

Intelligenza Artificiale

Breve introduzione alla logica classica (Parte 3)

Marco Piastra

Introduzione alla logica formale

Parte 1. Preambolo: l'algebra di Boole e la logica

Parte 2. Logica proposizionale

Parte 3. Logica predicativa del primo ordine

Parte 3

Logica predicativa del primo ordine

Limiti della logica proposizionale

- La logica proposizionale ha molte interessanti proprietà:
 - è *completa*
 - tutte le *conseguenze logiche* sono *derivabili* per via sintattica e viceversa
 - è *decidibile* in modo automatico
- Il difetto principale è la semplicità del linguaggio:
 - non è possibile rappresentare la struttura interna delle affermazioni
 - e quindi mettere in evidenza legami logici più sottili
- e la conseguente semplicità delle strutture semantiche:
 - solo un insieme $\{0, 1\}$
 - nessuna possibilità di caratterizzare strutture più complesse

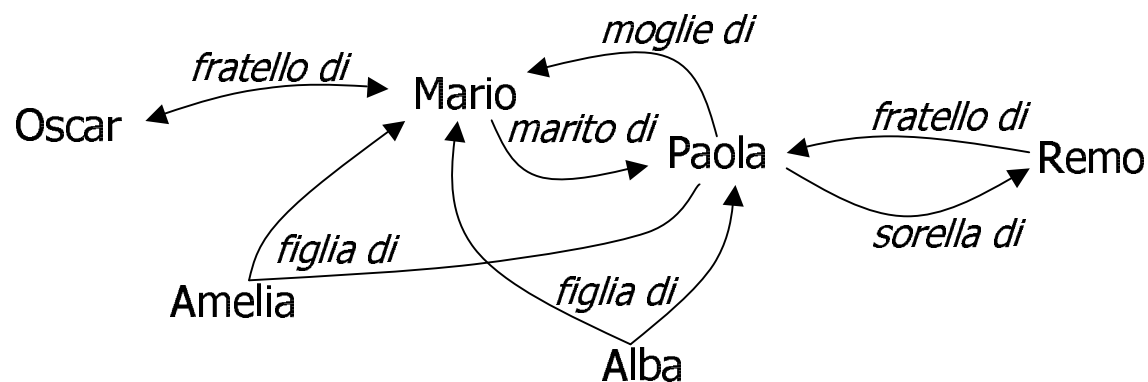
Limitazioni linguistiche di LP

- *Esempio* :
 - a: "Ogni uomo è mortale"
 - b: "Socrate è un uomo"
 - c: "Socrate è mortale"
- Il legame logico è evidente
- Nella traduzione in logica proposizionale, le tre proposizioni 'a', 'b' e 'c' non presentano alcun legame

- *Altro esempio* :
 - d: "Se tutti gli interi fossero pari, sarebbero divisibili per 2"
 - e: "Il numero 3 non è divisibile per 2"
 - f: "Non tutti i numeri interi sono pari"

Limitazioni rappresentative di LP

- Il problema non è solo linguistico ma **strutturale**
- Anche in una rappresentazione molto schematica, il mondo che osserviamo è fatto di oggetti e di relazioni tra oggetti
- *Esempio* :



- come si possono tradurre questi elementi in forma simbolica?
- come si stabilisce la correttezza dei ragionamenti in questi casi?
(p.es. Amelia e Alba sono sorelle?)

Estensione predicativa: obiettivi

- Linguaggio formale esteso
 - in grado di rappresentare meglio la struttura delle affermazioni
- Semantica
 - in riferimento a strutture più complesse, capaci di descrivere oggetti e relazioni tra oggetti (teoria degli insiemi)
- Si vuole assolutamente
 - mantenere l'impianto *formale* del sistema logico-simbolico
 - mantenere la *capacità di rappresentazione* dei simboli rispetto ai significati (correttezza)
- Sarebbe meglio
 - mantenere la garanzia di *completa rappresentazione* dei significati (completezza)

