Andrea Pedrini

Fuzzy Logics 2.0?

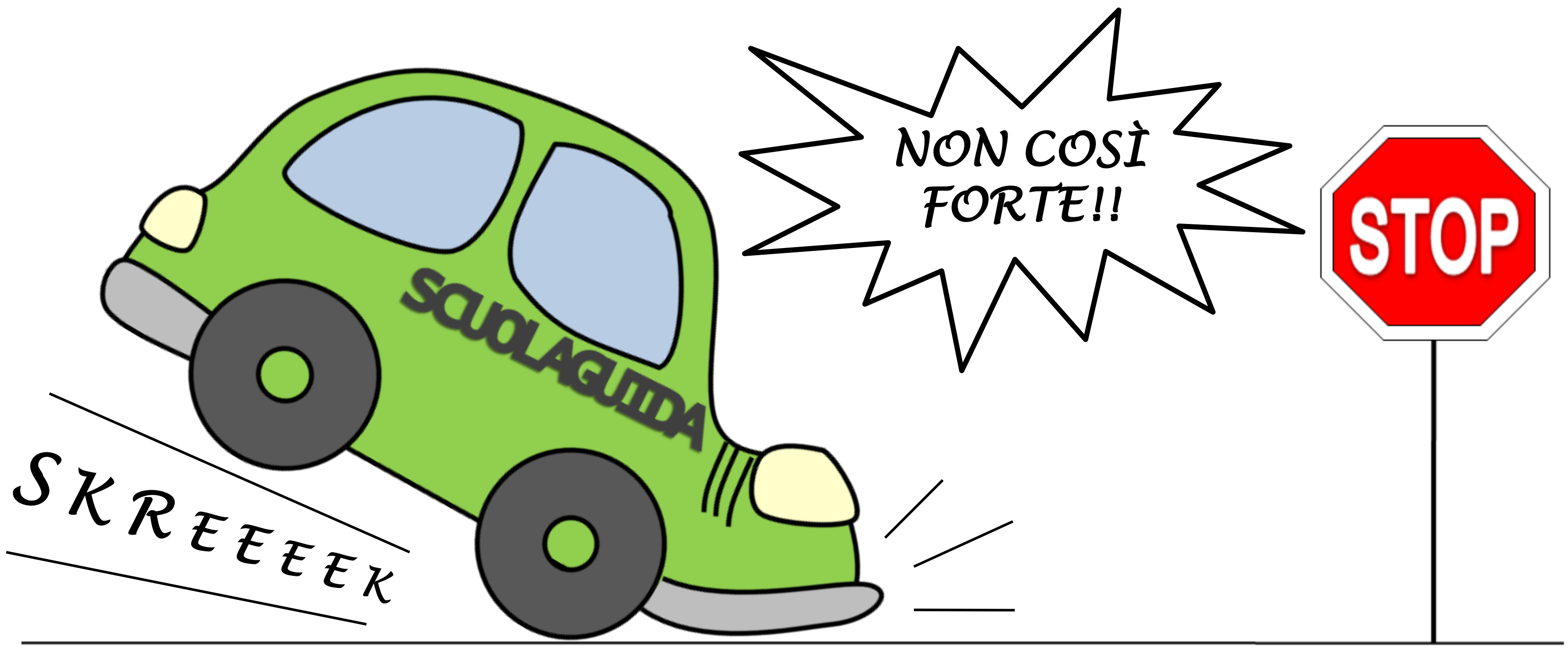
Prima Parte

Fuzzy Logics 1.0

Insiemi fuzzy

- Quanto si deve decelerare per frenare solo *un po'*?

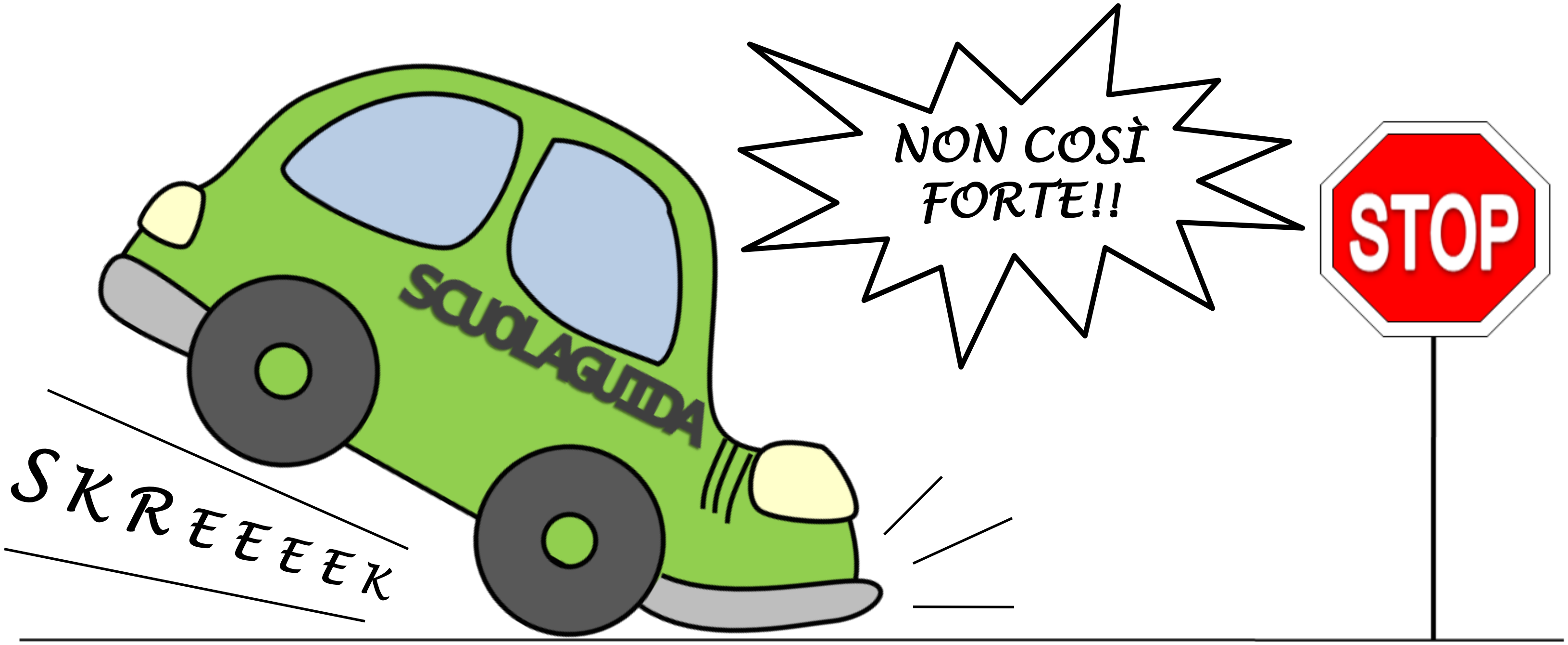
Insiemi fuzzy



- Quanto si deve decelerare per frenare solo *un po'* ?

  …e quanto conoscere il valore numerico preciso della forza mi serve davvero per imparare a guidare?

