

Intelligenza Artificiale

Breve introduzione alla logica classica (Parte 1)

Marco Piastra

Introduzione alla logica formale

Parte 1. Preambolo: algebra di Boole, proposizioni, conseguenza logica

Parte 2. Logica proposizionale

Parte 3. Logica predicativa del primo ordine

Testi consigliati

- Magnani, L., Gennari, R.
Manuale di Logica
Guerini Scientifica, 1997
- Lolli, G.
Introduzione alla logica formale
il Mulino, 1988
- Asperti, A., Ciabattoni, A.
Logica a informatica
McGraw-Hill, 1997
- Crossley et al.
Che cos'è la logica matematica?
Boringhieri, 1972

Parte 1

Preambolo:
algebra di Boole
proposizioni
conseguenza logica

Concetti essenziali nella logica moderna

- **Astrazione**
 - Rappresentazione delle regole *generali* del ragionamento, a prescindere dalle specifiche situazioni in cui queste sono applicate
- **Esattezza**
 - Le regole del ragionamento devono essere definite in modo esatto, affinché la corretta applicazione possa essere verificata in modo oggettivo
- **Formalismo simbolico**
 - Adozione di un formalismo rappresentativo rigoroso basato su *simboli* e *formule*, composte secondo regole prestabilite
- **Estensionalità**
 - Ai *simboli* ed alle *formule* viene attribuito un significato quantitativo, in relazione a strutture di valori ben definite
 - Opposto, in questo caso, di *intensionalità*: un significato definito in modo qualitativo o puramente descrittivo

Algebra di Boole

- Algebra
 - Un insieme di elementi, che chiamiamo V , su cui sono definite delle *operazioni* che soddisfano determinate condizioni.
- Un'algebra di Boole è formata da:
 - Due operazioni binarie \vee e \wedge :

	$(\forall x, y, z \in V)$
• commutatività: $x \vee y = y \vee x$	$x \wedge y = y \wedge x$
• associatività: $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
• assorbimento: $x \vee (x \wedge y) = x$	$x \wedge (x \vee y) = x$
 - elementi identità \perp e \top :

$x \vee \perp = x$
$x \wedge \top = x$
 - Un'operazione unaria \neg tale per cui:

$x \vee \neg x = \top$
$x \wedge \neg x = \perp$

Bivalenza: proposizioni e connettivi

- L'insieme V è costituito dai 'valori di verità'

$$V = \{0, 1\} = \{\text{FALSO}, \text{VERO}\}$$

- Le operazioni binarie sono OR (\vee) e AND (\wedge)

x	y	$x \vee y$
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

x	y	$x \wedge y$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

Le tavole di verità

- L'operazione unaria è il NOT (\neg)

x	$\neg x$
1	0
0	1

Linguaggio: formule e significato

- Elementi di base dell'algebra delle proposizioni:
 - un insieme di **proposizioni atomiche** $P = \{a, b, c, d, \dots\}$
 - a ciascuna proposizione atomica viene attribuito un **significato**, inteso come **valore di verità**:

$$v : P \rightarrow V \quad \text{cioè} \quad v : P \rightarrow \{0, 1\}$$
- Le **formule** sono espressioni costruite per composizione di proposizioni, connettivi e parentesi
 $(a \vee b) \wedge c$
- Il **significato** delle **formule composite** viene determinato componendo algebricamente il significato delle proposizioni atomiche

vero-funzionalità

A	B	$A \vee B$
$v(A) = 1$	$v(B) = 1$	$v(A \vee B) = 1$
$v(A) = 0$	$v(B) = 1$	$v(A \vee B) = 1$
$v(A) = 1$	$v(B) = 0$	$v(A \vee B) = 1$
$v(A) = 0$	$v(B) = 0$	$v(A \vee B) = 0$

