Intelligenza Artificiale

Breve introduzione alle logiche non classiche

Marco Piastra

Argomenti

0. In che senso non classiche?
1. Logica abduttiva
2. Logiche modali
3. Logiche multivalenti

Logiche non classiche?

- Per logica **classica** si intende:
  - la logica proposizionale
  - la logica predicativa del primo ordine

  (in base alle definizioni viste nelle lezioni precedenti)

- Una logica **non classica** adotta regole diverse o più estese

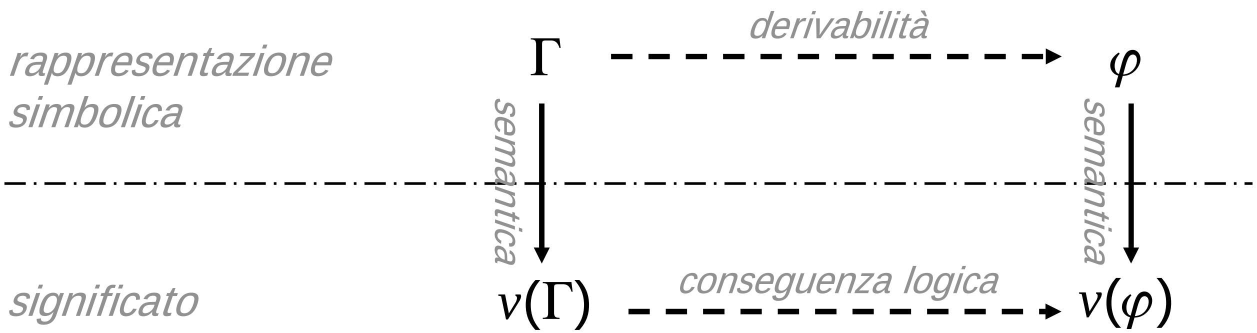
- Perchè cambiare?
  - per risolvere problemi diversi dal calcolo deduttivo
  - per rappresentare altre forme di ragionamento
    - forme più deboli
    - forme legate a fattori di contesto

Direzioni di estensione o modifica

a) Usare la logica **classica** in modo diverso
   - p. es. per un calcolo non deduttivo

b) Abbandonare il principio di vero-funzionalità
   - non si impone più che il valore di verità di una proposizione sia solo funzione del valore di verità dei suoi componenti
   - (si rinuncia alle “tavole di verità”)

c) Abbandonare il principio di bivalenza
   - non si assume più che una proposizione possa essere solo vera o falsa



2

Logica abduttiva

Forme di ragionamento (C. S. Peirce)

- Ragionamento **deduttivo**

modus ponens

$$\frac{\varphi \to \psi \qquad \varphi}{\psi}$$

a) i fagioli che provengono da questo sacco sono bianchi
b) questi fagioli provengono da questo sacco
QUINDI
c) questi fagioli sono bianchi

- Ragionamento **induttivo**

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \to \psi}$$

a) questi fagioli provengono da questo sacco
b) questi fagioli sono bianchi
QUINDI
c) i fagioli che provengono da questo sacco sono bianchi

- Ragionamento **abduttivo**

$$\frac{\varphi \to \psi \qquad \psi}{\varphi}$$

a) i fagioli che provengono da questo sacco sono bianchi
b) questi fagioli sono bianchi
QUINDI
c) questi fagioli provengono da questo sacco

Logica abduttiva

- Le regole di base per la rappresentazione del ragionamento sono quelle della logica **classica**
- E` invece diversa la rappresentazione formale del **tipo** di ragionamento
  - e quindi il **tipo** di calcolo utilizzato
- In generale, in un ragionamento abduttivo:
  - si ha un *modello* o descrizione astratta formalmente rappresentato da una teoria K
  - si ha un insieme di *osservazioni* formalmente rappresentate da un insieme di proposizioni Σ
  - in generale $K \not\vdash \Sigma$
  - si cerca è un completamento Γ tale per cui $K \cup \Gamma \vdash \Sigma$
  - intuitivamente, Γ descrive le *ipotesi* che **spiegano** Σ

