Intelligenza Artificiale

Breve introduzione alla logica classica (Parte 2)

Marco Piastra

Introduzione alla logica formale

Parte 1. Preambolo: algebra di Boole, proposizioni, conseguenza logica

Parte 2. Logica proposizionale

Parte 3. Logica predicativa del primo ordine

Parte 2

Logica proposizionale

Logica proposizionale – Linguaggio

- Un linguaggio proposizionale $\mathscr{L}_P$ contiene:
  - un insieme non vuoto *P* di **lettere proposizionali**: a, b, c, …
  - due *connettivi* principali: $\neg$, $\rightarrow$
  - due simboli ausiliari: (,) (le parentesi)
  - tre *connettivi* derivati: $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$
  - regole sintattiche per la composizione di formule, dette **formule ben formate - *fbf***
    - l'insieme di tutte le fbf di $\mathscr{L}_P$ si indica con fbf($\mathscr{L}_P$)

    - $P \in \text{fbf}(\mathscr{L}_P)$
    - $\varphi \in \text{fbf}(\mathscr{L}_P) \Rightarrow (\neg\varphi) \in \text{fbf}(\mathscr{L}_P)$
    - $\varphi, \psi \in \text{fbf}(\mathscr{L}_P) \Rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \in \text{fbf}(\mathscr{L}_P)$

    - $\varphi, \psi \in \text{fbf}(\mathscr{L}_P)$, $(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow ((\neg\varphi) \rightarrow \psi)$
    - $\varphi, \psi \in \text{fbf}(\mathscr{L}_P)$, $(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi)))$
    - $\varphi, \psi \in \text{fbf}(\mathscr{L}_P)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$

LP – Regole semantiche

- Un'*interpretazione* di $\mathscr{L}_P$ è una funzione v : fbf($\mathscr{L}_P$) $\rightarrow$ {0, 1}
  - $\varphi, \psi \in$ fbf($\mathscr{L}_P$)
    - $\varphi \in P$, $v(\varphi)$ = valore assegnato alla lettera proposizionale
    - $v(\neg\varphi) = 1$ sse $v(\varphi) = 0$
    - $v(\varphi \wedge \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$
    - $v(\varphi \vee \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = 1$ o $v(\psi) = 1$
    - $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ sse non $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$
    - $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = v(\psi)$
  - in sintesi, un'interpretazione v di $\mathscr{L}_P$ è coerente con le tavole di verità viste in precedenza

LP – Modelli e soddisfacibilità

- Data una fbf φ ed un'interpretazione v tale per cui
  $v(\varphi) = 1$
- Si dice che:
  - v **soddisfa** φ
  - v è un **modello** di φ
  - si scrive anche
    $v \models \varphi$
- La definizione è facilmente estesa agli insiemi di fbf
  $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots \varphi_n\}$
  $v \models \Gamma$ sse per $\forall \varphi_i \in \Gamma$, $v \models \varphi_i$
- Una fbf è una **tautologia** (o una fbf **valida**) se è soddisfatta da qualsiasi interpretazione
  - φ è una tautologia si scrive anche
    $\models \varphi$
- Una fbf φ è una **contraddizione** se non ha un modello

LP – Conseguenza, decidibilità

- Una fbf ψ è una ***conseguenza logica*** di un insieme di fbf Γ sse qualsiasi modello di Γ è anche modello di ψ
  - si scrive anche:

    $\Gamma \models \psi$

- Il problema della **decidibilità** in LP:
  esistenza di un algoritmo per stabilire se:

  $\models \varphi$

  $\Gamma \models \psi$
- LP è **decidibile**
  - basta usare il metodo delle tavole di verità

LP – Derivazione

- Una regola di **derivazione** (anche regola di **inferenza**) permette di *derivare* fbf da altre fbf
- In logica proposizionale si ha una sola regola di derivazione
  - *modus ponens* (*mp*): $\dfrac{\varphi \rightarrow \psi \quad \varphi}{\psi}$
  - si può scrivere anche così:

    $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \vdash \psi$ (da $\varphi \rightarrow \psi$ e φ è *derivabile* ψ)

