

Intelligenza Artificiale

Breve introduzione alle logiche non classiche

Marco Piastra

Argomenti

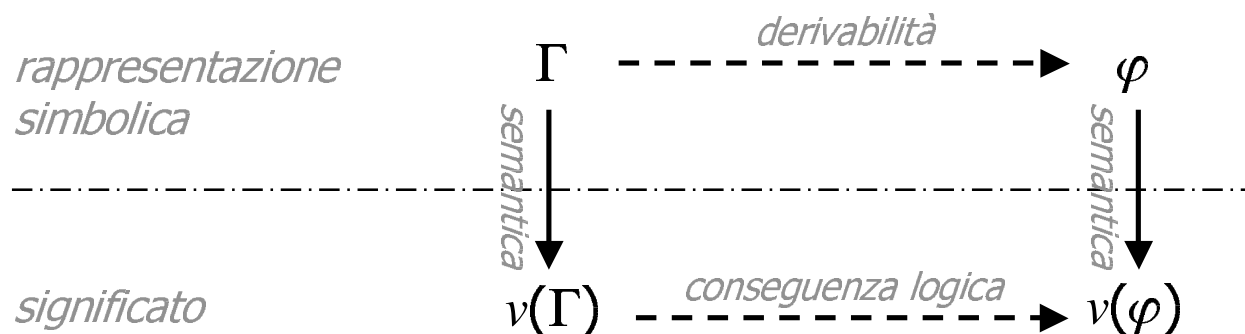
0. In che senso non classiche?
1. Logica abduttiva
2. Logiche modali
3. Logiche multivalenti

Logiche non classiche?

- Per logica **classica** si intende:
 - la logica proposizionale
 - la logica predicativa del primo ordine
(in base alle definizioni viste nelle lezioni precedenti)
- Una logica **non classica** adotta regole diverse o più estese
- Perché cambiare?
 - per risolvere problemi diversi dal calcolo deduttivo
 - per rappresentare altre forme di ragionamento
 - forme più deboli
 - forme legate a fattori di contesto

Direzioni di estensione o modifica

- a) Usare la logica **classica** in modo diverso
 - p. es. per un calcolo non deduttivo
- b) Abbandonare il principio di vero-funzionalità
 - non si impone più che il valore di verità di una proposizione sia solo funzione del valore di verità dei suoi componenti
 - (si rinuncia alle “tavole di verità”)
- c) Abbandonare il principio di bivalenza
 - non si assume più che una proposizione possa essere solo vera o falsa



2

Logica abduttiva

Forme di ragionamento (C. S. Peirce)

*modus
ponens*

$$\begin{array}{l} \varphi \rightarrow \psi \\ \varphi \\ \hline \psi \end{array}$$

- Ragionamento **deduttivo**

- i fagioli che provengono da questo sacco sono bianchi
 - questi fagioli provengono da questo sacco
- QUINDI*
- questi fagioli sono bianchi

- Ragionamento **induttivo**

$$\begin{array}{l} \varphi \\ \psi \\ \hline \varphi \rightarrow \psi \end{array}$$

- questi fagioli provengono da questo sacco
 - questi fagioli sono bianchi
- QUINDI*
- i fagioli che provengono da questo sacco sono bianchi

- Ragionamento **abduttivo**

$$\begin{array}{l} \varphi \rightarrow \psi \\ \psi \\ \hline \varphi \end{array}$$

- i fagioli che provengono da questo sacco sono bianchi
 - questi fagioli sono bianchi
- QUINDI*
- questi fagioli provengono da questo sacco

Logica abduttiva

- Le regole di base per la rappresentazione del ragionamento sono quelle della logica **classica**
- E' invece diversa la rappresentazione formale del **tipo** di ragionamento
 - e quindi il **tipo** di calcolo utilizzato
- In generale, in un ragionamento abduttivo:
 - si ha un *modello* o descrizione astratta formalmente rappresentato da una teoria K
 - si ha un insieme di *osservazioni* formalmente rappresentate da un insieme di proposizioni Σ
 - in generale $K \not\models \Sigma$
 - si cerca è un completamento Γ tale per cui
$$K \cup \Gamma \vdash \Sigma$$
 - intuitivamente, Γ descrive le *ipotesi* che **spiegano** Σ