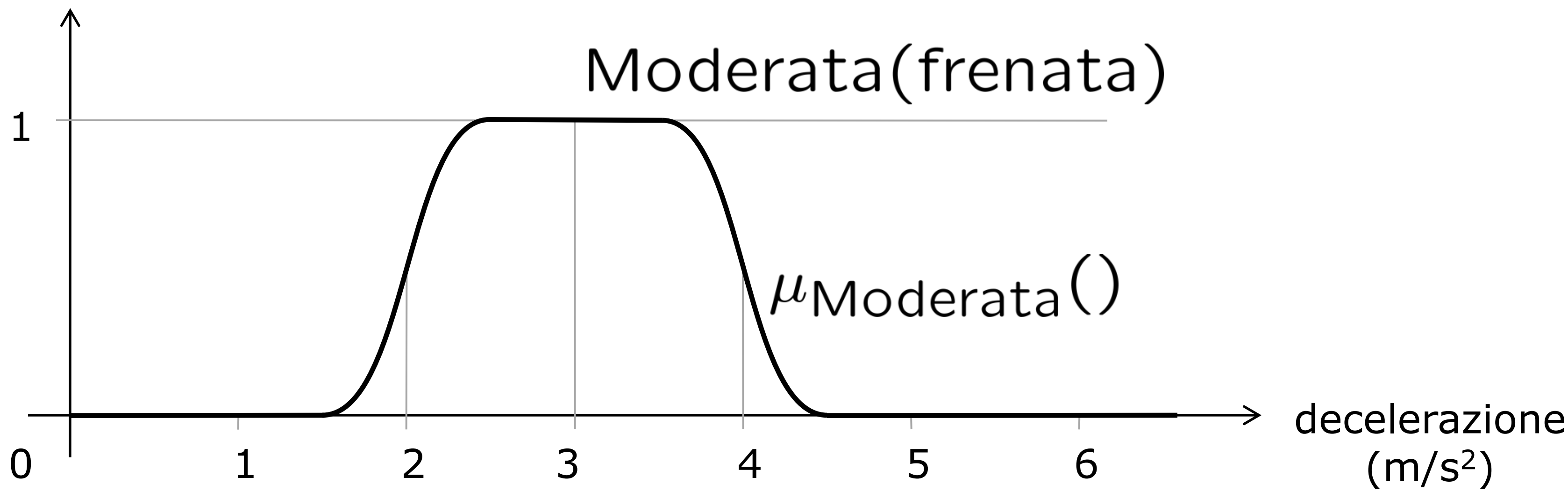
Insiemi fuzzy



- Quanto si deve decelerare per frenare solo *un po'* ?

  Frenando "poco di più" o "poco di meno" il risultato è ancora accettabile?

Insiemi fuzzy



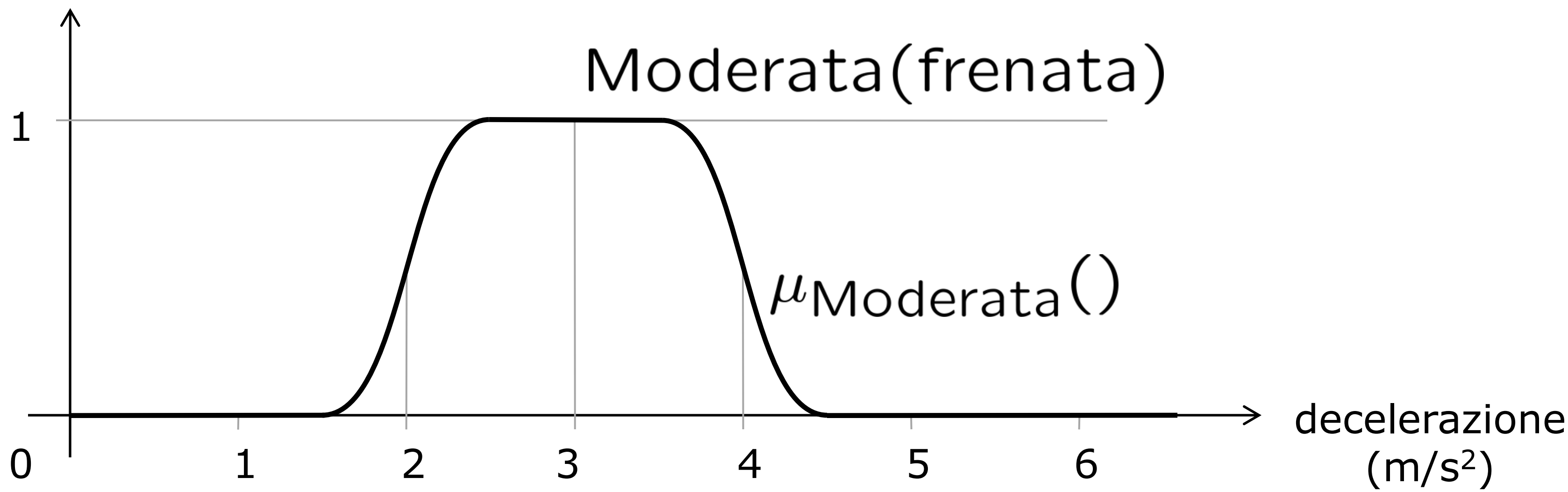
- La funzione caratteristica di un insieme classico è del tipo

$$\mu : \mathbf{U} \rightarrow \{0, 1\}$$

- La funzione caratteristica (detta funzione d'appartenenza) di un insieme fuzzy invece è del tipo

$$\mu : \mathbf{U} \rightarrow [0, 1]$$

Insiemi fuzzy



- Gli insiemi fuzzy hanno molte applicazioni pratiche (dalle lavatrici alle macchine fotografiche)

- La logica fuzzy è la teoria del ragionamento che utilizza gli insiemi fuzzy

Un po' di teoria

- L'universo di un insieme fuzzy è un insieme (classico, non fuzzy) di oggetti

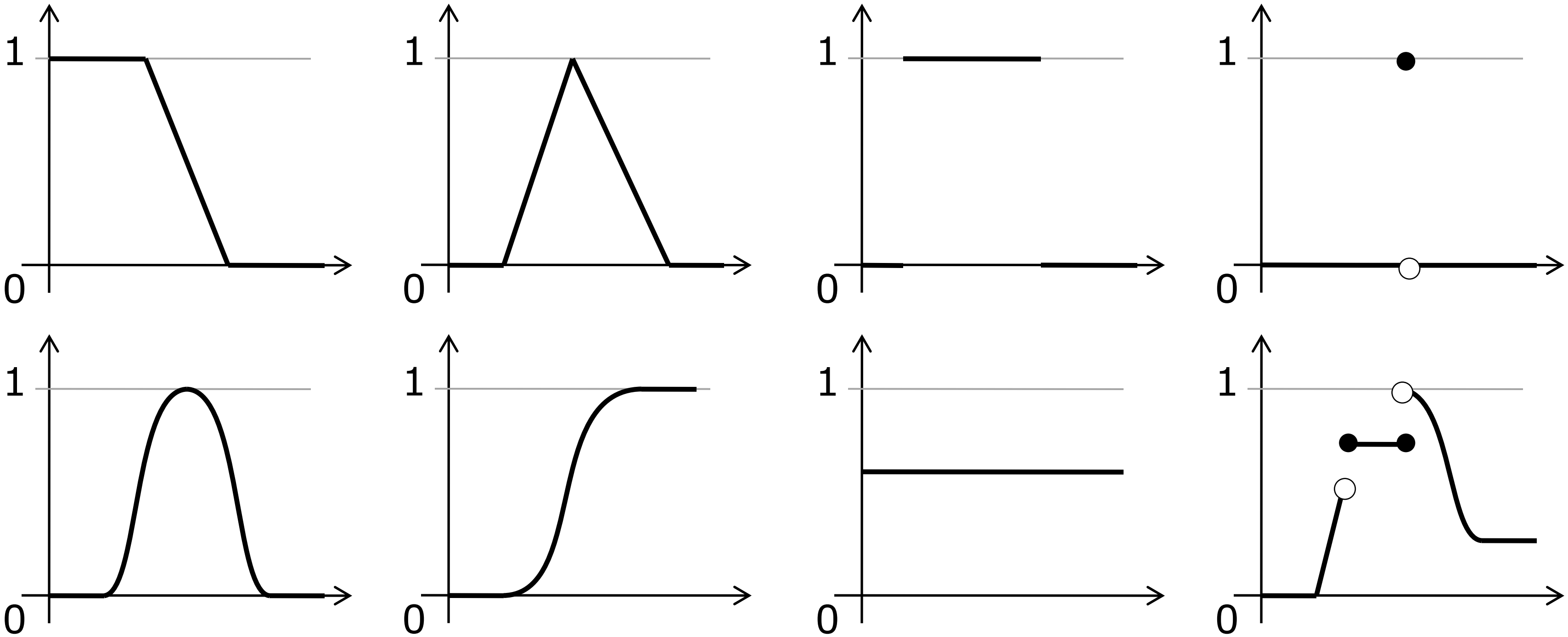
  può anche essere un intervallo di valori