LPO - Linguaggio

- Un **linguaggio predicativo** \mathcal{L}_{PO} comprende:
 - un insieme di **simboli predicativi**, aventi un numero prestabilito di argomenti
 - esempio: $P(x)$, $G(x, y)$, $Q(x, y, z)$, etc.
 - unica eccezione (per comodità) '=' (e.g. $x = y$; ma si tratta di un *predicato*)
 - un insieme di **simboli funzionali**, aventi un numero prestabilito di *argomenti*
 - esempio: $f(x)$, $g(x, y)$, $h(x, y, z)$, ...
 - un insieme di **variabili**
 - esempio: x, y, z, \dots
 - un insieme di **costanti individuali**
 - esempio: a, b, c, \dots
 - i **connettivi** primari \neg, \rightarrow e derivati $\wedge, \vee, \leftrightarrow$
 - il **quantificatore universale** \forall ed il **quantificatore esistenziale** \exists
 - le due parentesi (e)

LPO - Regole di buona formazione

- Termini
 - ogni *variabile* o *costante individuale* è un **termine**
 - se f è un *simbolo funzionale* a n argomenti e t_1, \dots, t_n sono *termini*, allora $f(t_1, \dots, t_n)$ è un **termine**
 - esempi: x , a , $f(y)$, $g(b, c)$

- Formula atomica
 - se P è un *simbolo predicativo* a n argomenti e t_1, \dots, t_n sono termini, allora $P(t_1, \dots, t_n)$ è una **formula atomica**
 - esempi: $P(x)$, $Q(y, a)$, $R(b, c, x)$

- Formule ben formate (**fbf**)
 - ogni *formula atomica* è una fbf
 - se φ è una fbf, allora $(\neg\varphi)$ è una fbf
 - se φ e ψ sono fbf, allora anche $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ e $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ lo sono
 - se φ è una fbf, allora anche $(\forall x \varphi)$ e $(\exists x \varphi)$ sono fbf (questa è nuova)

LPO - Formule aperte, enunciati

- Variabili libere e vincolate
 - una variabile (in una fbf) è **vincolata** se si trova nel raggio di azione di un **quantificatore**
 - una variabile è **libera** se non è *vincolata*
 - esempi di variabile vincolata:
 - $\forall x P(x)$
 - $\exists x (P(x) \rightarrow (A(x) \wedge B(x)))$
 - esempi di variabile libera:
 - $P(x)$
 - $\exists y (P(y) \rightarrow (A(x, y) \wedge B(y)))$
- In un linguaggio del primo ordine i quantificatori si applicano solo alle variabili
- Formule aperte e chiuse
 - si dice **aperta** una fbf in cui occorre almeno una variabile libera
 - si dice **chiusa** o anche **enunciato** in caso contrario
 - solo le fbf *chiusa*, cioè gli *enunciati*, hanno un valore di verità (in quanto rappresentano delle *affermazioni* ...)

LPO - Strutture e interpretazioni

- La struttura semantica di riferimento assai più complessa di $\{0, 1\}$...
- Una struttura $\langle U, i \rangle$ per un linguaggio \mathcal{L}_{PO} contiene:
 - un **insieme di oggetti** U (l'universo del discorso)
 - un' **interpretazione** i , cioè una *funzione* che associa
 - ad ogni *simbolo predicativo* a n argomenti una **relazione** n -aria in U^n
 - ad ogni *simbolo funzionale* a n argomenti una **funzione** n -aria in U^n
 - ad ogni *costante individuale* un **elemento** di U
- Per le *variabili*
 - una **assegnazione** s è una funzione che associa
 - ad ogni *variabile* un elemento di U

Ai *simboli predicativi* unari sono associati *sottoinsiemi* di U

LPO - Esempio 1

- Linguaggio
 - simboli predicativi: Uomo(.), Pollo(.), Mortale(.)
 - variabili: x, y, z, \dots
 - costanti individuali: Socrate, Aristotele, Platone, Gino, Mino, Tino