Esempio di ragionamento abduttivo

- Modello (K)

K_1 : batteriaScarica \rightarrow
 $(\neg\text{funzionanoLuci} \wedge \neg\text{funzionaAutoradio} \wedge \neg\text{motorinoGira})$

K_2 : motorinoGuasto $\rightarrow \neg\text{motorinoGira}$

K_3 : $\neg\text{motorinoGira} \rightarrow \neg\text{macchinaParte}$

K_4 : serbatoioVuoto \rightarrow
 $(\text{indicatoreAZero} \wedge \neg\text{macchinaParte})$

- Osservazioni (Σ)

Σ_1 : $\neg\text{macchinaParte}$

- Possibili completamenti o *ipotesi* (Γ)

Γ_1 : batteriaScarica $(\{K_1, K_3\} \cup \{\Gamma_1\} \vdash \Sigma_1)$

Γ_2 : motorinoGuasto $(\{K_2, K_3\} \cup \{\Gamma_2\} \vdash \Sigma_1)$

Γ_3 : serbatoioVuoto $(\{K_4\} \cup \{\Gamma_3\} \vdash \Sigma_1)$

Tecniche di ragionamento abduttivo

- Identificazione delle ipotesi plausibili
 - tutte le ipotesi Γ in grado di spiegare tutte le osservazioni Σ
 - alcune ipotesi implicano anche altre osservazioni
- Investigazione, allo scopo di acquisire nuove *osservazioni*
- Strategie di scelta e tra varie *ipotesi*
 - scelta basata sul *rischio*
 - se il motorino è guasto, occorre un intervento del meccanico
 - è più facile rimediare alla batteria scarica o la mancanza di benzina
 - scelta basata sul *costo* delle osservazioni
 - distinguere tra batteria scarica e motorino guasto non è sempre facile
- In generale:
 - le tecniche di calcolo deduttivo sono di carattere generale
 - le tecniche di calcolo abduttivo sono specifiche
 - spesso si usano regole 'ad hoc'
 - associate a regole di applicazione (meta-knowledge)

Backward chaining (*goal-oriented strategy*)

- In un certo senso, è il procedimento inverso di una *dimostrazione*
 - si tratta di utilizzare il *modus ponens* alla rovescia
 - a partire da un *goal* ψ si cercano gli φ tali per cui $\varphi \vdash \psi$
 - un ragionamento abduttivo per investigazione
- Si utilizza nei sistemi esperti (p. es. Jess) per rappresentare il ragionamento abduttivo

```
(defrule causa-effetto
  (macchinaNonParte)
  (indicatoreAZero)
  =>
  (serbatoioVuoto)
  (printout t
    "Diagnosi: il serbatoio e` vuoto))
```

```
(do-backward-chaining indicatoreAZero)

(defrule chiedi
  (need-indicatoreAZero)
  (test (ask "Indicatore a zero?"))
  =>
  (assert (indicatoreAZero)))
```

```
Jess> (assert (macchinaNonParte))
Jess> (run)
  Indicatore a zero? y
  Diagnosi: il serbatoio e` vuoto
Jess>
```

3

Logiche modali

Un paradosso?

- Si consideri la formula proposizionale **classica**

$$(\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$$

- tale formula è una *tautologia*

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$	$\psi \rightarrow \varphi$	$(\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$
1	1	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
0	0	1	1	1