Esempio di ragionamento abduttivo

- Modello (K)

  K_1: batteriaScarica $\rightarrow$
  $(\neg$funzionanoLuci $\wedge$ $\neg$funzionaAutoradio $\wedge$ $\neg$motorinoGira$)$

  K_2: motorinoGuasto $\rightarrow$ $\neg$motorinoGira

  K_3: $\neg$motorinoGira $\rightarrow$ $\neg$macchinaParte

  K_4: serbatoioVuoto $\rightarrow$
  (indicatoreAZero $\wedge$ $\neg$macchinaParte)

- Osservazioni (Σ)

  Σ_1: $\neg$macchinaParte

- Possibili completamenti o *ipotesi* (Γ)

  Γ_1: batteriaScarica $(\{K_1, K_3\} \cup \{\Gamma_1\} \vdash \Sigma_1)$

  Γ_2: motorinoGuasto $(\{K_2, K_3\} \cup \{\Gamma_2\} \vdash \Sigma_1)$

  Γ_3: serbatoioVuoto $(\{K_4\} \cup \{\Gamma_3\} \vdash \Sigma_1)$

Tecniche di ragionamento abduttivo

- Identificazione delle ipotesi plausibili
  - tutte le ipotesi Γ in grado di spiegare tutte le osservazioni Σ
  - alcune ipotesi implicano anche altre osservazioni
- Investigazione, allo scopo di acquisire nuove *osservazioni*
- Strategie di scelta e tra varie *ipotesi*
  - scelta basata sul *rischio*
    - se il motorino è guasto, occorre un intervento del meccanico
    - è più facile rimediare alla batteria scarica o la mancanza di benzina
  - scelta basata sul *costo* delle osservazioni
    - distinguere tra batteria scarica e motorino guasto non è sempre facile
- In generale:
  - le tecniche di calcolo deduttivo sono di carattere generale
  - le tecniche di calcolo abduttivo sono specifiche
    - spesso si usano regole ‘ad hoc’
    - associate a regole di applicazione (meta-knowledge)

Backward chaining (*goal-oriented strategy*)

- In un certo senso, è il procedimento inverso di una *dimostrazione*
  - si tratta di utilizzare il *modus ponens* alla rovescia
  - a partire da un *goal* ψ si cercano gli φ tali per cui $\varphi \vdash \psi$
  - un ragionamento abduttivo per investigazione
- Si utilizza nei sistemi esperti (p. es. Jess) per rappresentare il ragionamento abduttivo

```
(defrule causa-effetto
   (macchinaNonParte)
   (indicatoreAZero)
   ⇒
   (serbatoioVuoto)
   (printout t
      "Diagnosi: il serbatoio e` vuoto))
```

```
(do-backward-chaining indicatoreAZero)

(defrule chiedi
   (need-indicatoreAZero)
   (test (ask "Indicatore a zero?"))
   ⇒
   (assert (indicatoreAZero)))
```

```
Jess> (assert (macchinaNonParte))
Jess> (run)
  Indicatore a zero? y
  Diagnosi: il serbatoio e` vuoto
Jess>
```

3

Logiche modali

Un paradosso?

- Si consideri la formula proposizionale **classica**

  $(\varphi \to \psi) \lor (\psi \to \varphi)$

  – tale formula è una *tautologia*

φ	ψ	$\varphi \to \psi$	$\psi \to \varphi$	$(\varphi \to \psi) \lor (\psi \to \varphi)$
1	1	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
0	0	1	1	1

- La letture informale è abbastanza inquietante:
  – comunque prese due proposizioni φ e ψ
  – una delle due è una *conseguenza logica* dell'altra
  – infatti:
    - in logica classica, $\varphi \to \psi$ implica che $\varphi \vdash \psi$
    - per il teorema di completezza, $\varphi \vdash \psi$ equivale a $\varphi \models \psi$