- Interpretazione
 - universo del discorso U : {Socrate, Aristotele, Platone, Gino, Mino, Tino}
 - interpretazione i :
 - costanti individuali: $i(\text{Socrate}) = \underline{\text{Socrate}}$, $i(\text{Aristotele}) = \underline{\text{Aristotele}}$, etc.
 - simboli predicativi:
 - $i(\text{Uomo}(.)) = \{\underline{\text{Socrate}}, \underline{\text{Aristotele}}, \underline{\text{Platone}}\}$
 - $i(\text{Pollo}(.)) = \{\underline{\text{Gino}}, \underline{\text{Mino}}, \underline{\text{Tino}}\}$
 - $i(\text{Mortale}(.)) = \{\underline{\text{Socrate}}, \underline{\text{Aristotele}}, \underline{\text{Platone}}, \underline{\text{Gino}}, \underline{\text{Mino}}, \underline{\text{Tino}}\}$

- Assegnazione
 - esempio: $s = \{[x/\underline{\text{Socrate}}], [y/\underline{\text{Platone}}], \dots\}$ (i.e. per *tutte* le variabili)

LPO - Esempio 2

- Linguaggio

- simboli predicativi: Uomo(.), Donna(.), Fratello(..), Sorella(..), Genitore(..)
- simboli funzionali: madre(.), padre(.)
- variabili: x, y, z, \dots
- costanti individuali: Mario, Paola, Remo, Oscar, Amelia, Alba

- Interpretazione

- universo del discorso U : {Mario, Paola, Remo, Oscar, Amelia, Alba}
- interpretazione i :

- costanti individuali: $i(\text{Mario}) = \text{Mario}$, $i(\text{Paola}) = \text{Paola}$, etc.

- simboli predicativi:

$$i(\text{Uomo}(\cdot)) = \{\text{Mario}, \text{Remo}, \text{Oscar}\}$$

$$i(\text{Donna}(\cdot)) = \{\text{Paola}, \text{Amelia}, \text{Alba}\}$$

$$i(\text{Fratello}(\cdot, \cdot)) = \{\langle \text{Oscar}, \text{Mario} \rangle, \langle \text{Mario}, \text{Oscar} \rangle, \langle \text{Remo}, \text{Paola} \rangle\}$$

$$i(\text{Sorella}(\cdot, \cdot)) = \{\langle \text{Paola}, \text{Remo} \rangle, \langle \text{Alba}, \text{Amelia} \rangle, \langle \text{Amelia}, \text{Alba} \rangle\}$$

- simboli funzionali:

$$i(\text{madre}(\cdot)) = \{\langle \text{Alba}, \text{Paola} \rangle, \langle \text{Amelia}, \text{Paola} \rangle\}$$

$$i(\text{padre}(\cdot)) = \{\langle \text{Alba}, \text{Mario} \rangle, \langle \text{Amelia}, \text{Mario} \rangle\}$$

LPO - Soddisfacimento

- Formule atomiche

- data una struttura $\langle U, i \rangle$, un'assegnazione s ed una formula atomica φ
- si ha che $\langle U, i \rangle \models \varphi[s]$ sse
 - se φ ha la forma $t_1 = t_2$ allora $i(t_1)[s] \equiv s(t_2)[s]$ (se si usa l'identità)
 - se φ ha la forma $P(t_1, \dots, t_n)$ allora $\langle i(t_1)[s], \dots, i(t_n)[s] \rangle \in i(P)$

- Fbf qualsiasi

- si ha che $\langle U, i \rangle \models \varphi[s]$ sse
 - se φ è una formula atomica, vedi sopra
 - se $\neg\varphi$ allora $\langle U, i \rangle \not\models \varphi[s]$
 - se $\varphi \wedge \psi$ allora $\langle U, i \rangle \models \varphi[s]$ e $\langle U, i \rangle \models \psi[s]$
 - se $\varphi \vee \psi$ allora $\langle U, i \rangle \models \varphi[s]$ o $\langle U, i \rangle \models \psi[s]$
 - se $\varphi \rightarrow \psi$ allora non $\langle U, i \rangle \models \varphi[s]$ e $\langle U, i \rangle \not\models \psi[s]$
 - se $\forall x\varphi$ allora per ogni $d \in U$ si ha $\langle U, i \rangle \models \varphi[s - x/d]$
 - per definizione $\exists x\varphi \equiv \neg\forall x\neg\varphi$