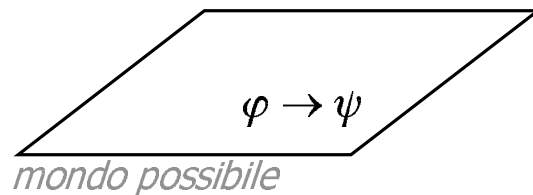
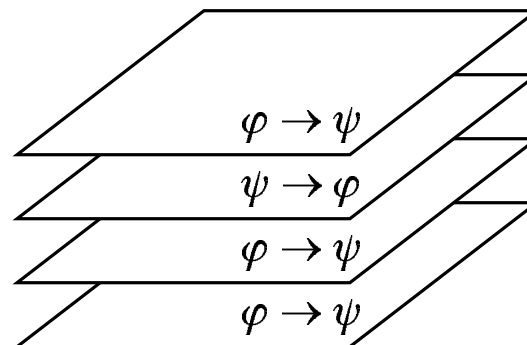
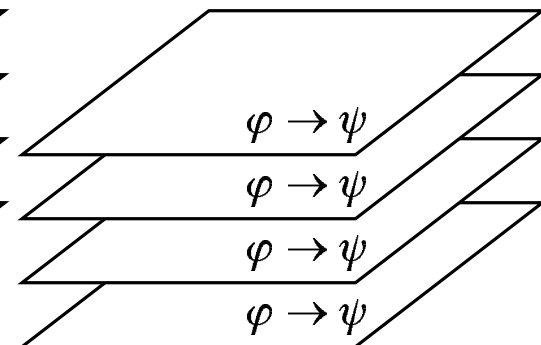
- La lettura informale è abbastanza inquietante:
 - comunque prese due proposizioni φ e ψ
 - una delle due è una *conseguenza logica* dell'altra
 - infatti:
 - in logica classica, $\varphi \rightarrow \psi$ implica che $\varphi \vdash \psi$
 - per il teorema di completezza, $\varphi \vdash \psi$ equivale a $\varphi \models \psi$

Implicazione stretta

- Si direbbe che la relazione di *conseguenza logica*
 - è troppo 'pervasiva'
 - non si possono rappresentare coppie di proposizioni che non hanno alcuna relazione logica
 - "questi fagioli sono bianchi"
 - "anche oggi c'è lezione di IA"
- L'origine storica della logica modale (Lewis):
- il desiderio di rappresentare una forma di implicazione per cui questo 'paradosso' non vale
 - originariamente detta *implicazione stretta*
 - che non sussiste per qualsiasi coppia di proposizioni
 - che si affianca e non rimpiazza l'implicazione **classica**
 - detta anche *implicazione materiale*

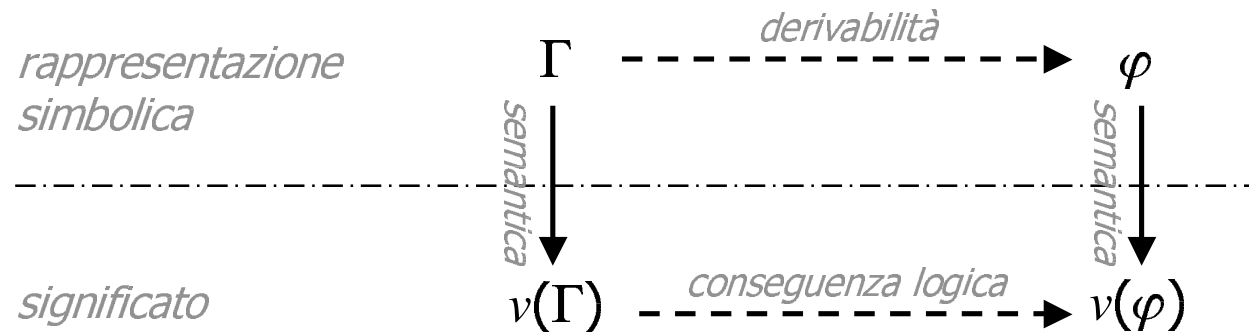
Mondi possibili

- L'*implicazione stretta* si esprime mediante un operatore **modale** unario:
 - ($\varphi \rightarrow \psi$)
- L'idea di fondo è basata sull'idea dei *mondi possibili* (Kripke)
 - in logica **classica** si considera una sola interpretazione alla volta (interpretazione $v \Leftrightarrow$ *mondo possibile*)
 - in logica **modale** si considerano più interpretazioni alla volta (struttura di *mondi possibili*)
 - la logica **classica** vale in ciascun *mondo possibile*

logica **classica**logica **modale**□ ($\varphi \rightarrow \psi$)