Implicazione stretta

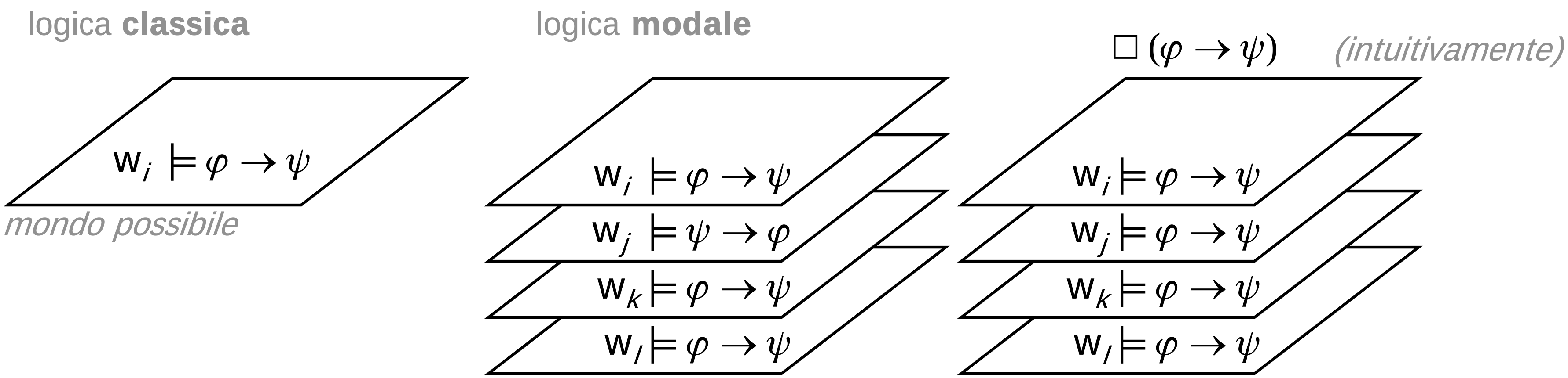
- Si direbbe che la relazione di *conseguenza logica*
  - è troppo 'pervasiva'
  - non si possono rappresentare coppie di proposizioni che non hanno alcuna relazione logica
    - "questi fagioli sono bianchi"
    - "anche oggi c'è lezione di IA"
- L'origine storica della logica modale (Lewis):
- il desiderio di rappresentare una forma di implicazione per cui questo 'paradosso' non vale
  - originariamente detta *implicazione stretta*
  - che non sussiste per qualsiasi coppia di proposizioni
  - che si affianca e non rimpiazza l'implicazione **classica**
    - detta anche *implicazione materiale*

Mondi possibili

- L'*implicazione stretta* si esprime mediante un operatore **modale** unario:

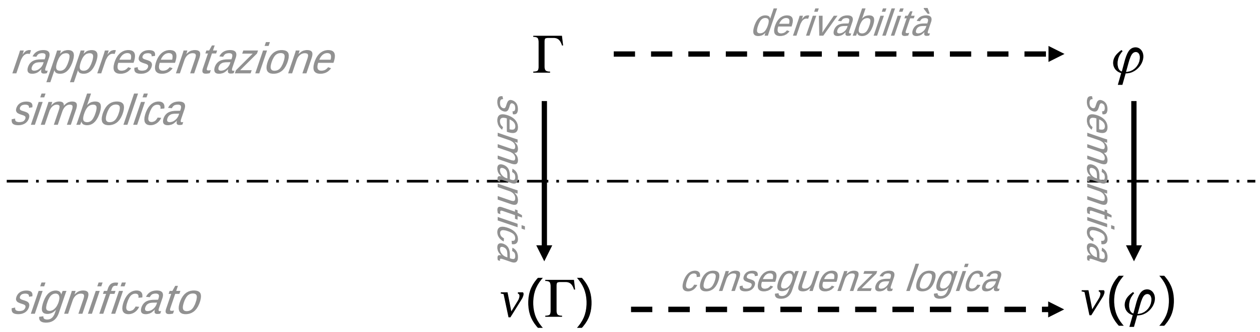
  $$\Box(\varphi \rightarrow \psi)$$

- L'idea di fondo è basata sull'idea dei *mondi possibili* (Kripke)
  - in logica **classica** si considera una sola interpretazione alla volta (interpretazione $v \Leftrightarrow$ *mondo possibile*)
  - in logica **modale** si considerano più interpretazioni alla volta (struttura di *mondi possibili*)
  - la logica **classica** vale in ciascun *mondo possibile*