- Esempio di applicazione:
  - dalle due formule

    $(\neg a \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow \neg d)$

    $(\neg a \rightarrow b)$
  - si può derivare

    $(c \rightarrow \neg d)$

Una regola di derivazione è di tipo *sintattico* in quanto opera sulla struttura delle fbf

LP – Assiomi

- Gli assiomi di un sistema logico esprimono *leggi logiche* di validità generale (nel sistema stesso)
- In logica proposizionale si usano degli *schemi di assioma* :
  - $\forall \varphi, \psi, \chi \in \text{fbf}(\mathscr{L}_P)$

    Ax1 $\quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

    Ax2 $\quad (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

    Ax3 $\quad (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
  - ogni istanziazione di Ax1, Ax2, Ax3 è un assioma

- Esempi

  $a \rightarrow (a \rightarrow a)$ [Ax1, φ/a, ψ/a]

  $(\neg(b \vee c) \rightarrow \neg d) \rightarrow (d \rightarrow (b \vee c))$ [Ax3, φ/(b $\vee$ c), ψ/d]

  - Notare che ogni istanziazione è anche una fbf *valida* (o *tautologia*)

LP – Derivazioni

- Una *dimostrazione* (o *derivazione*) di una fbf ψ da un insieme di fbf Γ
  - è una successione *finita* di passi $<\alpha_1, \ldots, \alpha_n>$
  - per ogni passo α_i si hanno tre alternative:
    1) $\alpha_i \in$ istanza di Ax*n*
    2) $\alpha_i \in \Gamma$
    3) α_i è ottenibile dalle fbf dei passi precedenti, tramite *modus ponens*
  - $\alpha_n = \psi$
  - quando la derivazione esiste, si scrive $\Gamma \vdash \psi$ "ψ è derivabile da Γ"
- Ne segue che:

  $\vdash$ Ax (un assioma è derivabile anche da un Γ vuoto)

  $\Gamma \vdash$ Ax (un assioma è derivabile da qualsiasi Γ)

  $\{\varphi, ..\} \vdash \varphi$ (qualsiasi φ è derivabile da un Γ che già la contiene)

- Vale il *teorema di deduzione* (*ded*)

  $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ equivale a $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ (dimostrazione sul testo)

LP – Derivazioni, esempio 1

- Doppia negazione implica affermazione

$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$

1:	$\neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$	(Ax1, *Ded*)
2:	$\neg\neg\varphi \vdash (\neg\neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\neg\varphi)$	(Ax3)
3:	$\neg\neg\varphi \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\neg\neg\varphi$	(*mp* 2,1)
4:	$\neg\neg\varphi \vdash (\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi)$	(Ax3)
5:	$\neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	(*mp* 4,3)
6:	$\neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi$	
7:	$\neg\neg\varphi \vdash \varphi$	(*mp* 5,6)
8:	$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	(*Ded*)

LP – Derivazioni, esempio 2

- "Ex absurdo sequitur quodlibet":

$\vdash \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$ (cioè $\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$)

1:	$\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$	(Ax1, Γ arbitrario)
2:	$\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi$	
3:	$\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$	(*mp* 1,2)
4:	$\varphi, \neg\varphi \vdash (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$	(Ax3)
5:	$\varphi, \neg\varphi \vdash \varphi \rightarrow \psi$	(*mp* 4,3)
6:	$\varphi, \neg\varphi \vdash \varphi$	
7:	$\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$	(*mp* 5,6)
8:	$\varphi \vdash \neg\varphi \rightarrow \psi$	(*Ded*)
9:	$\vdash \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$	(*Ded*)