Definizione della logica modale

- Un' *estensione* della logica **classica**



- Per ottenere un sistema logico-simbolico occorre:
 - estendere il linguaggio
 - definire le strutture e le regole semantiche
 - estendere la relazione di derivazione
 - dimostrare la correttezza e la completezza

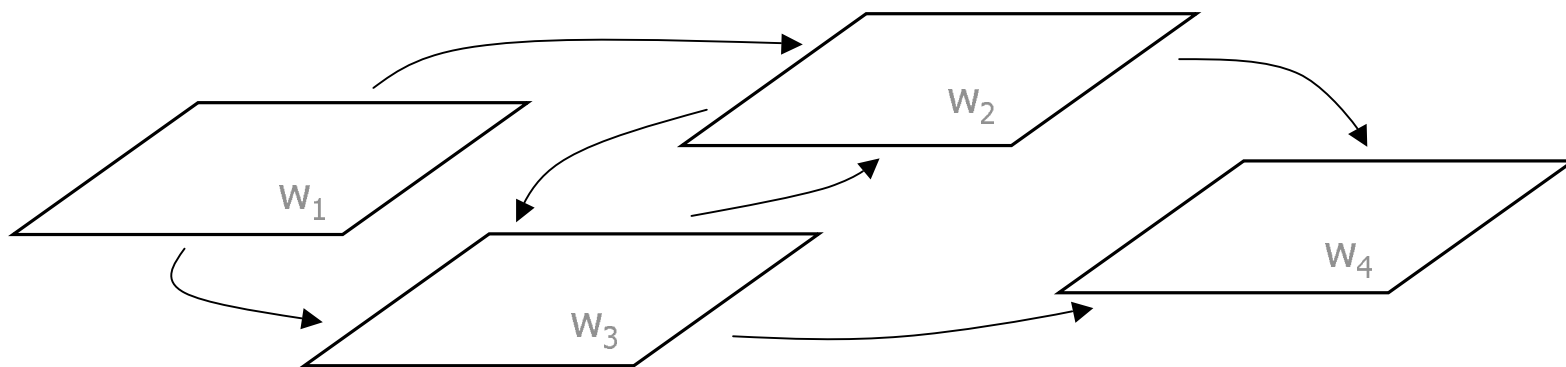
Linguaggio e regole di derivazione

- Il linguaggio della logica proposizionale **classica**
- più un simbolo **modale** unario:
 - φ
 - si legga come `è *necessario* che φ '
 - o anche `io so che φ '
- ed un'altro simbolo **modale** unario *derivato*:
 - ◇ $\varphi \Leftrightarrow \neg \square \neg \varphi$
 - si legga come `è *possibile* che φ '
 - o anche `non mi risulta che non φ '
- Regole di inferenza
 - il *modus ponens*
 - la regola di necessitazione

$$\frac{\varphi}{\square \varphi}$$

Semantica dei mondi possibili

- Strutture di riferimento
 - dato un linguaggio proposizionale modale \mathcal{L}_{MP}
 - le strutture di mondi possibili $\langle W, R, \nu \rangle$ dove:
 - W è un insieme di punti detti anche 'stati' o 'mondi possibili'
 - R è una relazione binaria su W^2 che definisce l'accessibilità tra mondi
 - ν è una funzione che assegna un valore di verità alle lettere proposizionali di \mathcal{L}_{MP} in ogni mondo $w \in W$
- Non ci sono solo mondi possibili, ma anche una relazione di accessibilità tra mondi



Regole semantiche

- Soddisfacimento
 - si dice che una struttura $\langle W, R, \nu \rangle$ soddisfa una formula *non* modale φ in un mondo $w \in W$ sse φ è vera in w
 - si scrive

$$\langle W, R, \nu \rangle, w \models \varphi$$
 - regole modali
 - $\langle W, R, \nu \rangle, w \models \Box \varphi$ sse $\forall w' \in W, wRw'; \langle W, R, \nu \rangle, w' \models \varphi$
 - $\langle W, R, \nu \rangle, w \models \Diamond \varphi$ sse $\exists w' \in W, wRw'; \langle W, R, \nu \rangle, w' \models \varphi$
 - data una qualsiasi formula $\psi \in \mathcal{L}_{MP}$

$$\langle W, R, \nu \rangle \models \psi \text{ sse } \forall w \in W; \langle W, R, \nu \rangle, w \models \psi$$