Come per LP

Questa è
la novità

LPO - Esempio 3

- (in riferimento alla interpretazione dell'esempio 2)
- Soddifacimento
 - $\langle U, i \rangle \models \text{Uomo}(\text{Mario})$
 - in quanto $\text{Mario} \in i(\text{Uomo}(\cdot))$
 - $\langle U, i \rangle \models \text{Uomo}(\text{padre}(\text{Alba}))$
 - in quanto $\langle \text{Alba}, \text{Mario} \rangle \in i(\text{padre}(\cdot))$ e $\text{Mario} \in i(\text{Uomo}(\cdot))$
 - $\langle U, i \rangle \models \neg \text{Uomo}(\text{Paola})$
 - in quanto $\text{Paola} \notin i(\text{Uomo}(\cdot))$
 - $\langle U, i \rangle \models \text{Uomo}(\text{Mario}) \wedge \text{Genitore}(\text{Mario}, \text{Alba})$
 - in quanto $\text{Mario} \in i(\text{Uomo}(\cdot))$ e $\langle \text{Mario}, \text{Alba} \rangle \in i(\text{Genitore}(\cdot, \cdot))$
 - $\langle U, i \rangle \models \forall x (\text{Uomo}(x) \vee \text{Donna}(x))$
 - in quanto per ogni $d \in U$ si ha che $\langle U, i \rangle \models (\text{Uomo}(x) \vee \text{Donna}(x)) [x/d]$
- Assegnazione
 - $\langle U, i \rangle \models \text{Donna}(x) [x/\text{Paola}, \dots]$
 - $\langle U, i \rangle \not\models \text{Donna}(x) [x/\text{Mario}, \dots]$

LPO - Modelli, validità

- Verità e modelli

- un **enunciato** φ è *vero* in una struttura $\langle U, i \rangle$ sse
 - esiste un'assegnazione s tale per cui $\langle U, i \rangle \models \varphi[s]$
 - per un enunciato, l'esistenza di una s equivale a "per ogni s "
 - la separazione interpretazione / assegnazione serve nel caso dei quantificatori

"se $\forall x \varphi$ allora per ogni $d \in U$ si ha $\langle U, i \rangle \models \varphi[s - x/d]$ "

- una struttura $\langle U, i \rangle$ tale da rendere *vero* un enunciato φ è detta **modello** di φ
 - si scrive allora $\langle U, i \rangle \models \varphi$
- una struttura $\langle U, i \rangle$ è detta **modello** di un *insieme di enunciati* Γ sse rende *veri* tutti gli enunciati in Γ
 - si scrive allora $\langle U, i \rangle \models \Gamma$

LPO - Modelli, validità (2)

- Validità
 - un enunciato φ è **valido** se è *vero* in qualunque struttura $\langle U, i \rangle$
 - si scrive allora $\models \varphi$
- Inconsistenza
 - un enunciato φ è **inconsistente** se non ha un *modello*

LPO - Derivazione, teorie, assiomi

- Come nel caso di LP, si ha un'unica regola di **derivazione**
 - il *modus ponens*
 $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \vdash \psi$
- La definizione di *derivazione* o **dimostrazione** (intesa come successione di passi) è identica a quella di LP
- Un qualsiasi insieme di fbf Σ può essere detto una **teoria**
- Dato un insieme di fbf Γ , l'insieme dei **teoremi** di Γ è l'insieme di tutte le fbf *derivabili* a partire da Γ

$$\text{teorem}(\Gamma) = \{\varphi : \Gamma \vdash \varphi\}$$
- Un Γ è una **assiomatizzazione** di Σ sse

$$\Sigma \equiv \text{teorem}(\Gamma)$$

Costruzione e uso di teorie in LPO

- Il sistema di assiomi A_x descrive la *teoria* delle fbf *valide*
 - le fbf *valide* si applicano a qualsiasi ragionamento (sono 'leggi logiche' o, meglio, leggi di LPO)
- Analogamente possono essere costruite *teorie* particolari
 - si definisce un insieme Γ di fbf (assiomi o fatti noti) che descrive le proprietà degli oggetti di cui si parla
- La derivazione di *teoremi* serve a 'scoprire', cioè a rendere espliciti, gli elementi di una teoria
 - in particolare quelli non direttamente descritti in Γ
- Due problemi per il calcolo
 - escludendo la possibilità di derivare 'a pioggia' tutti i teoremi
 - in che modo ipotizzare i *teoremi*
 - come dimostrare che lo sono (o che non lo sono)