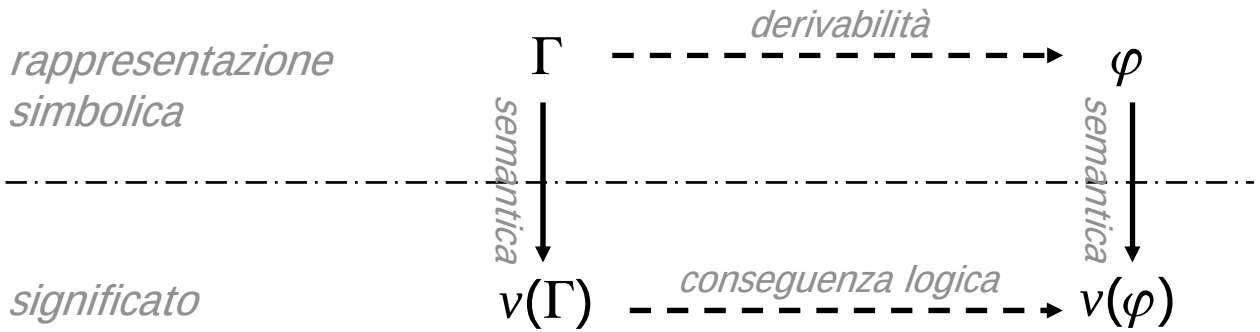
LP – Correttezza e completezza

- *Correttezza*
  - la regola del *modus ponens* preserva la conseguenza logica
    $\Gamma \models \{\varphi \rightarrow \psi, \varphi\} \Rightarrow \Gamma \models \psi$
  - le fbf φ *derivabili* da un insieme di fbf Γ sono una *conseguenza logica* di Γ (sono soddisfatte dai modelli di Γ)
    $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$
  - tutte le fbf *derivabili* dagli assiomi $\mathrm{Ax}n$ assiomi sono *valide* (cioè sono *tautologie*)
    $\vdash \varphi \Rightarrow \models \varphi$

- *Completezza*
  - le *conseguenze logiche* di Γ sono le fbf φ *derivabili*
    $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi$
  - le fbf *valide* sono tutte e sole le fbf *derivabili* dagli assiomi $\mathrm{Ax}n$
    $\vdash \varphi \Leftrightarrow \models \varphi$

LP - Calcolo simbolico

- Per la proprietà di *completezza*, la *derivazione* simbolica è rappresentativa delle relazioni tra i significati



- Nel caso della logica proposizionale, la relazione di *conseguenza logica* può essere determinata in modo diretto
- In molti altri casi, la derivazione simbolica è l'unica possibilità

LP – Teorie, assiomatizzazione

- Un qualsiasi insieme di fbf Σ può essere detto una **teoria**
- Dato un insieme di fbf Γ, l'insieme dei **teoremi** di Γ è l'insieme di tutte le fbf *derivabili* a partire da Γ

  $teoremi(\Gamma) = \{\varphi : \Gamma \vdash \varphi\}$

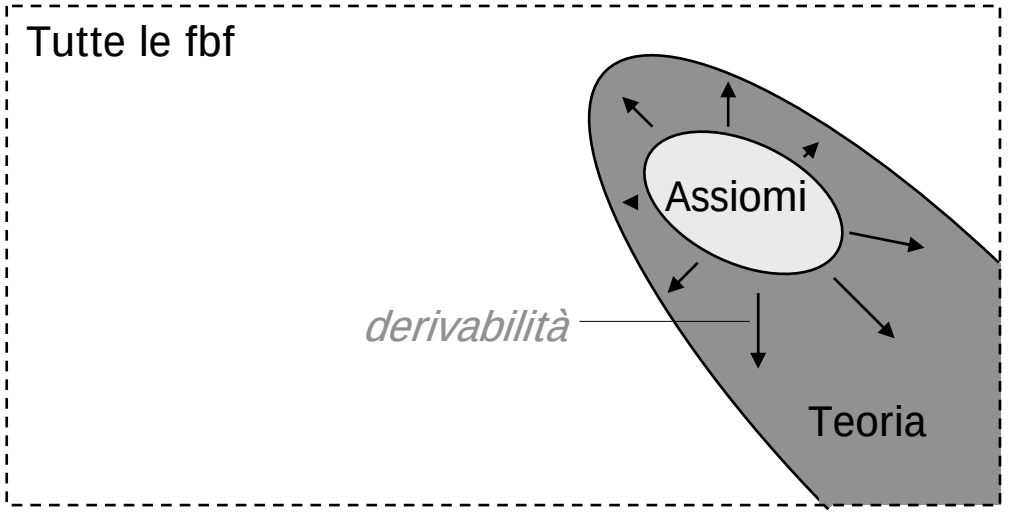
- Un insieme di fbf Γ è un'**assiomatizzazione** di Σ sse