Definizione della logica modale

- Un'*estensione* della logica **classica**



- Per ottenere un sistema logico-simbolico occorre:
  - estendere il linguaggio
  - definire le strutture e le regole semantiche
  - estendere la relazione di derivazione
  - dimostrare la correttezza e la completezza

Linguaggio e regole di derivazione

- Il linguaggio della logica proposizionale **classica**
- più un simbolo **modale** unario:

  $\Box\varphi$

  - si legga come 'è *necessario* che φ'
  - o anche 'io so che φ'
- ed un'altro simbolo **modale** unario *derivato*:

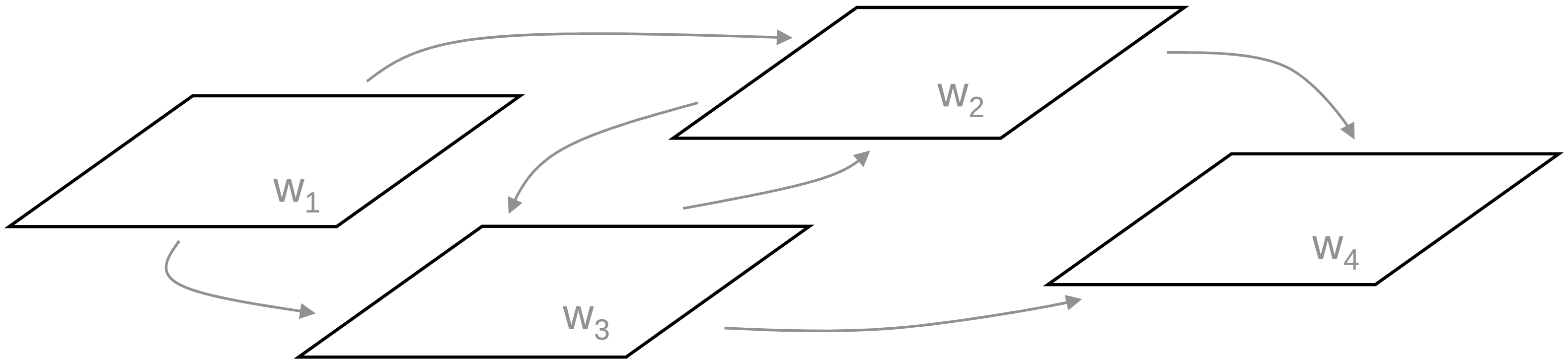
  $\Diamond\varphi \Leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$

  - si legga come 'è *possibile* che φ'
  - o anche 'non mi risulta che non φ'

- Regole di inferenza
  - il *modus ponens*
  - la regola di necessitazione (Nec) $\dfrac{\varphi}{\Box\varphi}$

Semantica dei mondi possibili

- Strutture di riferimento
  - dato un linguaggio proposizionale modale $\mathscr{L}_{MP}$
  - le strutture di mondi possibili <W, *R*, *v*> dove:
    - W è un insieme di punti detti anche 'stati' o 'mondi possibili'
    - *R* è una relazione binaria su W^2 che definisce l'accessibilità tra mondi
    - *v* è una funzione che assegna un valore di verità alle lettere proposizionali di $\mathscr{L}_{MP}$ in ogni mondo w ∈ W
- Non ci sono solo mondi possibili,
  ma anche una relazione di accessibilità tra mondi



Regole semantiche

- Soddisfacimento
  - si dice che una struttura $<W, R, v>$ soddisfa una formula *non* modale φ in un mondo $w \in W$ sse φ è vera in w
  - si scrive