  (ad esempio l'intervallo delle possibili decelerazioni di un'automobile)

- Un insieme fuzzy è descritto da una funzione d'appartenenza a valori nell'intervallo *continuo* [0,1] e definita su un determinato universo del discorso:

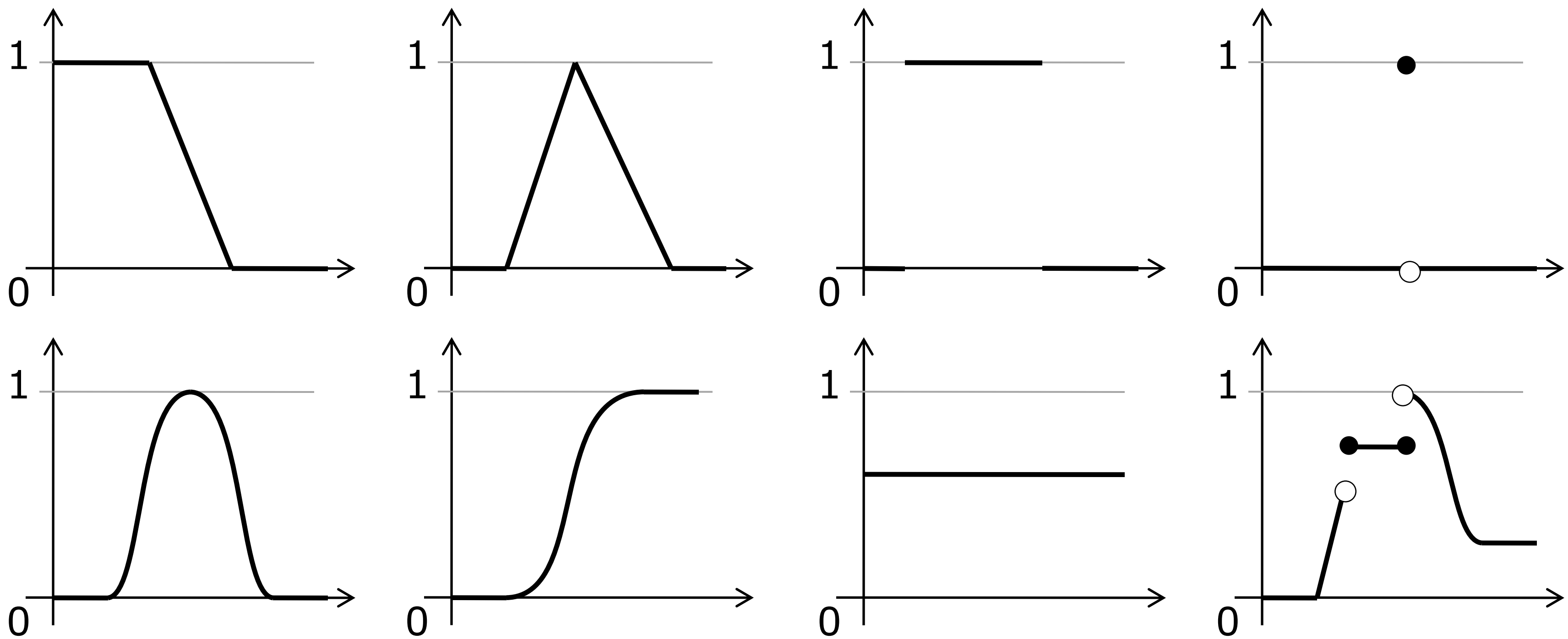
$$< \mathbf{U}, \mu : \mathbf{U} \rightarrow [0,1] >$$

Esempi di funzioni d'appartenenza



- Gli insiemi fuzzy estendono il concetto di insieme classico
    - anche le funzioni caratteristiche classiche sono funzioni d'appartenenza

Esempi di funzioni d’appartenenza

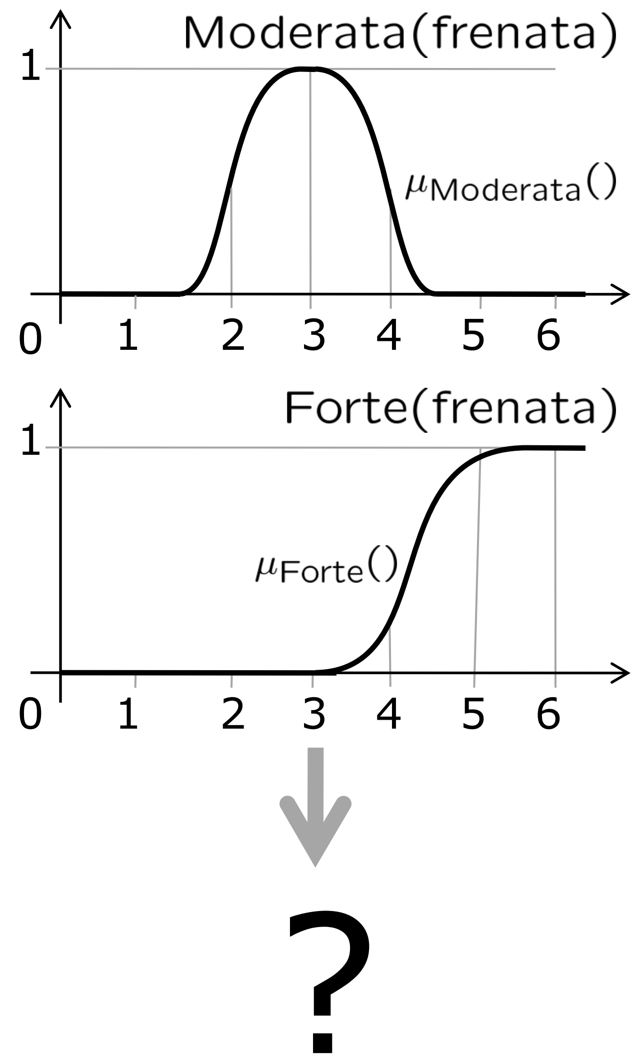


- *Attenzione:* anche se sono a valori in [0,1] le funzioni d’appartenenza ***non*** sono distribuzioni di probabilità
  (ad esempio: non sommano a 1)