  $\Sigma \equiv teoremi(\Gamma)$

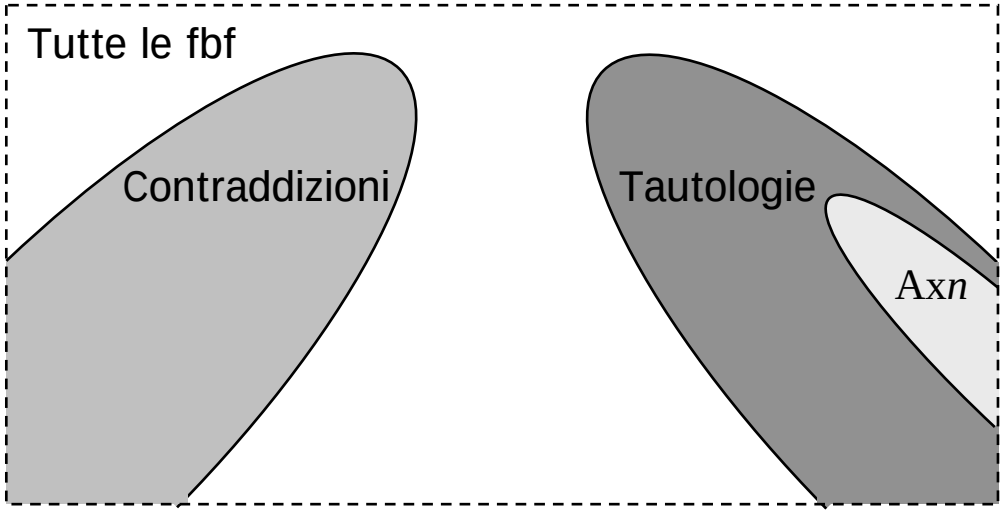
- Il sistema di assiomi $\mathrm{Ax}n$ descrive la *teoria* delle fbf *valide* del **calcolo proposizionale classico (LP)**
  - le fbf *valide* si applicano a qualsiasi 'ragionamento' in LP (sono 'leggi logiche' nel senso di leggi di LP)

LP – fbf e teorie

- Una **teoria** può essere definita tramite **assiomi**
  - In questo caso, la teoria coincide con i **teoremi** (fbf derivabili dagli assiomi)



- Nel caso di $\mathrm{Ax}n$ per LP
  - L'insieme di assiomi è infinito (esistono assiomatizzazioni finite)
  - La teoria è l'insieme delle tautologie (o fbf **valide**)



LP – Logica, teorie ed applicazioni

- In generale, l'**assiomatizzazione** di una **logica** è la descrizione concisa dell'insieme delle fbf **valide** di quella logica
  - Il sistema di assiomi $\mathrm{Ax}n$ in LP è la descrizione dell'insieme delle *tautologie*

- La teoria delle fbf valide di una logica (p.es. LP) rappresenta l'insieme delle leggi logiche **generali** (di quella logica) e non contiene alcuna rappresentazione specifica

- Ai fini dell'applicazione a problemi pratici (non solo logici), le teorie devono rappresentare conoscenze specifiche
  - ad esempio il funzionamento di un dispositivo o di un impianto

- Esistono quindi anche **assiomatizzazioni** di **teorie** specifiche
  - cioè le applicazioni pratiche ...