Pluralità delle assiomatizzazioni

- Logica modale normale

$$K: \Box (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box \varphi \rightarrow \Box \psi)$$

(corrisponde alla possibilità di una semantica dei mondi possibili)

- Assiomi principali:

(gli assiomi del calcolo proposizionale più)

$$D: \Box \varphi \rightarrow \neg \Box \neg \varphi$$

$$T: \Box \varphi \rightarrow \varphi$$

$$4: \Box \Box \varphi \rightarrow \Box \varphi$$

$$5: \neg \Box \neg \varphi \rightarrow \Box \neg \Box \neg \varphi$$

- Principali logiche modali

– gli assiomi del calcolo proposizionale più

– una qualsiasi combinazione degli assiomi D, T, 4, 5

Letture informali

- Possibilità e necessità
 - $\Box \varphi$ si legge come 'è necessario che φ '
 - $\Diamond \varphi$ si legge come 'è possibile che φ '
 - D: $\Box \varphi \rightarrow \Diamond \varphi$
 - T: $\Box \varphi \rightarrow \varphi$
 - 4: $\Box \Box \varphi \rightarrow \Box \varphi$
 - 5: $\Diamond \varphi \rightarrow \Box \Diamond \varphi$

- Logica epistemica
 - $\Box \varphi$ si legge come 'io so che φ '
 - φ (non modale) si legge come ' φ è oggettivamente vero'
 - ad esempio KT45 (= KT5) è la logica della conoscenza infallibile
 - infatti vale T: $\Box \varphi \rightarrow \varphi$
 - la logica KD45 è invece la logica della conoscenza falsificabile
 - infatti vale D: $\Box \varphi \rightarrow \neg \Box \neg \varphi$

Corrispondenze semantiche

- I principali assiomi corrispondono a proprietà della relazione di accessibilità R tra i mondi possibili

- Ad esempio:

T: $\Box \varphi \rightarrow \varphi \quad \Leftrightarrow \text{riflessività}$

5: $\Diamond \varphi \rightarrow \Box \Diamond \varphi \quad \Leftrightarrow \text{simmetria}$

4: $\Box \Box \varphi \rightarrow \Box \varphi \quad \Leftrightarrow \text{transitività}$

- quindi la logica KT45 (=KT5) (detta anche S5) corrisponde alla classe di strutture dove R è una relazione di equivalenza
- non tutte le proprietà di R corrispondono ad un assioma modale: e.g. *irriflessività*

Possibili impieghi

- Logica epistemica
 - una rete di agenti software
 - ciascuno dei quali opera su un computer in rete
 - gli agenti si scambiano messaggi
 - che cosa 'sa' o 'può sapere' ciascun agente?
 - Esempio (domotica): "il frigorifero sa che il forno è acceso?"
- Logica temporale
 - la relazione di accessibilità R rappresenta la successione temporale
 - ogni 'cammino' in W è una storia possibile (p. es. di un sistema automatico)
 - la correttezza di una strategia di controllo
 - si può rappresentare con l'assenza di 'cammini critici'
 - e quindi tramite una formula
 - la cui falsità deve essere dimostrabile

Logiche modali

- In generale, le logiche modali
 - sono caratterizzate dalla scelta di un particolare insieme di assiomi (e.g. KT5, KD45) a seconda del tipo di nozione informale (o di struttura dei mondi possibili) si vuole rappresentare
 - sono complete rispetto alla corrispondente classe di strutture
 - sono *decidibili*
- Tuttavia
 - non sono *vero-funzionali*, ovvero non esiste la possibilità di creare le tavole di verità con un numero finito di valori
 - non sono puramente *estensionali*, in quanto il valore di verità dipende anche da un 'mondo possibile' o contesto

