Intelligenza Artificiale

Breve introduzione alla logica classica (Parte 3)

Marco Piastra

Introduzione alla logica formale

Parte 1. Preambolo: algebra di Boole, proposizioni, conseguenza logica

Parte 2. Logica proposizionale

Parte 3. Logica predicativa del primo ordine

Parte 3

Logica predicativa del primo ordine

Limiti della logica proposizionale

- La logica proposizionale ha molte interessanti proprietà:
  - è *completa*
    - tutte le *conseguenze logiche* sono *derivabili* per via sintattica e viceversa
  - è *decidibile* in modo automatico

- Il difetto principale è la semplicità del linguaggio:
  - non è possibile rappresentare la struttura interna delle affermazioni
  - e quindi mettere in evidenza legami logici più sottili
- e la conseguente semplicità delle strutture semantiche:
  - solo un insieme {0, 1}
  - nessuna possibilità di caratterizzare strutture più complesse

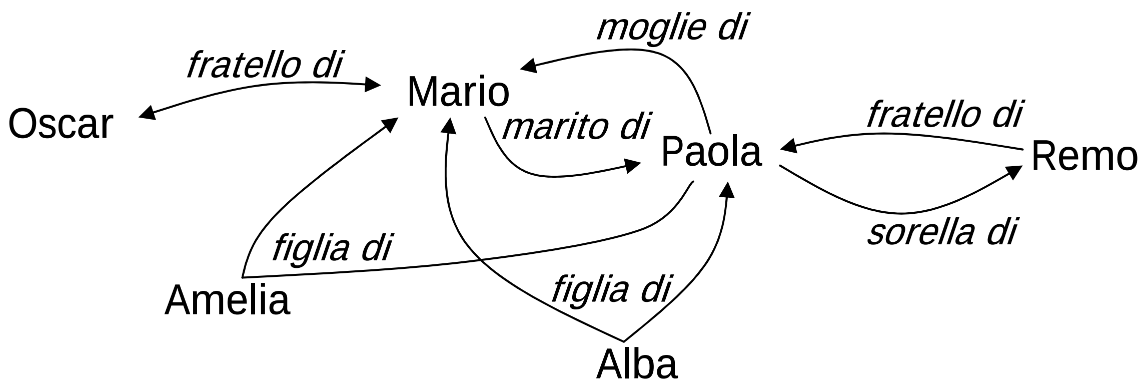
Limitazioni linguistiche di LP

- *Esempio* :
  - a: “Ogni uomo è mortale”
  - b: “Socrate è un uomo”
  - c: “Socrate è mortale”
- Il legame logico è evidente
- Nella traduzione in logica proposizionale, le tre proposizioni ‘a’, ‘b’ e ‘c’ non presentano alcun legame

- *Altro esempio* :
  - d: “Se tutti gli interi fossero pari, sarebbero divisibili per 2”
  - e: “Il numero 3 non è divisibile per 2”
  - f: “Non tutti i numeri interi sono pari”

Limitazioni rappresentative di LP

- Il problema non è solo linguistico ma **strutturale**
- Anche in una rappresentazione molto schematica, il mondo che osserviamo è fatto di oggetti e di relazioni tra oggetti
- *Esempio* :



  - come si possono tradurre questi elementi in forma simbolica?
  - come si stabilisce la correttezza dei ragionamenti in questi casi? (p.es. Amelia e Alba sono sorelle?)

Estensione predicativa: obiettivi

- Linguaggio formale esteso
  - in grado di rappresentare meglio la struttura delle affermazioni
- Semantica
  - in riferimento a strutture più complesse,
    capaci di descrivere oggetti e relazioni tra oggetti
    (teoria degli insiemi)
- Si vuole assolutamente
  - mantenere l'impianto *formale* del sistema logico-simbolico
  - mantenere la *capacità di rappresentazione* dei simboli rispetto ai significati
    (correttezza)
- Sarebbe meglio
  - mantenere la garanzia di *completa rappresentazione* dei significati
    (completezza)