    $<W, R, v>, w \models \varphi$
  - regole modali

    $<W, R, v>, w \models \Box \varphi$ sse $\forall w' \in W, wRw'; <W, R, v>, w' \models \varphi$

    $<W, R, v>, w \models \Diamond \varphi$ sse $\exists w' \in W, wRw'; <W, R, v>, w' \models \varphi$
  - data una qualsiasi formula $\psi \in \mathscr{L}_{MP}$

    $<W, R, v> \models \psi$ sse $\forall w \in W; <W, R, v>, w \models \psi$

Pluralità delle assiomatizzazioni

- Logica modale normale

  K: $\Box (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box \varphi \rightarrow \Box \psi)$

  (corrisponde alla possibilità di una semantica dei mondi possibili)

- Assiomi principali:

  (gli assiomi del calcolo proposizionale più)

  D: $\Box \varphi \rightarrow \neg \Box \neg \varphi$

  T: $\Box \varphi \rightarrow \varphi$

  4: $\Box\Box \varphi \rightarrow \Box \varphi$

  5: $\neg \Box \neg \varphi \rightarrow \Box \neg \Box \neg \varphi$

- Principali logiche modali
  - gli assiomi del calcolo proposizionale più
  - una qualsiasi combinazione degli assiomi D, T, 4, 5

Letture informali

- Possibilità e necessità
  - $\Box\, \varphi$ si legge come 'è necessario che φ'
    $\Diamond\, \varphi$ si legge come 'è possibile che φ'

    D: $\Box\, \varphi \rightarrow \Diamond\, \varphi$

    T: $\Box\, \varphi \rightarrow \varphi$

    4: $\Box\Box\, \varphi \rightarrow \Box\, \varphi$

    5: $\Diamond\, \varphi \rightarrow \Box\, \Diamond\, \varphi$

- Logica epistemica
  - $\Box\, \varphi$ si legge come 'io so che φ'
  - φ (non modale) si legge come 'φ è oggettivamente vero'
  - ad esempio KT45 (= KT5) è la logica della conoscenza infallibile
    - infatti vale T: $\Box\, \varphi \rightarrow \varphi$
  - la logica KD45 è invece la logica della conoscenza falsificabile
    - infatti vale D: $\Box\, \varphi \rightarrow \neg\Box\, \neg\varphi$

Corrispondenze semantiche

- I principali assiomi corrispondono a proprietà della relazione di accessibilità *R* tra i mondi possibili

- Ad esempio:

  T: $\Box \varphi \rightarrow \varphi$ $\Leftrightarrow$ *riflessività*

  5: $\Diamond \varphi \rightarrow \Box \Diamond \varphi$ $\Leftrightarrow$ *simmetria*

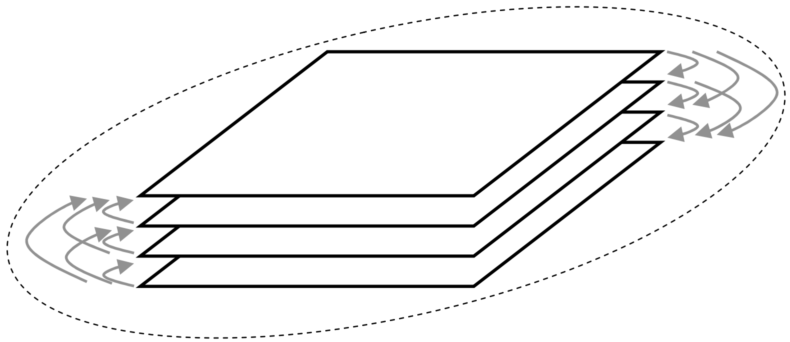
  4: $\Box\Box \varphi \rightarrow \Box \varphi$ $\Leftrightarrow$ *transitività*

  – quindi la logica KT45 (=KT5) (detta anche S5) corrisponde alla classe di strutture dove *R* è una relazione di equivalenza

  – non tutte le proprietà di *R* corrispondono ad un assioma modale: e.g. *irriflessività*