Operatori fuzzy

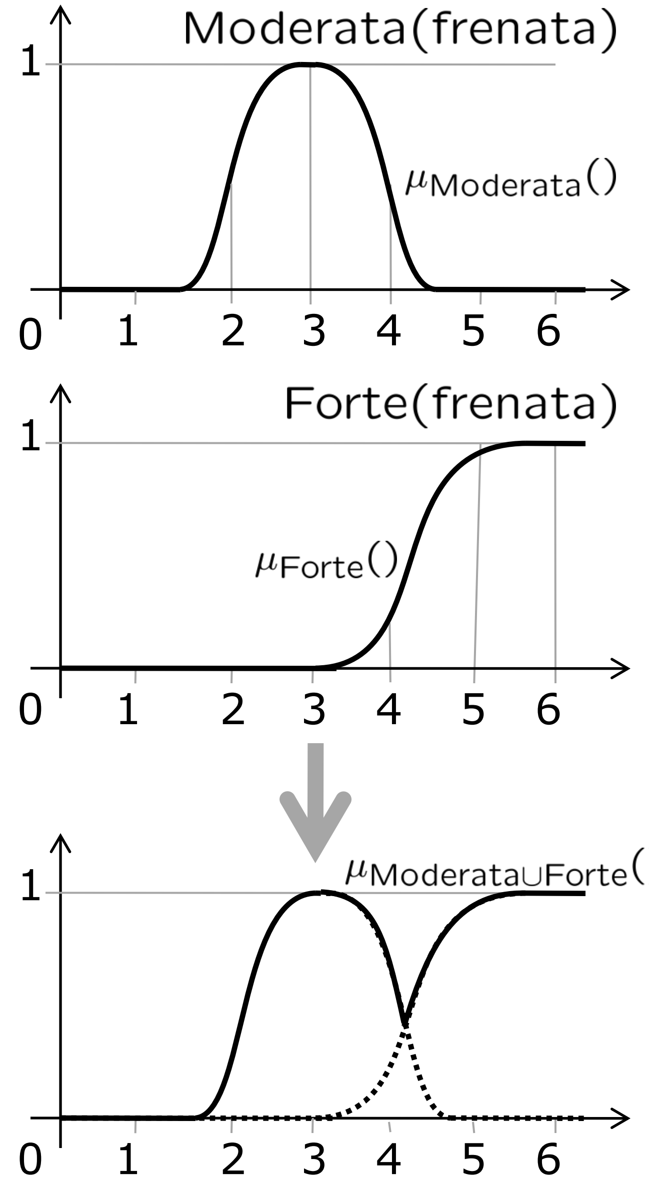
- Come si possono combinare tra loro gli insiemi fuzzy?

    cos'è una frenata *moderata o forte*?



Operatori fuzzy

- Come si possono combinare tra loro gli insiemi fuzzy?
  - cos'è una frenata *moderata o forte*?
- Si definiscono gli operatori insiemistici fuzzy
  - estendono gli operatori classici
    - (per i due valori di appartenenza 0 e 1 si comportano classicamente)
  - si richiede che godano di alcune "ragionevoli" proprietà



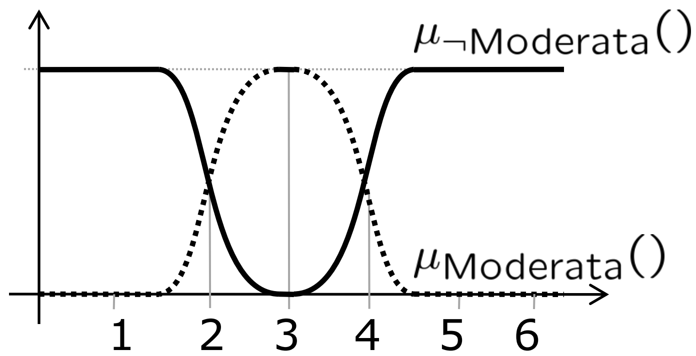
Operatori fuzzy: complemento

- Complemento (NOT)
  - bordi: N(0) = 1, N(1) = 0
  - non crescenza: $a \geq b \Rightarrow N(a) \leq N(b)$

- *Esempi:*

$$\mu_{\neg A}() = 1 - \mu_A()$$

$$\mu_{\neg A}() = 1 - \mu_A()^2$$



Operatori fuzzy: intersezione

- Intersezione (AND) – norma (t-norm)
  - bordi: $T(a,0) = 0$, $T(a,1) = a$
  - commutatività: $T(a,b) = T(b,a)$
  - associatività: $T(T(a,b),c) = T(a,T(b,c))$
  - non decrescenza: $a \geq b \Rightarrow T(a,c) \geq T(b,c)$

- *Esempi:*

$$\mu_{A \cap B}() = \min(\mu_A(), \mu_B())$$

$$\mu_{A \cap B}() = \mu_A() \cdot \mu_B()$$

$$\mu_{A \cap B}() = \max(\mu_A() + \mu_B() - 1, 0)$$

Operatori fuzzy: unione

- Unione (OR) – conorma (t-conorm)
  - bordi: S(a,0) = a, S(a,1) = 1
  - commutatività: S(a,b) = S(b,a)
  - associatività: S(S(a,b),c) = S(a,S(b,c))
  - non decrescenza: $a \geq b \Rightarrow S(a,c) \geq S(b,c)$

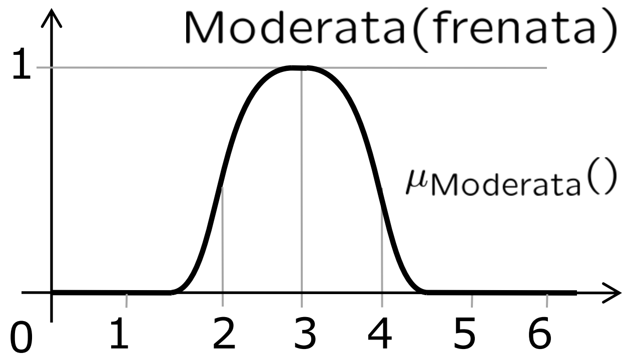
- *Esempi:*

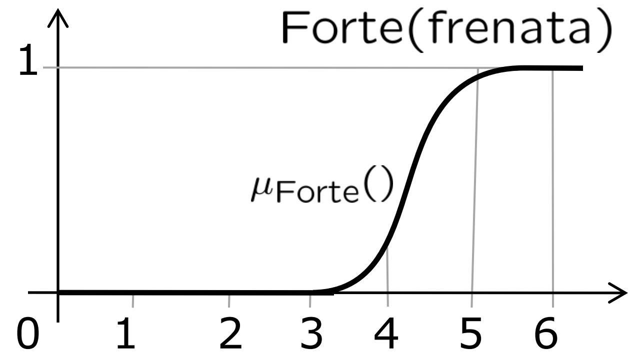
$$\mu_{A \cup B}() = \max(\mu_A(), \mu_B())$$

$$\mu_{A \cup B}() = \mu_A() + \mu_B() - \mu_A() \cdot \mu_B()$$

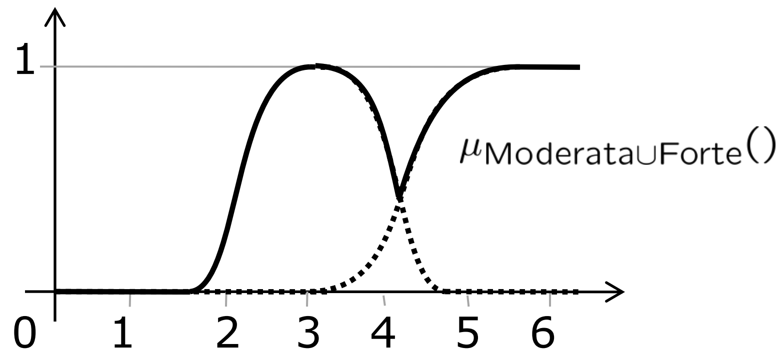
$$\mu_{A \cap B}() = \max(\mu_A() + \mu_B(), 1)$$

Operatori fuzzy





unione con il max



Logiche fuzzy 1.0

- Anche nel caso fuzzy valgono le corrispondenze
  - complemento ↔ negazione
  - intersezione ↔ congiunzione
  - unione ↔ disgiunzione
  - grado di appartenenza ↔ valore di verità

- I sistemi formali che corrispondono al ragionamento con gli insiemi fuzzy si chiamano logiche fuzzy

  ce n'è una per ogni scelta di negazione, congiunzione e disgiunzione

  sono verofunzionali

  (i valori di verità delle formule complesse sono univocamente determinabili a partire dai soli valori di verità delle formule elementari che le costituiscono)

Seconda Parte

Fuzzy Logics 2.0

Intuizione?