LP – Esempio di teoria specifica

- "La macchina non parte", proposizioni atomiche:

  A : "La batteria è carica"
  L : "Le luci si accendono"
  R : "L'autoradio funziona"
  M: "Il motorino d'avviamento gira"
  G : "Il motorino d'avviamento è guasto"
  P : "Il motore parte"

- Assiomi della Teoria K

  AxK_1: $\neg A \rightarrow (\neg L \wedge \neg R \wedge \neg M)$

  AxK_2: $G \rightarrow \neg M$

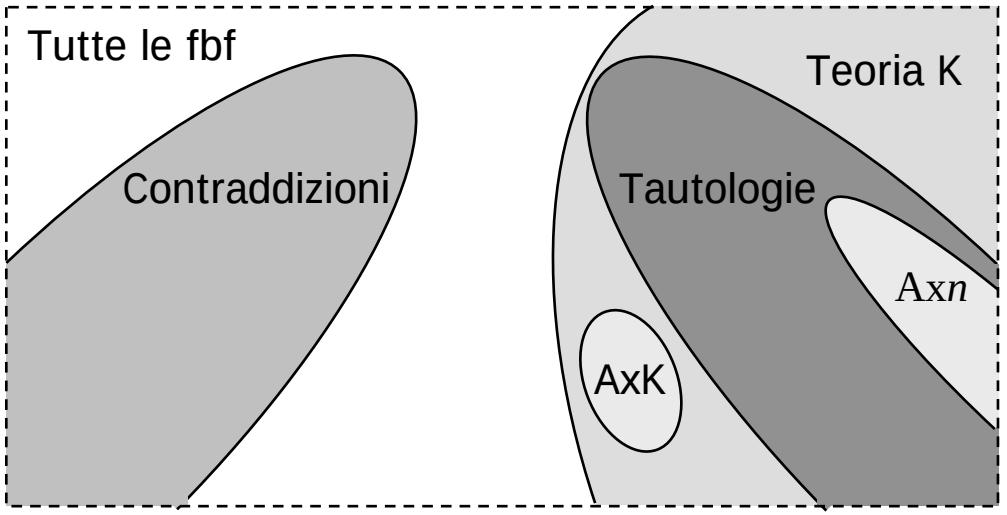
  AxK_3: $\neg M \rightarrow \neg P$

- Esempi di derivazione

  $\neg A \vdash \neg P$ applicando AxK_1 e AxK_3
  $G \vdash \neg P$ applicando AxK_2 e AxK_3

LP – Tautologie e teorie specifiche

- La Teoria K è definita dagli assiomi AxK
  - coincide con l'insieme di fbf derivabili da AxK
  - l'assiomatizzazione è finita, la teoria no
- La Teoria K include $\mathrm{Ax}n$ e tutte le tautologie (o fbf valide)
  - si rammenti la definizione di derivazione
  - non può contenere contraddizioni
    - altrimenti include *tutte* le fbf
- Tutte le teorie specifiche si comportano come K



LP – Decidibilità e derivazione

- Un sistema logico è detto *decidibile* se esiste un algoritmo di validità generale per stabilire se
  $$\Gamma \models \varphi$$
- In LP ciò equivale a dire (per la completezza)
  $$\Gamma \vdash \varphi$$
- La logica proposizionale è senz'altro decidibile
  - alla peggio, si provano tutte le 2^n possibili interpretazioni per stabilire se $\Gamma \models \varphi$
- Il procedimento di *derivazione* non è un algoritmo deterministico
  - ad ogni passo occorre scegliere 'la mossa giusta'
    - quale formula o quale assioma introdurre, derivare per *MP*
  - si tratta di una tecnica per la derivazione manuale

LP – Forme normali (1)

- **Forma normale congiuntiva** (FNC)
  - Una formula in cui il connettivo $\wedge$ appare solo al livello più esterno
    $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ dove le α_i sono fbf in cui si usa solo $\vee$ e $\neg$ ed il $\neg$ compare solo davanti alle lettere
  - Esempio:
    $(A \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee \neg D \vee A) \wedge D$
    A, $\neg B$, $\neg D$, D, ... sono detti *letterali*
  - Qualsiasi fbf di LP può essere tradotta in una fbf equivalente in FNC (dimostrazione sul testo)
  - Algoritmo per la traduzione:
    1) Si eliminano $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ in base alle regole di abbreviazione (vedi pag. 5)
    2) Si muove $\neg$ all'interno
       con le "leggi De Morgan": $(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$
       $(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
    3) Si distribuisce $\vee$
       proprietà del connettivo: $((\varphi \wedge \psi) \vee \chi) \leftrightarrow ((\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi))$