$(\forall A, B, C \in P)$

Per ogni formula di n proposizioni
si hanno 2^n combinazioni possibili

Interpretazioni e soddisfacimento

- Esempio:

$$\varphi: (a \vee b) \wedge c$$

- (“Giorgio è umano” OR “Silvia è madre di Giorgio”) AND “Giorgio è un bipede senza piume”

a	b	c	$a \vee b$	$(a \vee b) \wedge c$
1	1	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	0	1	0	0
1	1	0	1	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
0	0	0	0	0

- Un'interpretazione v è una assegnazione di significato a tutte le proposizioni atomiche nell'ambito discorsivo P
- Una interpretazione **soddisfa** una formula φ sse $v(\varphi) = 1$

Tautologie e contraddizioni

- Una **tautologia** è una formula φ tale per cui $v(\varphi) = 1$ per qualsiasi interpretazione v
 - Esempio: $(\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee A)$

A	B	$\neg A \vee B$	$\neg B \vee A$	$(\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee A)$
1	1	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
0	0	1	0	1

- Una **contraddizione** è una formula φ tale per cui $v(\varphi) = 0$ per qualsiasi interpretazione v
 - Esempio: $(A \wedge \neg A)$

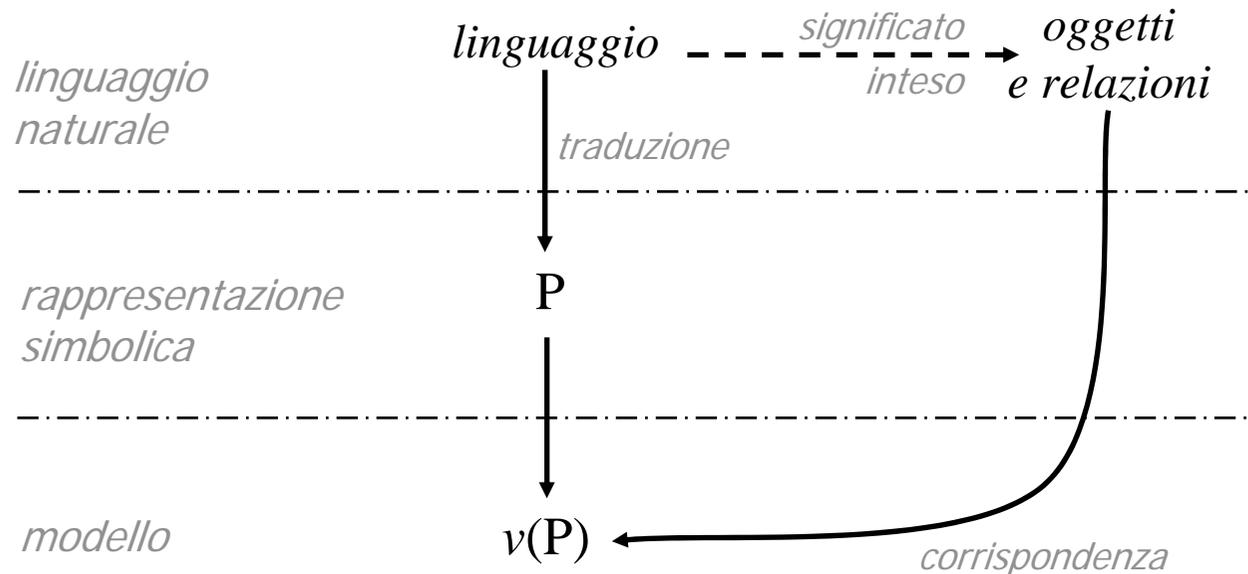
A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
1	0	0
0	1	0