- Le logiche fuzzy (e tutte le logiche in generale) vogliono *formalizzare* il ragionamento in modo *intuitivo*
  - Ma quale intuizione fa preferire una certa disgiunzione ad un'altra?
  - E le proprietà dei connettivi sono quelle "giuste"? (Sono necessarie? Sono sufficienti?)
  - Perché ad ogni passo ci si deve fermare a inventare nuovi concetti e nuove proprietà? (*Esiste una struttura esterna più compatta che regoli contemporaneamente tutti gli oggetti coinvolti nel ragionamento?*)

- Potrebbe essere utile un *nuovo punto di vista* che
  - migliori le proprietà formali
  - preservi l'intuizione

Fuzzy Logics 2.0

- Si cerca di costruire una struttura formale più generale all'interno della quale insiemi e operatori fuzzy emergano in modo "naturale" (rispettando l'intuizione)

- Gli ingredienti necessari sono teorie già note:
  - la logica modale
  - la probabilità

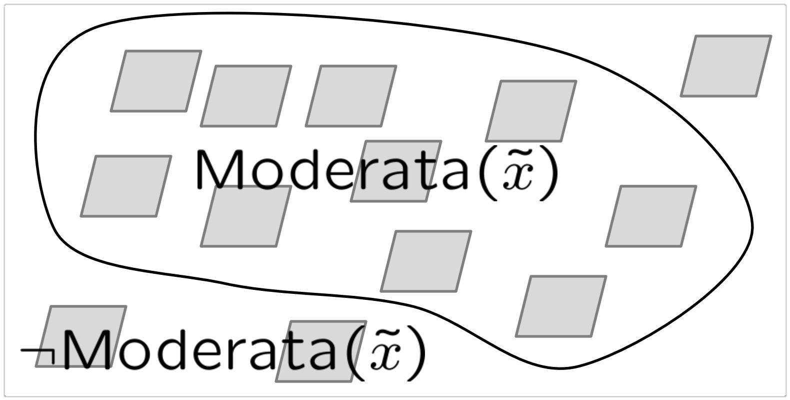
Fuzzy Logics 2.0: l'idea

- Si sceglie una particolare frenata $\tilde{x}$ all'interno dell'universo delle frenate (ad esempio quella corrispondente alla decelerazione di 2,2 m/s²)
- Si considera un insieme di mondi possibili
  - in ciascuno di essi i soli valori di verità sono *V* e *F*
  - ciascuno di essi può soddisfare o meno la formula
    - $\text{Moderata}(\tilde{x})$ = *"la frenata $\tilde{x}$ è moderata"*
- Si costruisce una probabilità π sui mondi possibili
  - si misura $W_{\text{Moderata}(\tilde{x})} = \{w : w \models \text{Moderata}(\tilde{x})\}$
  - (e si ottiene, ad esempio, 0,65)

$$\mu_{\text{Moderata}}(\tilde{x}) := \pi\Big(W_{\text{Moderata}(\tilde{x})}\Big) \quad (= 0{,}65)$$

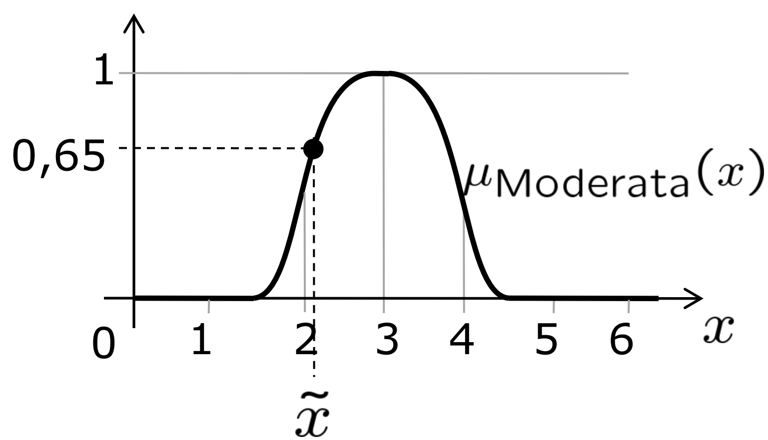
Fuzzy Logics 2.0: l'idea

Mondi possibili



$$\mu_{\mathsf{Moderata}}(\tilde{x}) := \pi\Big(W_{\mathsf{Moderata}(\tilde{x})}\Big) = 0,65$$

- Si fa la stessa cosa per tutte le frenate possibili e si ottiene tutta la funzione d'appartenenza



Nozioni tecniche

l'idea intuitiva deve essere formalizzata
attraverso l'utilizzo di nozioni più tecniche

↓

- Per costruire la struttura formale servono:
  - un linguaggio
    (con il quale parlare degli insiemi fuzzy)
  - una semantica
    (in cui interpretare il linguaggio
    in termini di insiemi fuzzy)

Nozioni tecniche: il linguaggio

- Proprietà del linguaggio:
  - è del primo ordine

    (servono fbf del tipo $\mathrm{Moderata}(x)$, con eventuali quantificazioni)
  - costanti e variabili sono di due tipi:

    (si dice che il linguaggio è two-sorted)

    1) di tipo oggetto
       (per parlare di particolari frenate, persone, pomodori, ...)
    2) di tipo probabilistico
       (per parlare dei valori di probabilità)

Nozioni tecniche: il linguaggio

- Esempi di formule:

$$\mathsf{Moderata}(x)$$

$$\mathsf{Moderata}(\mathsf{questafrenata})$$

$$\forall p\ ((p < 0,5) \to \exists x\ (\mathsf{Donna}(x) \wedge \mathbf{P}_p \mathsf{Bravoguidatore}(x)))$$

$$\forall p \forall q\ \ ((p = q) \to (\forall x(\Box_p \mathsf{A}(x) \to \Box_q \mathsf{B}(x))))$$

Nozioni tecniche: il linguaggio

- Esempi di formule:

variabile oggetto

predicato oggetto $\mathsf{Moderata}(x)$

costante oggetto

$\mathsf{Moderata(questafrenata)}$ parentesi

quantificatore

$$\forall p\ ((p < 0,5) \to \exists x\ (\mathsf{Donna}(x) \wedge \mathbf{P}_p \mathsf{Bravoguidatore}(x)))$$

costante probabilistica

operatore probabilistico

$$\forall p \forall q\ ((p = q) \to (\forall x(\Box_p \mathsf{A}(x) \to \Box_q \mathsf{B}(x))))$$

variabile probabilistica

predicato probabilistico

connettivo

Nozioni tecniche: il linguaggio

- Esempi di formule:

$$\mathsf{Moderata}(x)$$

(x è moderata)

$$\mathsf{Moderata}(\mathsf{questafrenata})$$

(questafrenata è moderata)

$$\forall p\ ((p < 0,5) \to \exists x\ (\mathsf{Donna}(x) \wedge \mathbf{P}_p \mathsf{Bravoguidatore}(x)))$$

(per ogni p<0,5 esiste una donna che è brava a guidare esattamente p)

$$\forall p \forall q\ ((p = q) \to (\forall x(\Box_p \mathsf{A}(x) \to \Box_q \mathsf{B}(x))))$$

(per ogni x, x è B almeno tanto quanto x è A)

Nozioni tecniche: il linguaggio

- Abbreviazioni:

$$\forall p\ ((p < 0,5) \rightarrow \exists x\ (\text{Donna}(x) \wedge \mathbf{P}_p \text{Bravoguidatore}(x)))$$

$$\downarrow$$

$$p < 0,5\ :\ \exists x\ (\text{Donna}(x) \wedge \mathbf{P}_p \text{Bravoguidatore}(x)))$$

$$\forall p \forall q\ ((p = q) \rightarrow (\forall x (\Box_p \text{A}(x) \rightarrow \Box_q \text{B}(x))))$$

$$\downarrow$$

$$p = q\ :\ \forall x (\Box_p \text{A}(x) \rightarrow \Box_q \text{B}(x))$$

regola generale:

$$\underset{\text{degli operatori probabilistici}}{\text{relazioni algebriche sugli indici}} \longrightarrow \lambda\ :\ \psi \longleftarrow \underset{\text{del linguaggio}}{\text{relazioni tra gli oggetti}}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{\forall \tau_{n+1} \ldots \forall \tau_m}_{\text{variabili libere in } \lambda}\ \underbrace{Q_1 \tau_1 \ldots Q_n \tau_n\ (\lambda^*}_{\text{forma normale prenessa di } \lambda} \rightarrow \psi)$$

