Intelligenza Artificiale

Breve introduzione alla logica classica (Parte 1)

Marco Piastra

Introduzione alla logica formale

Parte 1. Preambolo: l'algebra di Boole e la logica

Parte 2. Logica proposizionale

Parte 3. Logica predicativa del primo ordine

Testi consigliati

- Magnani, L., Gennari, R.
  Manuale di Logica
  Guerini Scientifica, 1997

- Lolli, G.
  Introduzione alla logica formale
  il Mulino, 1988
- Asperti, A., Ciabattoni, A.
  Logica a informatica
  McGraw-Hill, 1997
- Crossley et al.
  Che cos'è la logica matematica?
  Boringhieri, 1972

Parte 1

Preambolo:

l'algebra di Boole e la logica

Algebra di Boole

- Un'algebra di Boole è formata da:
  - un insieme X
  - due operazioni binarie $\vee$ e $\wedge$:
    - commutative: $A \vee B = B \vee A$
    - associative: $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$
    - distributive: $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
    - dotate di elementi identità $\perp$ e $\top$:
      - $A \vee \perp = A$
      - $A \wedge \top = A$
  - una operazione unaria $\neg$ tale per cui:
    - $A \vee \neg A = \top$
    - $A \wedge \neg A = \perp$

$(A, B, C \in X)$

Proposizioni e connettivi

- L'insieme *X* è costituito da un insieme di proposizioni in un certo ambito discorsivo

  {"Giorgio è un essere umano", "Silvia è la genitrice di Giorgio", "Giorgio è un bipede senza piume", "Giorgio è contento", etc.}

  – Ciascuna proposizione può essere *vera* (1) o *falsa* (0)

- Le operazioni binarie sono OR ($\vee$) e AND ($\wedge$)

A	B	$A \vee B$
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

Le tavole di verità

- L'operazione unaria è il NOT ($\neg$)

A	$\neg A$
1	0
0	1

Formule e significato

- Elementi fondamentali dell'algebra delle proposizioni:
  - un insieme di **proposizioni atomiche** {a, b, c, d, ...}
  - a ciascuna proposizione atomica viene attribuito un **significato**, inteso come **valore di verità**:

    $v : X \rightarrow \{0, 1\}$
- Le **formule** sono espressioni costruite per composizione di proposizioni, connettivi e parentesi

  $(A \vee B) \wedge C$
  - ("Giorgio è un essere umano" OR "Silvia è la genitrice di Giorgio") AND "Giorgio è un bipede senza piume"
- Il **significato** delle **formule composite** viene determinato componendo algebricamente il significato delle proposizioni atomiche

vero-funzionalità

A	B	$A \vee B$
$v(A) = 1$	$v(B) = 1$	$v(A \vee B) = 1$
$v(A) = 0$	$v(B) = 1$	$v(A \vee B) = 1$
$v(A) = 1$	$v(B) = 0$	$v(A \vee B) = 1$
$v(A) = 0$	$v(B) = 0$	$v(A \vee B) = 0$

Per ogni formula di n proposizioni si hanno 2^n combinazioni possibili

Interpretazioni e soddisfacimento

- Esempio:

  φ: (a ∨ b) ∧ c

  - (“Giorgio è umano” OR “Silvia è madre di Giorgio”) AND “Giorgio è un bipede senza piume”

a	b	c	a ∨ b	(a ∨ b) ∧ c
1	1	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	0	1	0	0
1	1	0	1	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
0	0	0	0	0

- Un’**interpretazione** v è una assegnazione di significato a tutte le proposizioni atomiche nell’ambito discorsivo X
- Una interpretazione **soddisfa** una formula φ sse $v(\varphi) = 1$

Tautologie e contraddizioni

- Una **tautologia** è una formula φ tale per cui $v(\varphi) = 1$ per qualsiasi interpretazione v
  - Esempio: $(\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee A)$

A	B	$\neg A \vee B$	$\neg B \vee A$	$(\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee A)$
1	1	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
0	0	1	0	1

- Una **contraddizione** è una formula φ tale per cui $v(\varphi) = 0$ per qualsiasi interpretazione v
  - Esempio: $(A \wedge \neg A)$

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
1	0	0
0	1	0

Algebra delle proposizioni

- L'**algebra delle proposizioni** è definita su un insieme di proposizioni atomiche $X = \{a, b, c, d, ...\}$
  - sono 'atomiche' in quanto non consideriamo la struttura interna ma solo il valore di verità
- Gli operatori sono: $\wedge$ (AND), $\vee$ (OR), $\neg$ (NOT)
- Gli elementi identità sono: $\top$ (**tautologia**), $\bot$ (**contraddizione**)
- La semantica degli operatori è definita in funzione delle **interpretazioni** v
- Il valore delle formule composite può essere determinato a partire dalla interpretazione delle affermazioni atomiche
- L'algebra delle proposizioni è un'algebra di Boole

Tutto qui?
Ed il **ragionamento**?