Algebra delle proposizioni

- L'**algebra delle proposizioni** è definita su un insieme di proposizioni atomiche $P = \{a, b, c, d, \dots\}$
 - sono 'atomiche' in quanto non consideriamo la struttura interna ma solo il valore di verità
- Gli operatori sono: \wedge (AND), \vee (OR), \neg (NOT)
- Gli elementi identità sono: \top (**tautologia**), \perp (**contraddizione**)
- L'insieme dei valori di verità $V = \{0, 1\}$
- La semantica degli operatori è definita in funzione delle **interpretazioni** $v : P \rightarrow V$
- L'algebra delle proposizioni **interpretate** è un'algebra di Boole
- Il valore delle formule composite può essere determinato a partire dalla interpretazione delle affermazioni atomiche

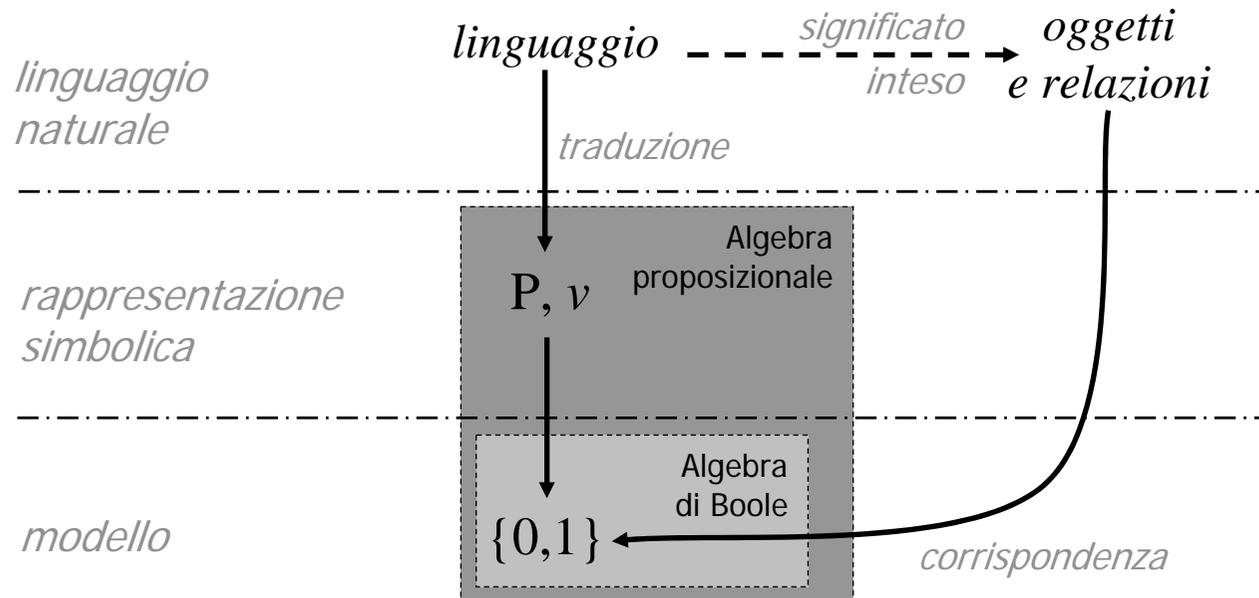
Tutto qui?
Ed il **ragionamento**?

Rappresentazione



- La logica moderna si pone il compito di rappresentare in modo formale la corrispondenza tra *espressioni linguistiche* e *significato inteso*
- La *formalizzazione* è una specie di compressione informativa, con ampia perdita di dettagli (*sfumature*) e guadagno di precisione

Rappresentazione: algebra proposizionale



- L'algebra di Boole (a due valori) definisce operazioni su un insieme di valori semantici
- L'algebra proposizionale stabilisce una corrispondenza (biunivoca) tra formule di un linguaggio ed espressioni algebriche

Quale linguaggio (naturale)