Nozioni tecniche: la semantica

- Le strutture semantiche che interpretano il linguaggio sono di tipo probabilistico-modale:

$$N = \langle \mathcal{D}, \mathbb{R}, W, \vartheta, \pi \rangle$$

  - $\mathcal{D}$ è il dominio di oggetti cui la logica fa riferimento
  - $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali
  - W è l'insieme dei mondi possibili
  - ϑ è la funzione di interpretazione
  - π è la misura di probabilità sull'insieme dei mondi

Nozioni tecniche: la semantica

- Le strutture semantiche che interpretano il linguaggio sono di tipo probabilistico-modale:

$$N = \langle \mathcal{D}, \mathbb{R}, W, \vartheta, \pi \rangle$$

- L'interpretazione delle formule
  - mantiene rigide le componenti probabilistiche
  - è analoga al caso classico
    (esempio: $(N, w) \models (\neg\varphi)$ sse $(N, w) \not\models \varphi$)
  - regola anche gli operatori probabilistici:

$$(N, w) \models \Box_p \varphi \quad \text{sse} \quad \pi(\{w' \in W \mid (N, w') \models \varphi\}) \geq p$$

$$(N, w) \models \mathbf{P}_p \varphi \quad \text{sse} \quad \pi(\{w' \in W \mid (N, w') \models \varphi\}) = p$$

Come strutturare W?

- In logica modale W è accompagnato da una relazione di accessibilità R sui mondi
  - come scegliere R in questo caso?
  - qual è la logica modale più adatta per trattare gli operatori $\Box_1$ e $\mathbf{P}_1$? (e ottenere un'assiomatizzazione della "certezza probabilistica"?)
- **Teorema:** $\Box_1$ e $\mathbf{P}_1$ si comportano come $\Box$ a patto che R sia una relazione
  - di accessibilità
  - seriale $(\forall w\, \exists v : (w,v) \in R)$
  - transitiva $(\forall u \forall v \forall w\, ((u,v) \in R \wedge (v,w) \in R) \rightarrow (u,w) \in R)$
  - euclidea $(\forall u \forall v \forall w\, ((u,v) \in R \wedge (u,w) \in R) \rightarrow (v,w) \in R)$

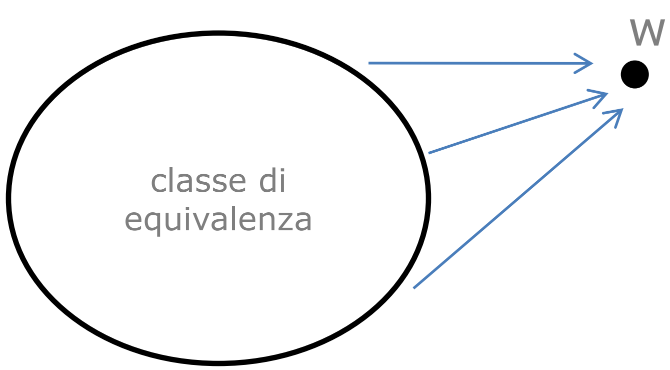
Come strutturare W?

- In logica modale W è accompagnato da una relazione di accessibilità R sui mondi
  - come scegliere R in questo caso?
  - qual è la logica modale più adatta per trattare gli operatori $\Box_1$e $\mathbf{P}_1$? (e ottenere un'assiomatizzazione della "certezza probabilistica"?)
- **<u>Teorema:</u>** $\Box_1$ e $\mathbf{P}_1$ si comportano come $\Box$ a patto che R sia una relazione
  - di accessibilità $\longleftrightarrow$ K) $\Box(\varphi \to \psi)) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$
  - seriale $\longleftrightarrow$ D) $\Box\varphi \to \neg\Box\neg\varphi$
  - transitiva $\longleftrightarrow$ 4) $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$
  - euclidea $\longleftrightarrow$ 5) $\neg\Box\neg\varphi \to \Box\neg\Box\neg\varphi$

Perché proprio KD45?

- K) $\Box(\varphi \to \psi)) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$
  - serve per poter parlare di mondi possibili

- D) $\Box\varphi \to \neg\Box\neg\varphi$ (rel. seriale)
  - serve ad eliminare i mondi “pozzo”

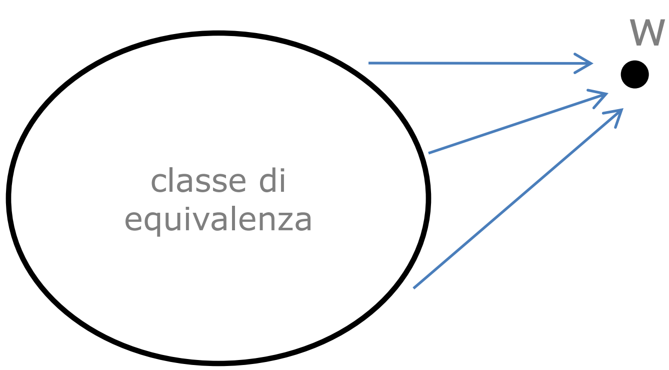


D) non è valido

Perché proprio KD45?

- K) $\Box(\varphi \to \psi)) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$
  - serve per poter parlare di mondi possibili

- D) $\Box\varphi \to \neg\Box\neg\varphi$ (rel. seriale)
  - serve ad eliminare i mondi “pozzo”



D) non è valido

w soddisfa $\Box\varphi$
w soddisfa $\Box\neg\varphi$

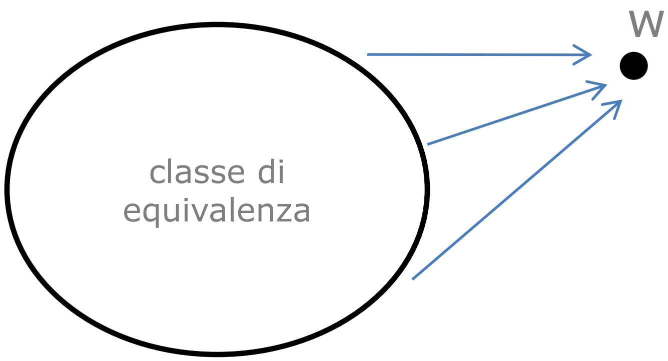
$\downarrow$

$\Box$ non può essere $\mathbf{P}_1$

Perché proprio KD45?

- K) $\Box(\varphi \to \psi)) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$
  - serve per poter parlare di mondi possibili

- D) $\Box\varphi \to \neg\Box\neg\varphi$ (rel. seriale)
  - serve ad eliminare i mondi "pozzo"



D) non è valido

inoltre $\neg\Box\varphi$
non è mai una fbf valida

$\downarrow$

$\neg\Box(A \wedge \neg A)$
non è valida

Perché proprio KD45?