LPO – Linguaggio

- Un **linguaggio predicativo** $\mathscr{L}_{PO}$ comprende:
  - un insieme di **simboli predicativi**, aventi un numero prestabilito di argomenti
    - esempio: P(x), G(x, y), Q(x, y, z), etc.
    - unica eccezione (per comodità) ‘=’
      (e.g. x = y ; ma si tratta di un *predicato*)
  - un insieme di **simboli funzionali**, aventi un numero prestabilito di *argomenti*
    - esempio: f(x), g(x, y), h(x, y, z), …
  - un insieme di **variabili**
    - esempio: x, y, z, …
  - un insieme di **costanti individuali**
    - esempio: a, b, c, …
  - i **connettivi** primari $\neg$, $\rightarrow$ e derivati $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$
  - il **quantificatore universale** $\forall$ ed il **quantificatore esistenziale** $\exists$
  - le due parentesi (e)

LPO – Regole di buona formazione

- **Termini**
  - ogni *variabile* o *costante individuale* è un **termine**
  - se f è un *simbolo funzionale* a *n* argomenti e $t_1, \ldots, t_n$ sono *termini*, allora $f(t_1, \ldots, t_n)$ è un **termine**
    - esempi: *x*, a, f(y), g(b, c)

- **Formula atomica**
  - se P è un *simbolo predicativo* a *n* argomenti e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini, allora $P(t_1, \ldots, t_n)$ è una **formula atomica**
    - esempi: P(x), Q(y, a), R(b, c, x)

- Formule ben formate (**fbf**)
  - ogni *formula atomica* è una fbf
  - se φ è una fbf, allora $(\neg\varphi)$ è una fbf
  - se φ e ψ sono fbf, allora anche $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ e $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ lo sono
  - se φ è una fbf, allora anche $(\forall x\, \varphi)$ e $(\exists x\, \varphi)$ sono fbf (questa è nuova)

LPO – Formule aperte, enunciati

- Variabili libere e vincolate
  - una variabile (in una fbf) è **vincolata** se si trova nel raggio di azione di un **quantificatore**
  - una variabile è **libera** se non è *vincolata*
    - esempi di variabile vincolata:
      - $\forall x\ P(x)$
      - $\exists x\ (P(x) \rightarrow (A(x) \wedge B(x))$
    - esempi di variabile libera:
      - $P(\underline{x})$
      - $\exists y\ (P(y) \rightarrow (A(\underline{x}, y) \wedge B(y))$

In un linguaggio del primo ordine i quantificatori si applicano solo alle variabili

- Formule aperte e chiuse
  - si dice **aperta** una fbf in cui occorre almeno una variabile libera
  - si dice **chiusa** o anche **enunciato** in caso contrario
  - solo le fbf *chiuse*, cioè gli *enunciati*, hanno un valore di verità (in quanto rappresentano delle *affermazioni* ...)

LPO – Strutture e interpretazioni

- La struttura semantica di riferimento assai più complessa di {0, 1} …

- Una struttura $<\mathbf{U}, i>$ per un linguaggio $\mathscr{L}_{\mathrm{PO}}$ contiene:
  - un **insieme di oggetti** $\mathbf{U}$ (l'universo del discorso)
  - un'**interpretazione** i, cioè una *funzione* che associa
    - ad ogni *simbolo predicativo* a *n* argomenti una **relazione** *n*-aria in $\mathbf{U}^n$
    - ad ogni *simbolo funzionale* a *n* argomenti una **funzione** *n*-aria in $\mathbf{U}^n$
    - ad ogni *costante individuale* un **elemento** di $\mathbf{U}$

Ai *simboli predicativi* unari sono associati *sottoinsiemi* di $\mathbf{U}$

- Per le *variabili*
  - una **assegnazione** s è una funzione che associa
    - ad ogni *variabile* un elemento di $\mathbf{U}$

LPO – Esempio 1

- Linguaggio
  - simboli predicativi: Uomo(.), Pollo(.), Mortale(.)
  - variabili: x, y, z, …
  - costanti individuali: Socrate, Aristotele, Platone, Gino, Mino, Tino

