischio e Utilità

E’ sufficiente valutare le probabilità per prendere una decisione?

No, sono necessari altri elementi, cioè le conseguenze, che associate alle relative probabilità danno il rischio o conseguenza attesa (è necessario farlo alternativa per alternativa) e l’utilità, parametro non tecnico, ma economico o politico.

Versione tradizionale: $R = F \times M$ (Rischio = Frequenza di accadimento x Magnitudo)

In presenza di tutte le alternative e sotto l’ipotesi di “rigidità di fronte al rischio”:

$R = p \times c$ (Rischio = probabilità x conseguenza, per ogni alternativa)

Secondo De Finetti e gli economisti al posto di c si usa U (utilità) che indicativamente è una “conseguenza” pesata sulla sensibilità del decisore (avversione o propensione al rischio): $R = U \times c$

Ecco il meglio: $R = f(p, c, U(p, c))$; in pratica si esplicitano i vari fattori decisionali: probabilità e conseguenza devono essere definiti alternativa per alternativa, e la funzione di utilità deve essere separata, in modo da poter essere valutata e modificata, e deve poter essere applicata sempre alternativa per alternativa.

Per questo motivo è fondamentale che il momento e il soggetto che compie l’analisi siano diversi dal momento e dal soggetto che prende la decisione.

L’analista presenta le alternative possibili e le relative conseguenze e il decisore applica la sua personale funzione di utilità in funzione degli scopi che si prefigge.

Lettura consigliata: da “Che t’importa di ciò che dice la gente?” di R. Feynman, Capitolo “Cifre fantastiche”

Nota: parte delle citazioni riportate è presa dal libro “I fatti e le opinioni. La moderna arte della congettura” di Paolo Garbolino, ed. Laterza, 1997