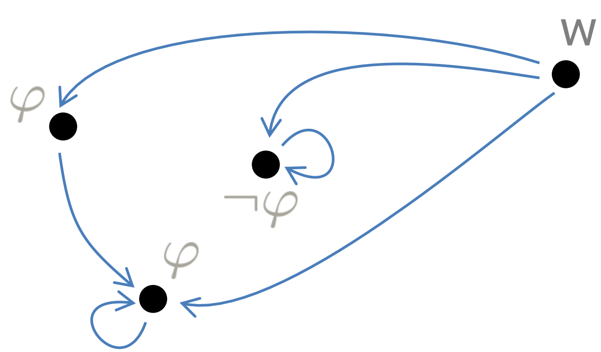
- 4) $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ (rel. transitiva)

  e

- 5) $\neg\Box\neg\varphi \to \Box\neg\Box\neg\varphi$ (rel. euclidea)

  (equivale a $\neg\Box\varphi \to \Box\neg\Box\varphi$)

  - eliminano la probabilità “del secondo ordine”:



5) non è valido

i mondi accessibili da w
non costituiscono
una classe di equivalenza

↓

w soddisfa $\neg\Box\varphi$
w non soddisfa $\Box\neg\Box\varphi$

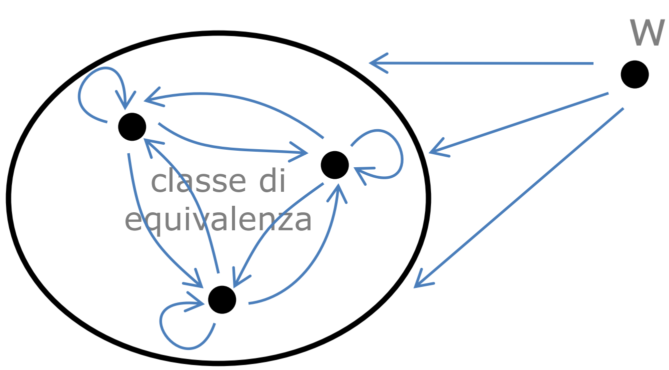
Perché proprio KD45?

- 4) $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ (rel. transitiva)

e

- 5) $\neg\Box\neg\varphi \to \Box\neg\Box\neg\varphi$ (rel. euclidea)
  (equivale a $\neg\Box\varphi \to \Box\neg\Box\varphi$)

  - eliminano la probabilità "del secondo ordine":



5) è valido

con 5)
tutti i mondi accessibili
da un mondo dato
formano
una classe di equivalenza

Perché proprio KD45?

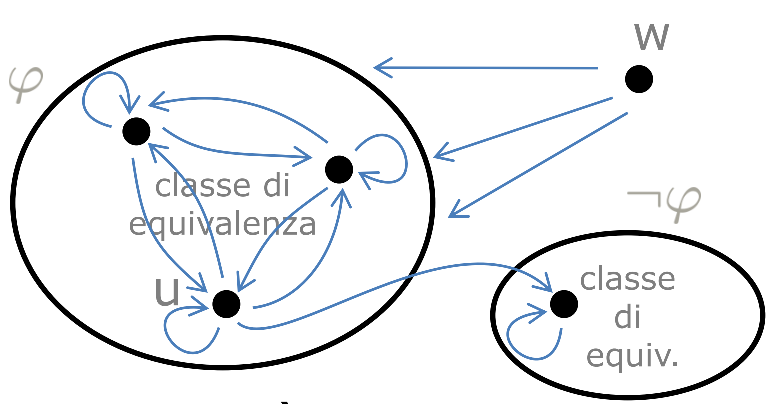
- 4) $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ (rel. transitiva)

  e

  5) $\neg\Box\neg\varphi \to \Box\neg\Box\neg\varphi$ (rel. euclidea)

  (equivale a $\neg\Box\varphi \to \Box\neg\Box\varphi$)

  - eliminano la probabilità "del secondo ordine":



4) non è valido

w e u hanno accesso
a due classi di equivalenza
distinte
↓
w soddisfa $\Box\varphi$
w non soddisfa $\Box\Box\varphi$

Perché proprio KD45?

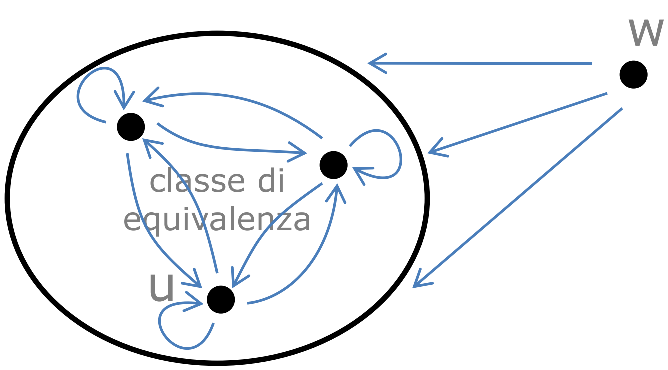
- 4) $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ (rel. transitiva)

  e

  5) $\neg\Box\neg\varphi \to \Box\neg\Box\neg\varphi$ (rel. euclidea)

  (equivale a $\neg\Box\varphi \to \Box\neg\Box\varphi$)

  - eliminano la probabilità del secondo ordine:



4) è valido

con 4)
la classe di accessibilità
è la stessa
per tutti i mondi

Perché proprio KD45?

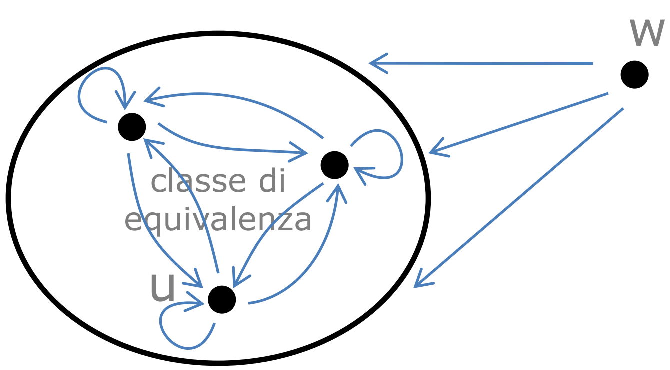
- 4) $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$ (rel. transitiva)

  e

  5) $\neg\Box\neg\varphi \rightarrow \Box\neg\Box\neg\varphi$ (rel. euclidea)

  (equivale a $\neg\Box\varphi \rightarrow \Box\neg\Box\varphi$)

  - eliminano la probabilità del secondo ordine:



4) e 5) sono validi

c'è una sola
classe di equivalenza
ed è l'insieme di accessibilità
di ciascun mondo

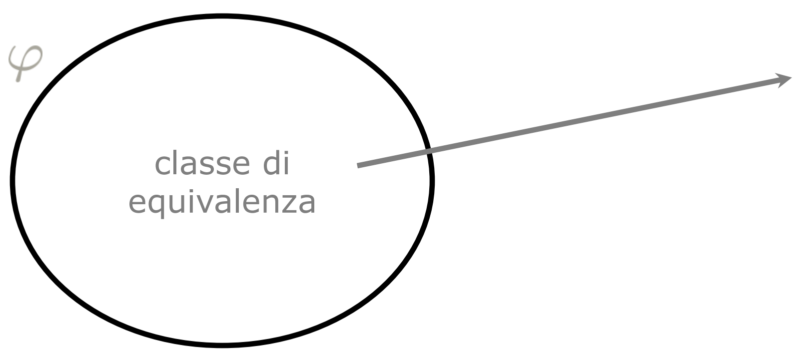
$\Box$ e $\Box\Box$ coincidono

(P_1 e $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_1$ coincidono)

Perché proprio KD45?