- Interpretazione
  - universo del discorso **U**: {Socrate, Aristotele, Platone, Gino, Mino, Tino}
  - interpretazione *i*:
    - costanti individuali: *i*(Socrate) = Socrate, *i*(Aristotele) = Aristotele, etc.
    - simboli predicativi:
      i(Uomo(.)) = {Socrate, Aristotele, Platone}
      i(Pollo(.)) = {Gino, Mino, Tino}
      i(Mortale(.)) = {Socrate, Aristotele, Platone, Gino, Mino, Tino}
- Assegnazione
  - esempio: *s* ={[x/Socrate], [y/Platone], …} (i.e. per *tutte* le variabili)

LPO – Esempio 2

- Linguaggio
  - simboli predicativi: Uomo(.), Donna(.), Fratello(..), Sorella(..), Genitore(..)
  - simboli funzionali: madre(.), padre(.)
  - variabili: x, y, z, …
  - costanti individuali: Mario, Paola, Remo, Oscar, Amelia, Alba
- Interpretazione
  - universo del discorso **U**: {Mario, Paola, Remo, Oscar, Amelia, Alba}
  - interpretazione *i*:
    - costanti individuali: *i*(Mario) = Mario, *i*(Paola) = Paola, etc.
    - simboli predicativi:
      i(Uomo(.)) = {Mario, Remo, Oscar}
      i(Donna(.)) = {Paola, Amelia, Alba}
      i(Fratello(..)) = {<Oscar, Mario>, <Mario, Oscar>, <Remo, Paola>}
      i(Sorella(..)) = {<Paola, Remo>, <Alba, Amelia>, <Amelia, Alba>}
    - simboli funzionali:
      i(madre(.)) = {<Alba, Paola>, <Amelia, Paola>}
      i(padre(.)) = {<Alba, Mario>, <Amelia, Mario>}

LPO – Soddisfacimento

- Formule atomiche
  - data una struttura $<\mathbf{U}, i>$, un'assegnazione s ed una formula atomica φ
  - si ha che $<\mathbf{U}, i> \models \varphi[s]$ sse
    - se φ ha la forma $t_1 = t_2$ allora $i(t_1)\ [s] \equiv i(t_2)\ [s]$ (se si usa l'identità)
    - se φ ha la forma $P(t_1, \ldots, t_n)$ allora $<i(t_1)\ [s], \ldots, i(t_n)\ [s]> \in i(P)$
- Fbf qualsiasi
  - si ha che $<\mathbf{U}, i> \models \varphi[s]$ sse
    - se φ è una formula atomica, vedi sopra
    - se $\neg\varphi$ allora $<\mathbf{U}, i> \not\models \varphi[s]$
    - se $\varphi \wedge \psi$ allora $<\mathbf{U}, i> \models \varphi[s]$ e $<\mathbf{U}, i> \models \psi[s]$
    - se $\varphi \vee \psi$ allora $<\mathbf{U}, i> \models \varphi[s]$ o $<\mathbf{U}, i> \models \psi[s]$
    - se $\varphi \rightarrow \psi$ allora non $<\mathbf{U}, i> \models \varphi[s]$ e $<\mathbf{U}, i> \not\models \psi[s]$
    - se $\forall x\ \varphi$ allora per ogni $d \in \mathbf{U}$ si ha $<\mathbf{U}, i> \models \varphi[s - x/d]$
    - per definizione $\exists x\ \varphi \equiv \neg\forall x\ \neg\varphi$