LPO - Sistema di assiomi

- Sei *schemi di assioma* per LPO:

Gli stessi
di LP

$$\text{Ax1 } \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$\text{Ax2 } (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$\text{Ax3 } (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$\text{Ax4 } \forall x \varphi \rightarrow \varphi[x/t]$$

se t è sostituibile per x in φ

$$\text{Ax5 } \forall x (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi)$$

$$\text{Ax6 } \varphi \rightarrow \forall x \varphi$$

se x non occorre libera in φ

– ogni sostituzione di φ , ψ e χ con una fbf è un assioma

- Altri due *schemi di assioma* se si usa l'identità:

$$\text{Ax7 } t = t$$

$$\text{Ax8 } (t = u) \rightarrow (\varphi[x/t] \leftrightarrow \varphi[x/u])$$

LPO - Esempio 4

- Derivazione: "Socrate è mortale":
 - $\{\forall x (\text{Uomo}(x) \rightarrow \text{Mortale}(x)), \text{Uomo}(\text{Socrate})\} \vdash \text{Mortale}(\text{Socrate})$
 - 1: $\forall x (\text{Uomo}(x) \rightarrow \text{Mortale}(x))$ (premessa)
 - 2: $\text{Uomo}(\text{Socrate}) \rightarrow \text{Mortale}(\text{Socrate})$ ($\forall x4$ con $[x/\text{Socrate}]$)
 - 3: $\text{Uomo}(\text{Socrate})$ (premessa)
 - 4: $\text{Mortale}(\text{Socrate})$ (mp 2, 3)

LPO - Esempio 5

• Derivazione: "Alba è sorella di Amelia"

Regole:

$$\forall x \forall y ((\text{Donna}(x) \wedge \exists z (\text{Genitore}(z, x) \wedge \text{Genitore}(z, y))) \rightarrow \text{Sorella}(x, y))$$

Fatti:

Donna(Alba), Donna(Amelia), Genitore(Mario, Alba), Genitore(Mario, Amelia)

1: $\forall y ((\text{Donna}(\text{Alba}) \wedge \exists z (\text{Genitore}(z, \text{Alba}) \wedge \text{Genitore}(z, y))) \rightarrow \text{Sorella}(\text{Alba}, y))$
(Ax4 con [x/Alba])

2: $(\text{Donna}(\text{Alba}) \wedge \exists z (\text{Genitore}(z, \text{Alba}) \wedge \text{Genitore}(z, \text{Amelia}))) \rightarrow \text{Sorella}(\text{Alba}, \text{Amelia})$
(Ax4 con [y/Amelia])

3: $(\text{Genitore}(\text{Mario}, \text{Alba}) \wedge \text{Genitore}(\text{Mario}, \text{Amelia}))$
 $\rightarrow \exists z (\text{Genitore}(z, \text{Alba}) \wedge \text{Genitore}(z, \text{Amelia}))$
(teorema)

4: $\text{Genitore}(\text{Mario}, \text{Alba}) \wedge \text{Genitore}(\text{Mario}, \text{Amelia})$ (premesse)

5: $\exists z (\text{Genitore}(z, \text{Alba}) \wedge \text{Genitore}(z, \text{Amelia}))$ (mp 3, 4)

6: Donna(Alba) (premesse)

7: $(\text{Donna}(\text{Alba}) \wedge \exists z (\text{Genitore}(z, \text{Alba}) \wedge \text{Genitore}(z, \text{Amelia})))$ (5 + 6)

8: Sorella(Alba, Amelia) (mp 2, 7)

LPO - Correttezza e completezza

- Correttezza di LPO

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$$

- Completezza di LPO

$$\vdash \varphi \Leftrightarrow \models \varphi$$

Si considerano solo le fbf *valide*

- Validità del sistema di assiomi

– le fbf del sistema di assiomi A_x per LPO sono *valide*

- Completezza del sistema di assiomi

– la *teoria* delle fbf *valide* di LPO coincide con l'insieme dei *teoremi* del sistema di assiomi A_x