LP – Forme normali (2)

- **Forma normale congiuntiva** (FNC)
  - Esempio:
    $A \rightarrow \neg(B \vee C)$
    $\neg A \vee \neg(B \vee C)$ (eliminazione di $\rightarrow$)
    $\neg A \vee (\neg B \wedge \neg C)$ (De Morgan)
    $(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg C)$ (distribuzione di $\wedge$)

- **Forma normale disgiuntiva** (FND)
  - Una formula in cui il connettivo $\vee$ appare solo al livello più esterno
    $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \ldots \vee \alpha_n$ dove le α_i sono fbf in cui si usa solo $\wedge$ e $\neg$ ed il $\neg$ compare solo davanti alle lettere
  - Qualsiasi fbf di LP può essere tradotta in una fbf equivalente in FND

LP – Forma a clausole

- **Forma a clausole** (FC)
  - Un qualunque <u>insieme di fbf</u> Γ in cui
    le fbf sono formate solo da **disgiunzioni di letterali**

    $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \ldots \vee \alpha_n$ dove le α_i sono del tipo A o $\neg A$
  - Esempio:

    $\Gamma = \{A \vee \neg B, \neg C \vee \neg D \vee A, D\}$
    si può scrivere anche $\Gamma = \{\{A, \neg B\}, \{\neg C, \neg D, A\}, \{D\}\}$
  - Qualunque insieme di fbf Γ di LP può essere tradotto in un'equivalente FC
    (dimostrazione sul testo)
  - Algoritmo, a partire da un Γ qualsiasi:
    1) Si traduce ciascuna le fbf di Γ in FNC
       si otterranno fbf del tipo $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \ldots \wedge \beta_n$,
       dove ogni β_i è una disgiunzione di letterali
    2) Si 'spezza' ciascuna fbf in FNC in un insieme di fbf disgiuntive
       da $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \ldots \wedge \beta_n$ si ottiene $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$
    3) L'insieme Γ' (in FC) è l'unione degli insiemi di fbf così ottenute

LP – Inferenza per risoluzione

- Regola di inferenza per **risoluzione**
  - a partire da due formule $\varphi \vee \chi$ e $\neg\chi \vee \psi$ si deriva $\varphi \vee \psi$ *risolvente*
  - sulla base del fatto che $\varphi \vee \chi, \neg\chi \vee \psi \models \varphi \vee \psi$

Si può verificare direttamente

φ	ψ	χ	$\varphi \vee \chi$	$\neg\chi \vee \psi$	$\varphi \vee \psi$
1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	0

- Il *modus ponens* è un caso particolare di *risoluzione*

  $\chi \rightarrow \psi, \chi \vdash \psi$ può essere riscritto come $\chi, \neg\chi \vee \psi \vdash \psi$

LP - Derivazione per risoluzione

- **Derivazione per risoluzione**:
  - Procedimento per stabilire se $\Gamma \vdash \varphi$:
    1) Si traduce Γ in un equivalente Γ' in FC
    2) Si traduce φ in un equivalente Φ in FC
    3) Si applica a Γ' in modo esaustivo la regola di risoluzione *in forma ristretta* (cioè si risolve un letterale alla volta: $\varphi \vee A$, $\neg A \vee \psi \vdash \varphi \vee \psi$)
    4) al termine si ottiene un insieme Σ (di fbf in FC), dove $\Sigma \supseteq \Gamma'$
    5) Se $\Phi \subseteq \Sigma$, allora $\Gamma \vdash \varphi$
- Vantaggi:
  - esiste un'unica operazione di derivazione (la risoluzione)
  - non necessita di *assiomi logici*
- Purtroppo:
  - questo metodo è *corretto* ma non è *completo*
    - non è possibile derivare tutte le conseguenze logiche di un insieme di premesse

LP – Refutazione e risoluzione

- Conseguenza logica e insoddisfacibilità

  $\Gamma \models \varphi$ sse $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ è **insoddisfacibile**

φ	ψ	A	$\varphi \vee A$	$\neg A \vee \psi$	$\neg(\varphi \vee \psi)$
1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