Come per LP

Questa è la novità

LPO – Esempio 3

- (in riferimento alla interpretazione dell'esempio 2)
- Soddisfacimento
  - $\langle \mathbf{U}, \mathrm{i} \rangle \models \text{Uomo(Mario)}$
    - in quanto $\underline{\text{Mario}} \in \mathrm{i}(\text{Uomo}(.))$
  - $\langle \mathbf{U}, \mathrm{i} \rangle \models \text{Uomo(padre(Alba))}$
    - in quanto $\langle \underline{\text{Alba}}, \underline{\text{Mario}} \rangle \in \mathrm{i}(\text{padre}(.))$ e $\underline{\text{Mario}} \in \mathrm{i}(\text{Uomo}(.))$
  - $\langle \mathbf{U}, \mathrm{i} \rangle \models \neg\text{Uomo(Paola)}$
    - in quanto $\underline{\text{Paola}} \notin \mathrm{i}(\text{Uomo}(.))$
  - $\langle \mathbf{U}, \mathrm{i} \rangle \models \text{Uomo(Mario)} \wedge \text{Genitore(Mario, Alba)}$
    - in quanto $\underline{\text{Mario}} \in \mathrm{i}(\text{Uomo}(.))$ e $\langle \underline{\text{Mario}}, \underline{\text{Alba}} \rangle \in \mathrm{i}(\text{Genitore}(..))$
  - $\langle \mathbf{U}, \mathrm{i} \rangle \models \forall x\ (\text{Uomo}(x) \vee \text{Donna}(x))$
    - in quanto per ogni d $\in \mathbf{U}$ si ha che $\langle \mathbf{U}, \mathrm{i} \rangle \models (\text{Uomo}(x) \vee \text{Donna}(x))\ [x/d]$
- Assegnazione
  - $\langle \mathbf{U}, \mathrm{i} \rangle \models \text{Donna}(x)[x/\underline{\text{Paola}}, \ldots]$
  - $\langle \mathbf{U}, \mathrm{i} \rangle \not\models \text{Donna}(x)[x/\underline{\text{Mario}}, \ldots]$

LPO – Modelli, validità

- Verità e modelli
  - un **enunciato** φ è *vero* in una struttura $<\mathbf{U}, i>$ sse
    - esiste un'assegnazione s tale per cui $<\mathbf{U}, i> \models \varphi[s]$
    - per un enunciato, l'esistenza di una s equivale a "per ogni s"
    - la separazione interpretazione / assegnazione serve nel caso dei quantificatori

      "se $\forall x\ \varphi$ allora per ogni $d \in \mathbf{U}$ si ha $<\mathbf{U}, i> \models \varphi[s - x/d]$"

  - una struttura $<\mathbf{U}, i>$ tale da rendere *vero* un enunciato φ è detta **modello** di φ
    - si scrive allora $<\mathbf{U}, i> \models \varphi$
  - una struttura $<\mathbf{U}, i>$ è detta **modello** di un *insieme di enunciati* Γ sse rende *veri* tutti gli enunciati in Γ
    - si scrive allora $<\mathbf{U}, i> \models \Gamma$

LPO – Modelli, validità (2)

- Validità
  - un enunciato φ è **valido** se è *vero* in qualunque struttura $<\mathbf{U}, i>$
    - si scrive allora $\models \varphi$
- Inconsistenza
  - un enunciato φ è **inconsistente** se non ha un *modello*

LPO – Derivazione, teorie, assiomi

- Come nel caso di LP, si ha un'unica regola di **derivazione**
  - il *modus ponens*
    $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \vdash \psi$
- La definizione di *derivazione* o **dimostrazione** (intesa come successione di passi) è identica a quella di LP

- Un qualsiasi insieme di fbf Σ può essere detto una **teoria**
- Dato un insieme di fbf Γ, l'insieme dei **teoremi** di Γ è l'insieme di tutte le fbf *derivabili* a partire da Γ

  $teoremi(\Gamma) = \{\varphi : \Gamma \vdash \varphi\}$
- Un Γ è una **assiomatizzazione** di Σ sse

  $\Sigma \equiv teoremi(\Gamma)$

Costruzione e uso di teorie in LPO

- Il sistema di assiomi Ax descrive la *teoria* delle fbf *valide*
  - le fbf *valide* si applicano a qualsiasi ragionamento (sono ‘leggi logiche’ o, meglio, leggi di LPO)
- Analogamente possono essere costruite *teorie* particolari
  - si definisce un insieme Γ di fbf (assiomi o fatti noti) che descrive le proprietà degli oggetti di cui si parla
- La derivazione di *teoremi* serve a ‘scoprire’, cioè a rendere espliciti, gli elementi di una teoria
  - in particolare quelli non direttamente descritti in Γ
- Due problemi per il calcolo
  - escludendo la possibilità di derivare ‘a pioggia’ tutti i teoremi
  - in che modo ipotizzare i *teoremi*
  - come dimostrare che lo sono (o che non lo sono)

LPO – Sistema di assiomi

- Sei *schemi di assioma* per LPO:

Gli stessi di LP

Ax1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

Ax2 $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

Ax3 $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

Ax4 $\forall x\, \varphi \to \varphi[x/t]$

se il termine t è sostituibile per x in φ

Ax5 $\forall x\, (\varphi \to \psi) \to (\forall x\, \varphi \to \forall x\, \psi)$

Ax6 $\varphi \to \forall x\, \varphi$

se x non occorre libera in φ

  – ogni sostituzione di φ, ψ e χ con una fbf è un assioma

- Altri due *schemi di assioma* se si usa l'identità:

Ax7 $t = t$

Ax8 $(t = u) \to (\varphi[x/t] \leftrightarrow \varphi[x/u])$

LPO – Esempio 4

- Derivazione: “Socrate è mortale”:
  - $\{\forall x\ (Uomo(x) \rightarrow Mortale(x)), Uomo(Socrate)\} \vdash Mortale(Socrate)$

1:	$\forall x\ (Uomo(x) \rightarrow Mortale(x))$	(premessa)
2:	$Uomo(Socrate) \rightarrow Mortale(Socrate)$	(Ax4 con [x/Socrate])
3:	Uomo(Socrate)	(premessa)
4:	Mortale(Socrate)	(mp 2, 3)

LPO – Esempio 5

- Derivazione: “Alba è sorella di Amelia”

Regole:

$\forall x\ \forall y\ ((Donna(x) \land \exists z\ (Genitore(z, x) \land Genitore(z, y))) \rightarrow Sorella(x, y))$

Fatti:

Donna(Alba), Donna(Amelia), Genitore(Mario, Alba), Genitore(Mario, Amelia)

1: $\forall y\ ((Donna(Alba) \land \exists z\ (Genitore(z,Alba) \land Genitore(z,y))) \rightarrow Sorella(Alba,y))$
(Ax4 con [x/Alba])

2: $(Donna(Alba) \land \exists z\ (Genitore(z, Alba) \land Genitore(z, Amelia))) \rightarrow Sorella(Alba, Amelia)$
(Ax4 con [y/Amelia])

3: $(Genitore(Mario, Alba) \land Genitore(Mario, Amelia))$
$\rightarrow \exists z\ (Genitore(z, Alba) \land Genitore(z, Amelia))$
(teorema)

4: $Genitore(Mario, Alba) \land Genitore(Mario, Amelia)$ (premesse)
5: $\exists z\ (Genitore(z, Alba) \land Genitore(z, Amelia))$ (mp 3, 4)
6: $Donna(Alba)$ (premesse)
7: $(Donna(Alba) \land \exists z\ (Genitore(z, Alba) \land Genitore(z, Amelia)))$ (5 + 6)
8: $Sorella(Alba, Amelia)$ (mp 2, 7)

LPO – Correttezza e completezza

- Correttezza di LPO

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \varphi$$

- Completezza di LPO

$$\vdash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \varphi$$

Si considerano solo le fbf *valide*

- Validità del sistema di assiomi
  - le fbf del sistema di assiomi Ax per LPO sono *valide*
- Completezza del sistema di assiomi
  - la *teoria* delle fbf *valide* di LPO coincide con l'insieme dei *teoremi* del sistema di assiomi Ax

$$\varphi \in \textit{teoremi}(\mathrm{Ax}) \quad \Leftrightarrow \quad \models \varphi$$

LPO – Esempio 6: semantica intuitiva

- “Ogni uomo è mortale”
  - l’insieme degli uomini *è incluso* nell’insieme dei mortali
  - infatti:
    $\forall x\,(\text{Uomo}(x) \rightarrow \text{Mortale}(x))$ è soddisfatto in una struttura $<\mathbf{U}, i>$ dove