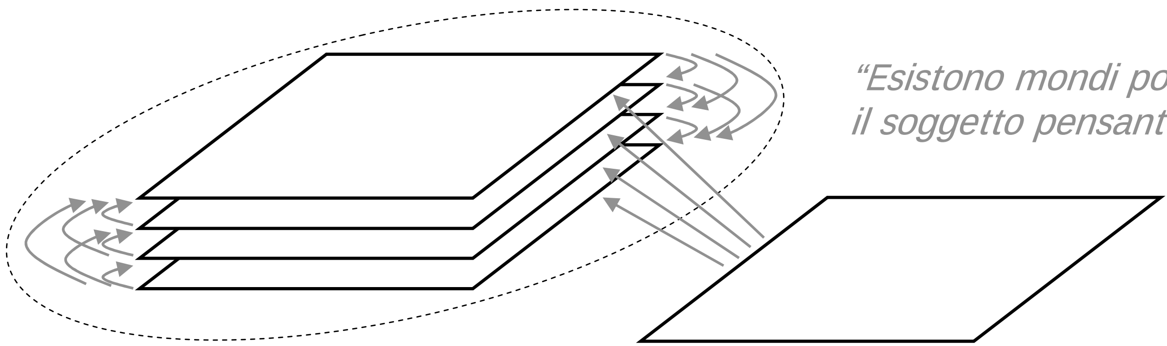
Strutture di mondi possibili

- La logica S5 (=KT45) corrisponde ad una classe di strutture in cui tutti i mondi appartengono ad un'unica classe di equivalenza



"Il soggetto pensante ha accesso diretto a tutti i mondi possibili"

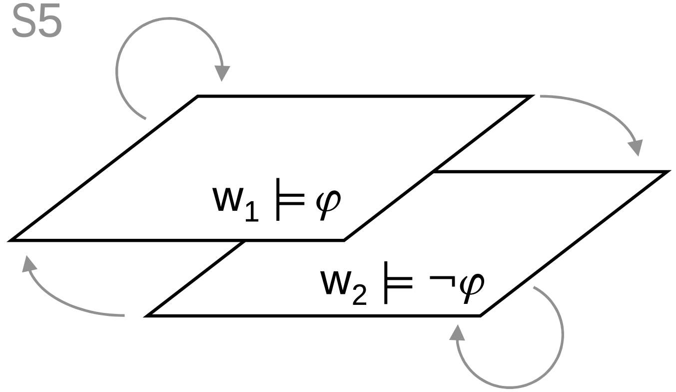
- La logica KD45 corrisponde invece ad una classe di strutture in cui almeno un mondo rimane 'all'esterno'



"Esistono mondi possibili a cui il soggetto pensante non ha accesso"

Specificità dell'operatore modale

- L'operatore modale $\Box$ **non è** un quantificatore sui mondi possibili
  - la semantica si basa infatti sulla relazione di accessibilità *R*
  - la verità delle fbf è definita in relazione a ciascun singolo mondo
  - esempio: $\varphi \rightarrow \Box\varphi$ non è una fbf valida in S5



  - la struttura è S5 ma $\varphi \rightarrow \Box\varphi$ non è vera in alcuno dei due mondi
  - ricordando la regola Nec: $\varphi \vdash \Box\varphi$ si può osservare che il teorema di deduzione **non** vale in logica modale
- Viceversa, l'eliminazione della relazione di accessibilità porta al 'collasso' della logica modale 'sulla logica classica'

Altre letture informali

- Logica temporale lineare

  φ si legge come 'adesso φ'
  $\Box\,\varphi$ si legge come 'adesso ed in futuro φ'
  $\Diamond\,\varphi$ si legge come 'prima o poi φ'