- Il processo di traduzione (formalizzazione, astrazione) dal linguaggio naturale alla rappresentazione proposizionale deve seguire delle regole
- Non tutte le espressioni linguistiche sono 'buone candidate' per questa traduzione
- Nel caso dell'algebra proposizionale, solo le **proposizioni** possono essere rappresentate in P
 - *Frase affermative, di valore compiuto*
 - *Di cui si possa dire esser vere o false*
- La traduzione sacrifica informazione
 - *Ciascuna proposizione è considerata 'atomica', cioè indivisibile*
 - *Il significato dei connettivi è solo quello inteso*
- La rappresentazione non è esente da guai (paradossi)
 - 'Questa proposizione è falsa'

Relazione tra formule

- Premesse:

$$\varphi_1: \neg(a \wedge \neg b) \vee c$$

NOT ("Giorgio è umano" AND NOT "Silvia è madre di Giorgio")
OR "Giorgio è un bipede senza piume"

$$\varphi_2: \neg c \vee b \vee d$$

NOT "Giorgio è un bipede senza piume" OR "Silvia è madre di Giorgio"
OR "Giorgio è contento"

$$\varphi_3: d \vee a$$

"Giorgio è contento" OR "Giorgio è umano"

$$\varphi_4: \neg b$$

NOT "Silvia è madre di Giorgio"

- Affermazione:

$$\psi: d$$

"Giorgio è contento"

Qual'è il **legame logico**
tra le premesse?

E tra le premesse
e l'affermazione finale?

Conseguenza logica

- Eseguendo il calcolo diretto:

$$\varphi_1: \neg(a \wedge \neg b) \vee c$$

$$\varphi_2: \neg c \vee b \vee d$$

$$\varphi_3: d \vee a$$

$$\varphi_4: \neg b$$

$$\psi: d$$

a	b	c	d	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	ψ
1	1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	1	1	0	1	0

- Tutte le interpretazioni ν che soddisfano $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ soddisfano anche ψ

Attenti alla notazione!

- Relazione di **conseguenza logica** : $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models \psi$

Due altri connettivi, derivati

- Implicazione \rightarrow ed equivalenza \leftrightarrow

A	B	$A \rightarrow B$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

E' la stessa di $(\neg A \vee B)$
Si legge anche "A implica B"

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	1

E' la stessa di $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$
Si legge anche "A equivale a B"

- Il problema di prima potrebbe essere riscritto così:

$$\varphi_1: (a \wedge \neg b) \rightarrow c$$

$$\varphi_2: c \rightarrow (b \vee d) \quad \text{Regole}$$

$$\varphi_3: \neg d \rightarrow a$$

$$\varphi_4: \neg b$$

$$\psi: d \quad \text{Fatti}$$

Conseguenza logica e ragionamento

- La **conseguenza logica** è una *relazione* tra *formule*
(o insiemi di formule)
- In generale, in logica si studia la relazione tra le formule di un *sistema logico-simbolico* in cui:
 - il *linguaggio* delle formule è definito con precisione
 - il *significato* delle formule è stabilito in modo non ambiguo
- Le relazioni studiate riguardano la *struttura* dei ragionamenti e non il '*senso*' comune delle formule nell'ambito discorsivo di riferimento (logica *formale*)
- Quindi, il significato delle formule viene stabilito in riferimento ad una struttura astratta (p. es. $\{0, 1\}$) e non ad una situazione effettiva (p.es. Giorgio e Silvia, bipedi)

Obiettivi

- Rappresentazione esatta della conoscenza
 - dato che in un *sistema logico-simbolico* :
 - il linguaggio è definito con precisione
 - la semantica è chiara e non ambigua
 - la relazione tra le formule descrive il legame logico
 - possiamo distinguere i *ragionamenti* corretti da quelli fallaci
 - (ammesso di riuscire a formalizzarli)
- Tecniche di calcolo
 - il calcolo diretto della relazione di conseguenza tramite le tavole è scomodo (e non è sempre possibile)
 - occorre trovare tecniche più comode e pratiche
- Automatizzazione
 - se poi queste tecniche di calcolo sono deterministiche (cioè non richiedono particolare ingegno)
 - si può pensare di far 'ragionare' le macchine