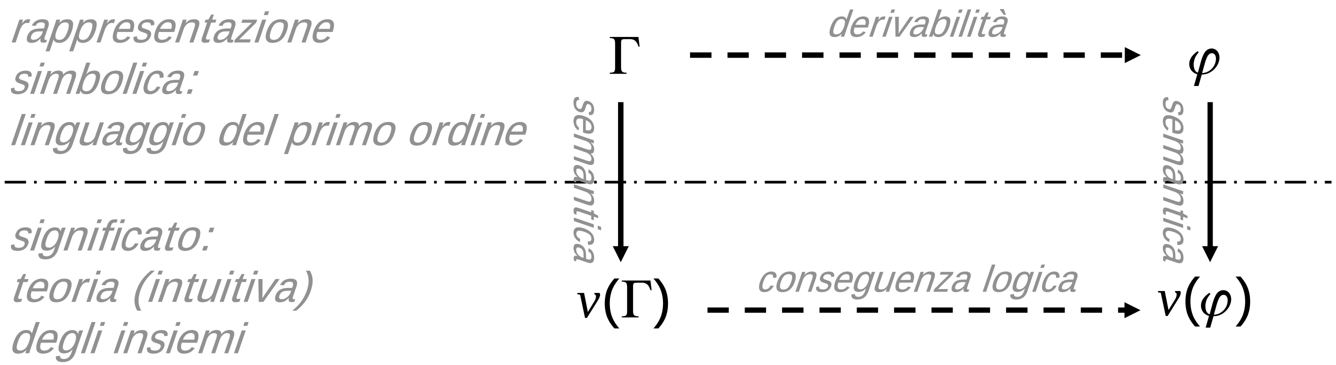
    $\forall x\,(\neg\text{Uomo}(x) \vee \text{Mortale}(x))$ (equivalenza logica)
    $\forall x\,\neg(\text{Uomo}(x) \wedge \neg\text{Mortale}(x))$ (De Morgan)
    $\neg\exists x\,(\text{Uomo}(x) \wedge \neg\text{Mortale}(x))$ (definzione di $\exists x$)

    quindi in $<\mathbf{U}, i>$ non esistono *d* tali per cui
    $<\mathbf{U}, i> \models \text{Uomo}(x)[x/\text{d}]$ e $<\mathbf{U}, i> \not\models \text{Mortale}(x)[x/\text{d}]$

- “Socrate è mortale”
  - l’oggetto Socrate appartiene all’insieme dei mortali
- Alba è sorella di Amelia
  - la relazione “sorella” include <Alba, Amelia>

LPO – Generalità

- Assumendo come riferimento la teoria (intuitiva) degli insiemi, la logica predicativa del primo ordine ha un raggio d'azione molto generale



- Il valore pragmatico è notevole
  - rappresentazione di ragionamenti in astratto
  - a patto di avere una 'macchina' efficiente
- Il valore filosofico è anche maggiore
  - possiamo fondare teorie tramite il linguaggio?

LPO – Limitazioni intrinseche

- ω-incompletezza
  - la *teoria* dei numeri contiene degli enunciati *veri* (nella struttura di riferimento) che sono tuttavia indimostrabili (Gödel)
- Indimostrabilità della consistenza (esistenza di un modello)
  - all'interno della teoria dei numeri non è possibile dimostrare che la teoria stessa è consistente (Gödel)
- Indecidibilità
  - non esiste una procedura automatica di valore generale (Church)
- Inoltre:
  - le teorie che includono il simbolo di identità sono sempre interpretabili in una struttura in cui la relazione corrispondente non è l'identità tra oggetti
  - alcune proprietà non sono caratterizzabili da una teoria
    - ogni teoria che ammette un modello infinito ha anche un modello numerabile (Löwenheim-Skolem)

LPO – Automazione del calcolo

- I metodi di base sono gli stessi di LP
  - Risoluzione per refutazione
    - Su forme a clausole di Horn (**Prolog**)
  - Metodi a tableau
- LPO introduce due elementi di ulteriore difficoltà
  - I quantificatori
  - Le variabili, le costanti e le funzioni (termini)
  - Esempio:

$$\forall x\ \exists y\ (p(g(x,f(a)),a) \lor q(x,y))$$
$$\forall z\ \exists w\ (\neg p(g(b,f(z)),z) \lor \neg r(w))$$

LPO – Forma normale prenessa (FNP)

- Forma con **prefisso** e **matrice**
  - Una fbf formata da:
    - Una lista iniziale di quantificatori senza negazioni (*prefisso*)
    - Seguita da una formula (aperta) priva di quantificatori (*matrice*)
    - Esempi:

      $\forall x \, \exists y \, p(x,y)$

      $\forall x \, q(x) \land \exists y \, r(y)$ *(No: il quantificatore ∃ non è nel prefisso)