4

Logiche multivalenti

Logiche multivalenti

- Origini storiche
 - il fatto che le logiche modali non siano vero-funzionali è stato dimostrato qualche tempo dopo la loro comparsa
 - agli inizi, si pensava che le logiche modali fossero vero-funzionali ma in riferimento ad un insieme di valori di verità con più di due valori (Lukasiewicz)
 - malgrado le origini comuni, le due linee si sono sviluppate in direzioni diverse
- Idea intuitiva
 - una logica a due soli valori rappresenta una sorta di certezza implicita riguardo alla *conoscibilità* del valore di verità
 - la presenza di ulteriori valori permette di rappresentare meglio situazioni di *incertezza* e/o di *ambiguità*

Logiche trivalenti

- Lukasiewicz (terzo valore: indeterminazione)

\wedge	0	U	1
0	0	0	0
U	0	U	U
1	0	U	1

\vee	0	U	1
0	0	U	1
U	U	U	1
1	1	1	1

\rightarrow	0	U	1
0	1	1	1
U	1	U	1
1	0	U	1

\neg	
0	1
U	U
1	0

- Bóchvar (terzo valore: inconsistenza)

\wedge	0	N	1
0	0	N	0
N	N	N	N
1	0	N	1

\vee	0	N	1
0	0	N	1
N	N	N	N
1	1	N	1

\rightarrow	0	N	1
0	1	N	1
N	N	N	N
1	0	N	1

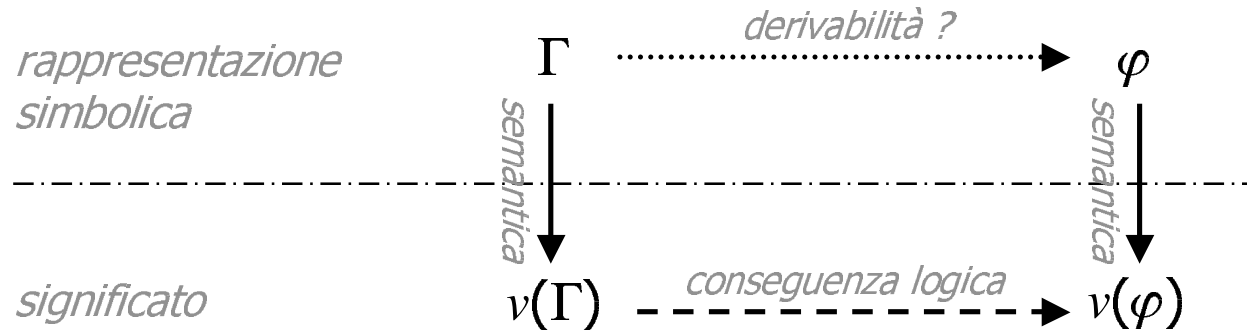
\neg	
0	1
N	N
1	0

Logica a valori infiniti

- Lukasiewicz
 - una logica multivalente 'generica' che include anche la logica a valori infiniti (intervallo $[0, 1]$)
 - regole algebriche al posto delle tavole di verità:
 - $|\neg\varphi| = 1 - |\varphi|$
 - $|\varphi \rightarrow \psi| = 1 - |\varphi| + |\psi|$
 - $|\varphi \wedge \psi| = \min(|\varphi|, |\psi|)$
 - $|\varphi \vee \psi| = \max(|\varphi|, |\psi|)$
 - $|\varphi \leftrightarrow \psi| = \min(1 - |\varphi| + |\psi|, 1 - |\psi| + |\varphi|)$
- In tutte queste logiche:
 - $\varphi \vee \neg\varphi$ non è una *tautologia*
 - $\varphi \wedge \neg\varphi$ non è una *contraddizione*
 - $(\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$ rimane una *tautologia*
 - i valori in $[0, 1]$ non possono essere probabilità:
una logica probabilistica non può essere vero-funzionale

Sistemi logici multivalenti

- Sono sistemi logici *diversi* dalla logica **classica**
- non tutte le *tautologie* e le *contraddizioni* classiche sono preservate



- Inoltre:
 - viene progressivamente indebolito il ruolo del linguaggio
 - nel caso di valori infiniti, la definizione è persino problematica
 - e quindi la rilevanza della relazione di *derivabilità*
 - ci si deve affidare al calcolo semantico (regole algebriche)
 - sono logiche per usi 'ad hoc' (comunque pochi)