- Una **clausola vuota** è testimone di **insoddisfacibilità** per $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$
  - da $\{\{\neg A\}, \{A\}\}$ si deriva per risoluzione $\{\ \}$ (i.e. una contraddizione)
- **Risoluzione per refutazione**
  - dovendo dimostrare $\Gamma \models \varphi$
  - si parte da $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ tradotte in FC
  - e si cerca di derivare $\{\ \}$ (insoddisfacibilità)

LP – Risoluzione come algoritmo

- Il metodo della risoluzione per refutazione:
  - è corretto
  - è anche completo (si può derivare qualsiasi conseguenza logica)

- Come algoritmo:
  - è sempre terminante (in LP)
  - infatti, dato un generico problema $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$
    a) si deriva la clausola vuota { }
    b) oppure l'algoritmo si arresta quando non sono possibili ulteriori risoluzioni
  - ha una complessità esponenziale $O(2^n)$ dove n è il numero delle *lettere*

LP – Clausole di Horn

- Una **clausola di Horn**
  - è una fbf in cui compaiono solo $\vee$ e $\neg$
  - in cui si ha al massimo un letterale in forma positiva
- Tre tipi di clausole di Horn:
  - singoli letterali (o **fatti**): A, $\neg B$, C
  - implicazioni (o **regole**): $(A \wedge B \wedge ...) \rightarrow C$ cioè $\neg A \vee \neg B \vee ... \vee C$
  - obiettivi o **goal**: $(C \wedge D \wedge ...)$, la cui forma negata è $\neg C \vee \neg D \vee ...$
- Tecnica generale
  - si esprimono le premesse come *fatti* e *regole*
  - si definisce il risultato atteso ("Giorgio è contento"?) come *goal*
  - si applica la tecnica della *risoluzione per refutazione*
- Limitazioni e vantaggi
  - non tutte i problemi LP sono esprimibili come clausole di Horn
    - ma molti problemi pratici lo sono
  - la risoluzione diretta ha complessità lineare O(n)

LP – Metodo a tableau

- Anche detto tableau semantici o a “tableaux”
- E` un metodo basato sulla refutazione:
  - per stabilire che $\Gamma \models \varphi$ si tenta di mostrare che $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ è inconsistente
- Caratteristiche generali:
  - l’insieme $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ viene completamente espanso in forma di *albero*
  - si usano diverse regole di inferenza (9 per LP) per l’espansione
  - ogni nodo dell’albero rappresenta una **congiunzione** di fbf
  - ogni biforcazione rappresenta una disgiunzione
  - un ramo è chiuso non appena si incontra una contraddizione $\{\varphi, \neg\varphi\}$
  - $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ è inconsistente (o insoddisfacibile)
    se tutti i rami dell’albero sono **chiusi**
  - $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ non è inconsistente se almeno un ramo che non si chiude
  - non è necessario che $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ sia espresso in una forma normale

LP – Regole di inferenza per i tableau

- Regole alfa (o di espansione)

(a1) $\neg(\neg\varphi)$ | φ

(a2) $\varphi \wedge \psi$ | φ, ψ

(a3) $\neg(\varphi \vee \psi)$ | $\neg\varphi, \neg\psi$

(a4) $\neg(\varphi \rightarrow \psi)$ | $\varphi, \neg\psi$

- Regole beta (o di biforcazione)