      $\forall x \, \neg \forall y \, p(x,y)$ *(No: un quantificatore è in forma negata)
  - Si ottiene:
    - Riscrivendo le formule e sostituendo le variabili

      $\forall x \, q(x) \land \exists x \, r(x)$ diventa: $\forall x \, \exists y \, (q(x) \land r(y))$
    - Utilizzando le equivalenze:

      $\neg \forall x \, \varphi(x) \leftrightarrow \exists x \, \neg \varphi(x)$

      $\neg \exists x \, \varphi(x) \leftrightarrow \forall x \, \neg \varphi(x)$
- 'Skolemizazzione': eliminare il quantificatore esistenziale
  - Il quantificatore esistenziale può essere sostituito da una *nuova* funzione

    $\forall x \, \exists y \, (q(x) \land r(y))$ diventa $\forall x \, (q(x) \land r(h(x)))$ h(.) *è la nuova funzione*

LPO – Altre forme normali

- In una fbf in FNP:
  - solo quantificatori universali
  - tutti i quantificatori nel *prefisso*, tutti i predicati nella *matrice*
  - i quantificatori possono essere omessi
- La *matrice* di una FNP può essere tradotta in FNC
  - con le stesse regole viste per il caso proposizionale
- Forma a clausole in LPO
  - tutte le formule sono in FNP + FNC
  - Esempio di forma a clausole:
    {{p(g(x,f(a)),a), q(x,h(x))}, {¬p(g(b,f(z)),z), ¬r(j(z))}}

sono le stesse di pag. 27 con h(.) *e* j(.) *come funzioni di Skolem*

- Clausole di Horn (come in LP)
  - in ciascuna clausola compare al massimo un *atomo* in forma positiva
    - fatti: $\{\alpha\}$, $\{\neg\beta\}$, $\{\neg\gamma\}$, $\{\delta\}$
    - regole: $\{\neg\beta, \neg\delta, \gamma\}$
    - goal: $\{\neg\gamma, \neg\delta\}$

LPO – Unificazione

- Una sostituzione $\mu = [x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n]$ di variabili x_i con termini t_i:
  - Le due clausole

    $p(g(x,f(a)),a) \lor q(x,h(x))$
    $\neg p(g(b,f(z)),z) \lor \neg r(j(z))$

    sono le stesse della pagina precedente
  - sono simili ma non abbastanza per poter applicare la regola di risoluzione
  - Applicando una sostituzione $\mu = [x/b, z/a]$ si ottiene:

    $p(g(b,f(a)),a) \lor q(b,h(b))$
    $\neg p(g(b,f(a)),a) \lor \neg r(j(a))$
  - Si può applicare la regola di risoluzione e si ottiene

    $q(b,h(b)) \lor \neg r(j(a))$
- Unificatore più generale (*most general unifier* – MGU)
  - premesso che due unificatori μ e σ si possono *comporre*
    - $\mu \cdot \sigma$ si ottiene applicando σ a μ ed aggiungendo le sostituzioni di σ non in μ
  - è un unificatore da cui è possibile derivare qualsiasi altro unificatore

    MGU $\mu \Leftrightarrow \forall \sigma\ \exists \sigma' \mid \sigma = \mu \cdot \sigma'$

LPO – Risoluzione per refutazione

- Procedimento
  - dovendo stabilire se $\Gamma \models \varphi$
  - si parte da $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ tradotte in forma a clausole
  - si applica la regola di **risoluzione con unificazione**
  - e si cerca di derivare { } (insoddisfacibilità)
- Risoluzione con unificazione
  - date due fbf in forma a clausole

    {p(g(x,f(a)),a), q(x,h(x))}
    {¬p(g(b,f(z)),z), ¬r(j(z))}
  - si cerca il MGU per le clausole da risolvere

    μ = [x/b, z/a]
  - se esiste, si genera il risolvente

    q(b,h(b)), ¬r(j(a))

LPO – Risoluzione per refutazione (2)

- Il procedimento è corretto
  - è completo laddove LPO lo è
  - è semi-terminante:
    - la clausola vuota viene sempre trovata se $\Gamma \models \varphi$
    - il procedimento può non terminare se $\Gamma \not\models \varphi$