Relazione tra affermazioni

- Premesse:

  φ_1: $\neg(a \wedge \neg b) \vee c$

  NOT ("Giorgio è umano" AND NOT "Silvia è madre di Giorgio") OR "Giorgio è un bipede senza piume"

  φ_2: $\neg c \vee b \vee d$

  NOT "Giorgio è un bipede senza piume" OR "Silvia è madre di Giorgio" OR "Giorgio è contento"

  φ_3: $d \vee a$

  "Giorgio è contento" OR "Giorgio è umano"

  φ_4: $\neg b$

  NOT "Silvia è madre di Giorgio"

- Affermazione:

  ψ: d

  "Giorgio è contento"

Qual'è il **legame logico** tra le premesse?

E tra le premesse e l'affermazione finale?

Conseguenza logica

- Eseguendo il calcolo diretto per l'esempio precedente:

a	b	c	d	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	ψ
1	1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	1	1	0	1	0

- Tutte le interpretazioni v che soddisfano $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ soddisfano anche ψ
- Relazione di **conseguenza logica** : $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models \psi$

Logica in generale

- La **conseguenza logica** è una *relazione* tra *formule* (o insiemi di formule)
- In generale, in logica si studia la relazione tra le formule di un *sistema logico-simbolico* in cui:
  - il *linguaggio* delle formule è definito con precisione
  - il *significato* delle formule è stabilito in modo non ambiguo
- Le relazioni studiate riguardano la *struttura* dei ragionamenti e non il '*senso*' comune delle formule nell'ambito discorsivo di riferimento (logica ***formale***)
- Quindi, il significato delle formule viene stabilito in riferimento ad una struttura astratta (p. es. {0, 1})
  e non ad una situazione effettiva (p.es. Giorgio e Silvia, bipedi)

Obiettivi

- Rappresentazione esatta della conoscenza
  - dato che in un *sistema logico-simbolico* :
    - il linguaggio è definito con precisione
    - la semantica è chiara e non ambigua
    - la relazione tra le formule descrive il legame logico
  - possiamo distinguere i *ragionamenti* corretti da quelli fallaci
    - (ammesso di riuscire a formalizzarli)
- Tecniche di calcolo
  - il calcolo diretto della relazione di conseguenza tramite le tavole è scomodo (e non è sempre possibile)
  - occorre trovare tecniche più comode e pratiche
- Automatizzazione
  - se poi queste tecniche di calcolo sono deterministiche (cioè non richiedono particolare ingegno)
  - si può pensare di far 'ragionare' le macchine

Cenni storici - Le origini

- Che i ragionamenti abbiano una *struttura formale* è un fatto accettato sin dall'antichità (vedi Aristotele)
- La logica moderna (dalla seconda metà dell'800) nasce dal desiderio di dare forma rigorosa al discorso scientifico
- Il progetto originale (Frege 1884)
  - creare un linguaggio perfetto
  - da cui viene eliminato ogni elemento *intensionale* (il 'senso' comunemente attribuito ai termini ed alle frasi)
  - a vantaggio della componente *estensionale* (il riferimento oggettuale, cioè "ciò di cui si parla")
- Espresso in questo modo, ciascun *ragionamento* descrive solo gli oggetti a cui si riferisce
  - e non dipende dal modo di descriverli

Cenni storici - Le speranze

- Un linguaggio perfetto per la scienza ed, in particolare, per la matematica (G. Frege, fine '800)
- Un metodo per dimostrare la *fondatezza* (intesa come non contraddittorietà) di tutte le teorie matematiche
(D. Hilbert, fine '800)
- Un sistema di calcolo che renda la dimostrazione dei teoremi un fatto puramente meccanico
(D. Hilbert, fine '800)
- Una base per la costruzione di macchine intelligenti
(Nilsson e molti altri, anni '80)
- Una tecnologia radicalmente innovativa per fare carriera e/o una montagna di quattrini
(Accademia e industria del software, anni '80 e inizio '90)

Cenni storici - Le delusioni

- Il ‘linguaggio perfetto’ di Frege non è esente da contraddizioni
  (B. Russell, anni ‘10)
- Qualunque formalismo logico che possa descrivere la teoria elementare dei numeri contiene delle proposizioni indimostrabili (K. Gödel, anni ‘30)
- In qualunque formalismo logico dello stesso tipo non è possibile dimostrare la *fondatezza* del sistema medesimo
  (K. Gödel, anni ‘30)
- Il calcolo dei predicati è indecidibile per via automatica
  (A. Church, anni ‘50)
- Le macchine basate sul *logic programming* sono lente, complicate ed assai poco ‘intelligenti’
  (Esperienza scientifica ed industriale, anni ‘90)

Logica e intelligenza artificiale

- Il collegamento è evidente:
  "*AI is the study of mental faculties through the use of computational models*" (Charniak e McDermott 1985)
- Lo studio della logica ha un grande valore propedeutico:
  - lo studio del ragionamento formale aiuta a chiarire i problemi legati alla rappresentazione cognitiva
  - come preambolo alla costruzione di modelli computazionali (p.es. perchè è così difficile far ragionare le macchine)
- Un modello computazionale in cui è prevista la capacità di effettuare 'ragionamenti' è un sistema logico
  - la logica consente in questo caso di analizzare le caratteristiche dei processi inferenziali
  - anche tramite la definizione di *logiche speciali*, che descrivono particolari tipi di ragionamento (p. es. logica probabilistica, logica temporale)