(b1) $\varphi \vee \psi$ → φ | ψ

(b2) $\neg(\varphi \wedge \psi)$ → $\neg\varphi$ | $\neg\psi$

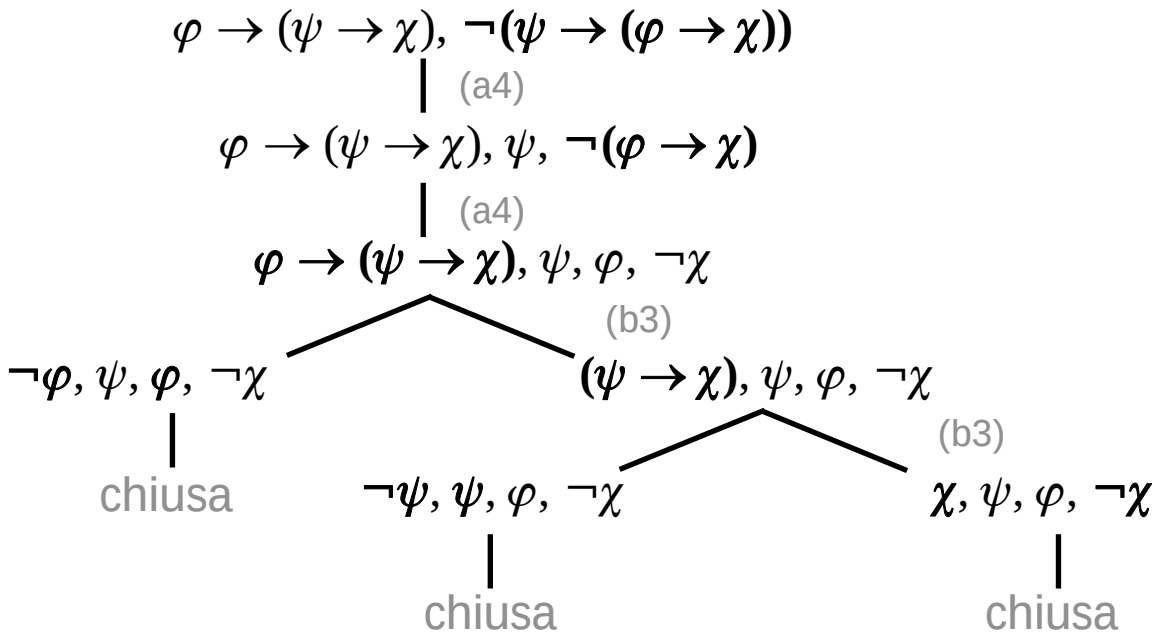
(b3) $\varphi \rightarrow \psi$ → $\neg\varphi$ | ψ

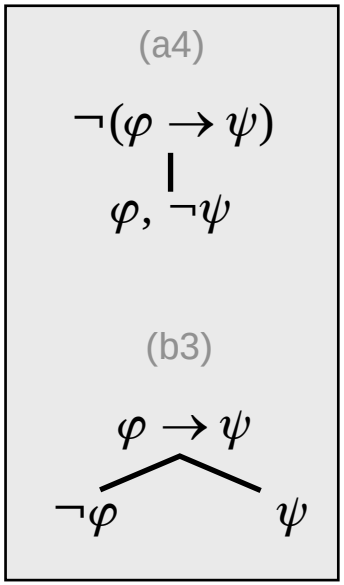
(b4) $\varphi \leftrightarrow \psi$ → $\neg\varphi, \neg\psi$ | φ, ψ

(b5) $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$ → $\neg\varphi, \psi$ | $\varphi, \neg\psi$

LP – Esempio del metodo a tableau

- Obiettivo
  - stabilire che $\varphi \to (\psi \to \chi) \vdash \psi \to (\varphi \to \chi)$
- Espansione





LP – Algoritmo del metodo a tableau

- Procedura per $\Gamma \models \varphi$

  1) Definire il nodo iniziale $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$
  2) Per ogni ramo, in modalità *depth first*
  3) Se il nodo contiene solo letterali,
     allora se il nodo contiene una contraddizione, chiudere
     altrimenti il procedimento è fallito, uscire
  4) Se il nodo contiene formule
     applicare le regole alfa
     applicare le regole beta

- Notare che le regole alfa vengono applicate prima delle regole beta

LP – Caratteristiche del metodo a tableau

- Efficienza
  - anche se la complessità *worst case* è sempre $O(2^n)$
  - l'efficienza del metodo dipende in generale dalla struttura delle fbf, più che dal numero di letterali
  - in molti casi pratici, il metodo a tableau è estremamente efficace
- Leggibilità
  - si applica a fbf in forma qualsiasi
  - non richiede forme normali né assiomi logici
- Generalità
  - modificando opportunamente le regole di inferenza si possono costruire versioni del metodo anche per altre logiche (anche non classiche, come le logiche modali e multivalenti)