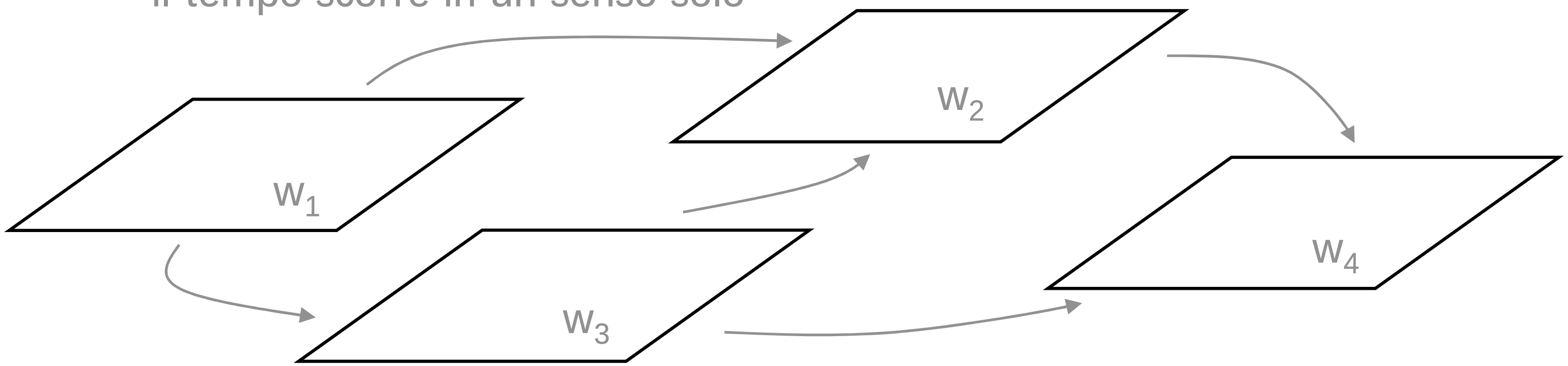
  D: $\Box\,\varphi \rightarrow \Diamond\,\varphi$

  T: $\Box\,\varphi \rightarrow \varphi$

  4: $\Box\Box\,\varphi \rightarrow \Box\,\varphi$

  B: $\varphi \rightarrow \Box\Diamond\,\varphi$

  – classe di strutture dove R è riflessiva e transitiva ma non simmetrica
    - il tempo scorre in un senso solo



Applicazioni delle logiche modali

- Logica temporale
  - la relazione di accessibilità *R* rappresenta la successione temporale
  - ogni 'cammino' in W è una storia possibile
    (p. es. di un sistema automatico)
  - la correttezza di una strategia di controllo
    - si può rappresentare con l'assenza di 'cammini critici'
    - e quindi tramite una formula
    - la cui falsità deve essere dimostrabile
- Logica epistemica
  - una rete di agenti software
  - ciascuno dei quali opera su un computer in rete
  - gli agenti si scambiano messaggi
  - che cosa 'sa' o 'può sapere' ciascun agente?
    - si usano più operatori modali $\Box_k$ (significato inteso: $\Box_k p \Leftrightarrow$ "k sa p")
  - Esempio (domotica): "il frigorifero sa che il forno è acceso?"

Logiche modali

- In generale, le logiche modali
  - sono caratterizzate dalla scelta di un particolare insieme di assiomi (e.g. KT5, KD45) a seconda del tipo di nozione informale (o di struttura dei mondi possibili) si vuole rappresentare
  - sono complete rispetto alla corrispondente classe di strutture
  - sono *decidibili* (in versione proposizionale)
- Tuttavia
  - non sono *vero-funzionali*, ovvero non esiste la possibilità di creare le tavole di verità con un numero finito di valori
  - non sono puramente *estensionali*, in quanto il valore di verità dipende anche da un ‘mondo possibile’ o contesto

4

Logiche multivalenti

Logiche multivalenti

- Origini storiche
  - il fatto che le logiche modali non siano vero-funzionali è stato dimostrato qualche tempo dopo la loro comparsa
  - agli inizi, si pensava che le logiche modali fossero vero-funzionali ma in riferimento ad un insieme di valori di verità con più di due valori (Lukasiewicz)
  - malgrado le origini comuni, le due linee si sono sviluppate in direzioni diverse