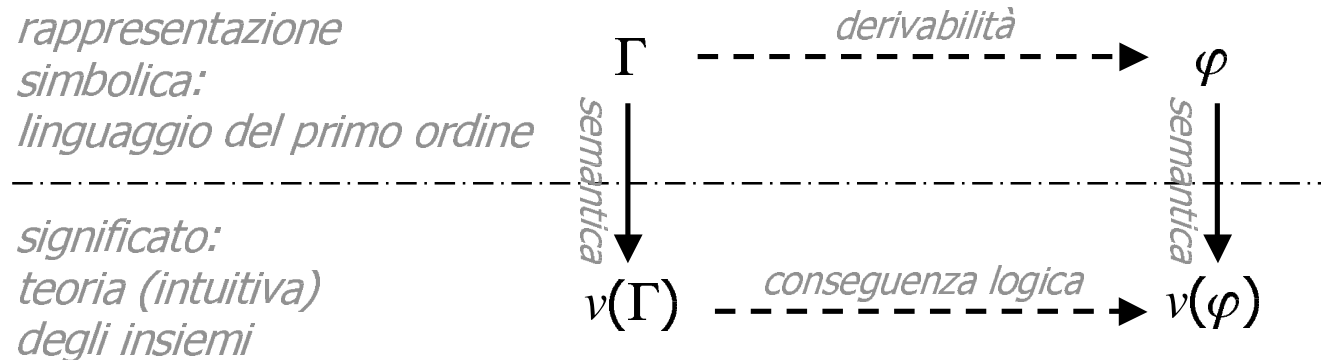
$$\varphi \in \text{teoremi}(A_x) \Leftrightarrow \models \varphi$$

LPO - Esempio 6: semantica intuitiva

- “Ogni uomo è mortale”
 - l’insieme degli uomini è *incluso* nell’insieme dei mortali
 - infatti:
 - $\forall x (\text{Uomo}(x) \rightarrow \text{Mortale}(x))$ è soddisfatto in una struttura $\langle U, i \rangle$ dove
 - $\forall x (\neg \text{Uomo}(x) \vee \text{Mortale}(x))$ (equivalenza logica)
 - $\forall x \neg (\text{Uomo}(x) \wedge \neg \text{Mortale}(x))$ (De Morgan)
 - $\neg \exists x (\text{Uomo}(x) \wedge \neg \text{Mortale}(x))$ (definizione di $\exists x$)
 - quindi in $\langle U, i \rangle$ non esistono d tali per cui
 $\langle U, i \rangle \models \text{Uomo}(x)[x/d]$ e $\langle U, i \rangle \not\models \text{Mortale}(x)[x/d]$
- “Socrate è mortale”
 - l’oggetto Socrate appartiene all’insieme dei mortali
- Alba è sorella di Amelia
 - la relazione “sorella” include $\langle \text{Alba}, \text{Amelia} \rangle$

LPO - Generalità

- Assumendo come riferimento la teoria (intuitiva) degli insiemi, la logica predicativa del primo ordine ha un raggio d'azione molto generale



- Il valore pragmatico è notevole
 - rappresentazione di ragionamenti in astratto
 - a patto di avere una 'macchina' efficiente
- Il valore filosofico è anche maggiore
 - possiamo fondare teorie tramite il linguaggio?

LPO - Limitazioni intrinseche

- ω -incompletezza
 - la *teoria* dei numeri contiene degli enunciati *veri* (nella struttura di riferimento) che sono tuttavia indimostrabili (Gödel)
- Indimostrabilità della consistenza (esistenza di un modello)
 - all'interno della teoria dei numeri non è possibile dimostrare che la teoria stessa è consistente (Gödel)
- Indecidibilità
 - non esiste una procedura automatica di valore generale (Church)
- Inoltre:
 - le teorie che includono il simbolo di identità sono sempre interpretabili in una struttura in cui la relazione corrispondente non è l'identità tra oggetti
 - alcune proprietà non sono caratterizzabili da una teoria
 - ogni teoria che ammette un modello infinito ha anche un modello numerabile (Löwenheim-Skolem)