- Idea intuitiva
  - una logica a due soli valori rappresenta una sorta di certezza implicita riguardo alla *conoscibilità* del valore di verità
  - la presenza di ulteriori valori permette di rappresentare meglio situazioni di *incertezza* e/o di *ambiguità*

Logiche trivalenti

- Lukasiewicz (terzo valore: indeterminazione)

$\wedge$	0	U	1
0	0	0	0
U	0	U	U
1	0	U	1

$\vee$	0	U	1
0	0	U	1
U	U	U	1
1	1	1	1

$\rightarrow$	0	U	1
0	1	1	1
U	1	U	1
1	0	U	1

$\neg$	
0	1
U	U
1	0

- Bóchvar (terzo valore: inconsistenza)

$\wedge$	0	N	1
0	0	N	0
N	N	N	N
1	0	N	1

$\vee$	0	N	1
0	0	N	1
N	N	N	N
1	1	N	1

$\rightarrow$	0	N	1
0	1	N	1
N	N	N	N
1	0	N	1

$\neg$	
0	1
N	N
1	0

Logica a valori infiniti

- Lukasiewicz
  - una logica multivalente ‘generica’ che include anche la logica a valori infiniti (intervallo [0, 1])
  - regole algebriche al posto delle tavole di verità:

    $|\neg\varphi| = 1 - |\varphi|$

    $|\varphi \rightarrow \psi| = 1 - |\varphi| + |\psi|$

    $|\varphi \wedge \psi| = \min(|\varphi|, |\psi|)$

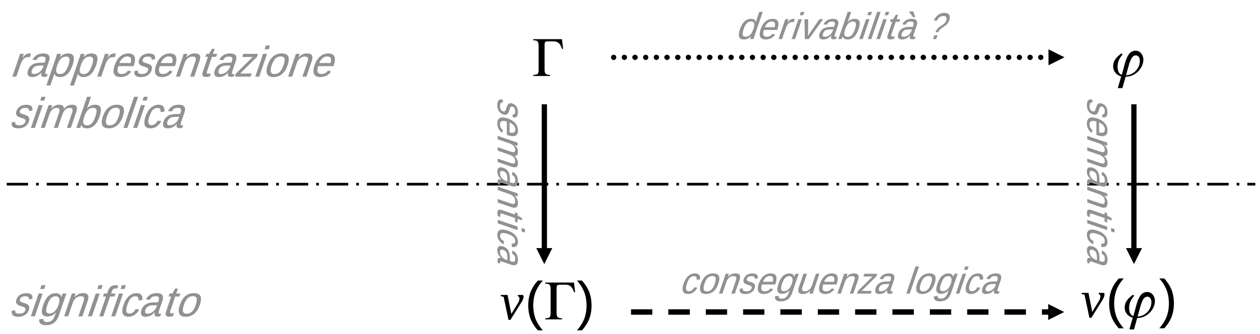
    $|\varphi \vee \psi| = \max(|\varphi|, |\psi|)$

    $|\varphi \leftrightarrow \psi| = \min(1 - |\varphi| + |\psi|, 1 - |\psi| + |\varphi|)$

- In tutte queste logiche:
  - $\varphi \vee \neg\varphi$ non è una *tautologia*
  - $\varphi \wedge \neg\varphi$ non è una *contraddizione*
  - $(\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$ rimane una *tautologia*
  - i valori in [0, 1] non possono essere probabilità:
    una logica probabilistica non può essere vero-funzionale

Sistemi logici multivalenti

- Sono sistemi logici *diversi* dalla logica **classica**
- non tutte le *tautologie* e le *contraddizioni* classiche sono preservate



- Inoltre:
  - viene progressivamente indebolito il ruolo del linguaggio
    - nel caso di valori infiniti, la definizione è persino problematica
  - e quindi la rilevanza della relazione di *derivabilità*
  - ci si deve affidare al calcolo semantico (regole algebriche)
  - sono logiche per usi 'ad hoc' (comunque pochi)