- T) $\Box\varphi \rightarrow \varphi$ (rel. riflessiva)
  - sarebbe “troppo”:

non si potrebbe differenziare ciò che è vero da ciò che ha probabilità 1



se φ ha probabilità 1
allora
deve essere vera per forza

T) è valido

Un solo dominio

- Il linguaggio è del primo ordine
    - serve qualcosa che regoli il quantificatore

$\downarrow$

si usano le formule di Barcan:

$$\left.\begin{array}{l}\text{BF)}\ \forall x\,(\Box\varphi) \rightarrow \Box(\forall x\,\varphi) \\ \text{BFI)}\ \Box(\forall x\,\varphi) \rightarrow \forall x\,(\Box\varphi)\end{array}\right\}$$

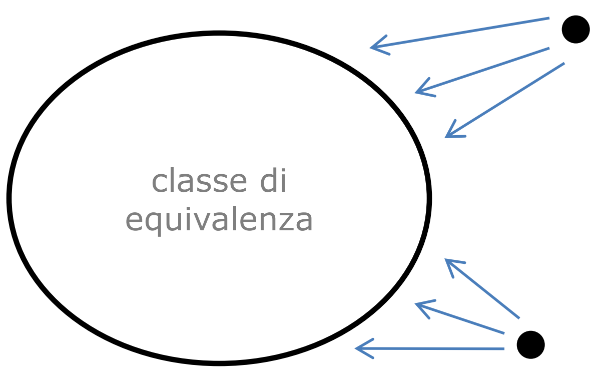
il dominio degli oggetti è lo stesso per tutti i mondi
(i mondi parlano delle medesime frenate)

- KD45 + BF + BFI

$\downarrow$ assiomatizzano

$$\Box = \Box_1 = \mathrm{P}_1$$

(la certezza probabilistica)



Una misura di probabilità su W?

- Una distribuzione di probabilità π va sempre definita su una σ-algebra
  - qual è la σ-algebra in questo caso?
  - è costituita da sottoinsiemi di W, ma quali?
  - di sicuro deve contenere tutti i sottoinsiemi costituiti da quei mondi che soddisfano fbf del tipo Moderata(frenata)

$\downarrow$

è la σ-algebra generata dalle fbf chiuse del linguaggio:

  - per ogni formula chiusa φ si costruisce l'insieme

$$W_\varphi = \{w \in W \mid (N, w) \models \varphi\}$$

  - si prende l'insieme di tutti i W_φ e lo si chiude per complementazione e unione numerabile

Logica modale + Probabilità

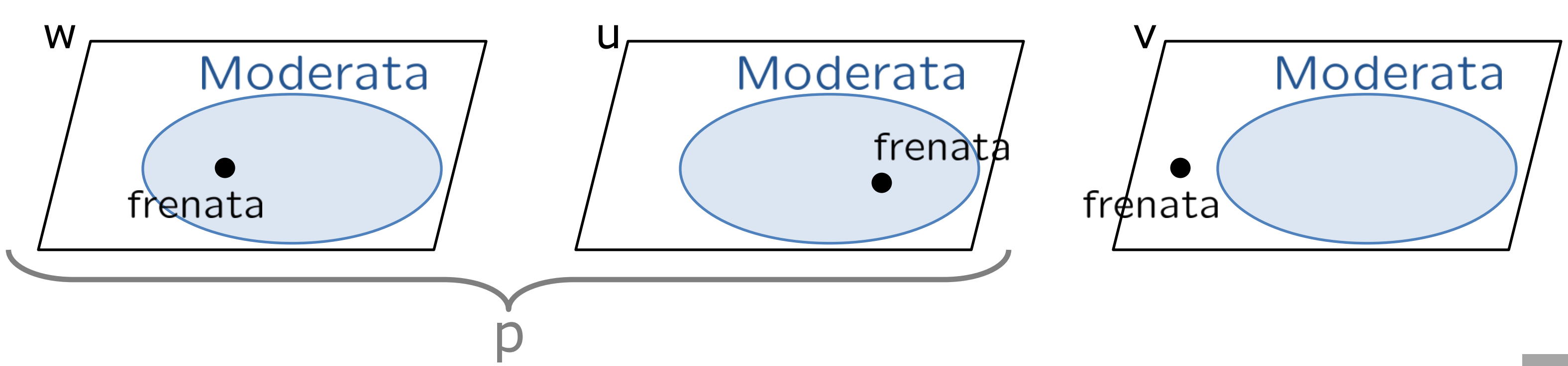
- La struttura costruita finora è una medaglia con due facce:

  1) se da mondo a mondo si tiene rigida l'interpretazione dei predicati e si fa variare quella delle costanti si ottiene la probabilità classica:

il predicato è lo stesso in tutti i mondi

$$\mathbf{P}_p\text{Moderata(frenata)}$$

la costante varia da mondo a mondo



Logica modale + Probabilità

- La struttura costruita finora è una medaglia con due facce:

    1) se da mondo a mondo si tiene
       rigida l'interpretazione dei predicati
       e si fa variare quella delle costanti
       si ottiene la probabilità classica:

il predicato
è lo stesso in
tutti i mondi

$$\mathbf{P}_p\text{Moderata(frenata)}$$

la costante
varia da mondo
a mondo

è come "pescare" a caso una frenata nel dominio e scoprire che la probabilità che sia una frenata moderata è p

Logica modale + Probabilità

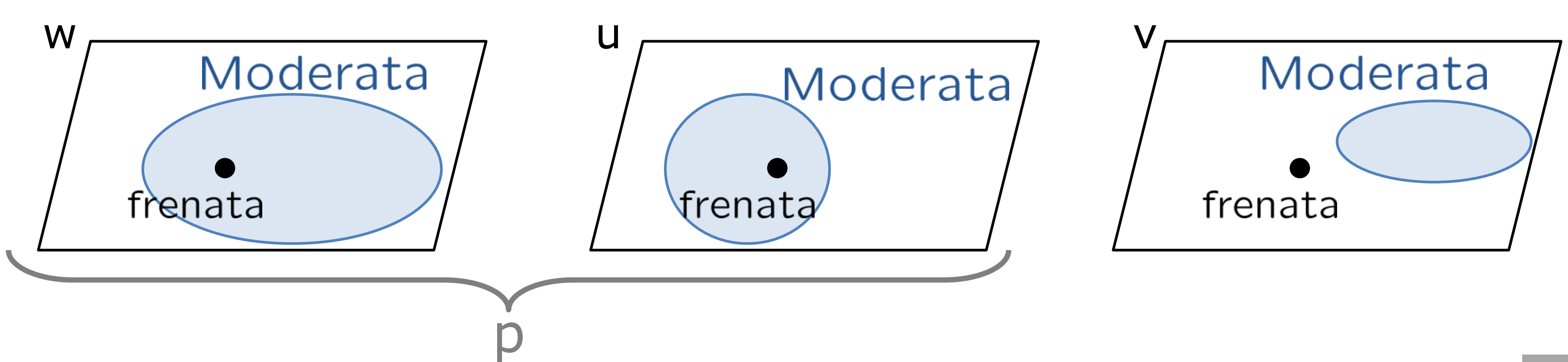
- La struttura costruita finora è una medaglia con due facce:

  2) se da mondo a mondo si tiene
  rigida l'interpretazione delle costanti
  e si fa variare quella dei predicati
  si ottiengono gli insiemi fuzzy:

il predicato varia da mondo a mondo

$$\mathbf{P}_p\mathrm{Moderata(frenata)}$$

la costante è la stessa in tutti i mondi



Logica modale + Probabilità

- La struttura costruita finora è una medaglia con due facce:

  2) se da mondo a mondo si tiene
  rigida l'interpretazione delle costanti
  e si fa variare quella dei predicati
  si ottiengono gli insiemi fuzzy:

il predicato varia da mondo a mondo

$$\mathbf{P}_p\text{Moderata}(\text{frenata})$$

la costante è la stessa in tutti i mondi

in questo caso, p è il valore della funzione d'appartenenza dell'insieme fuzzy Moderata applicato nel punto frenata

Cosa sono gli insiemi fuzzy?

- Sono particolari *fbf aperte* del tipo $\mathsf{Moderata}(x)$
  - Moderata è il precidato che individua l'insieme
  - x varia tra tutte le possibili frenate

$\downarrow$

sono oggetti del linguaggio

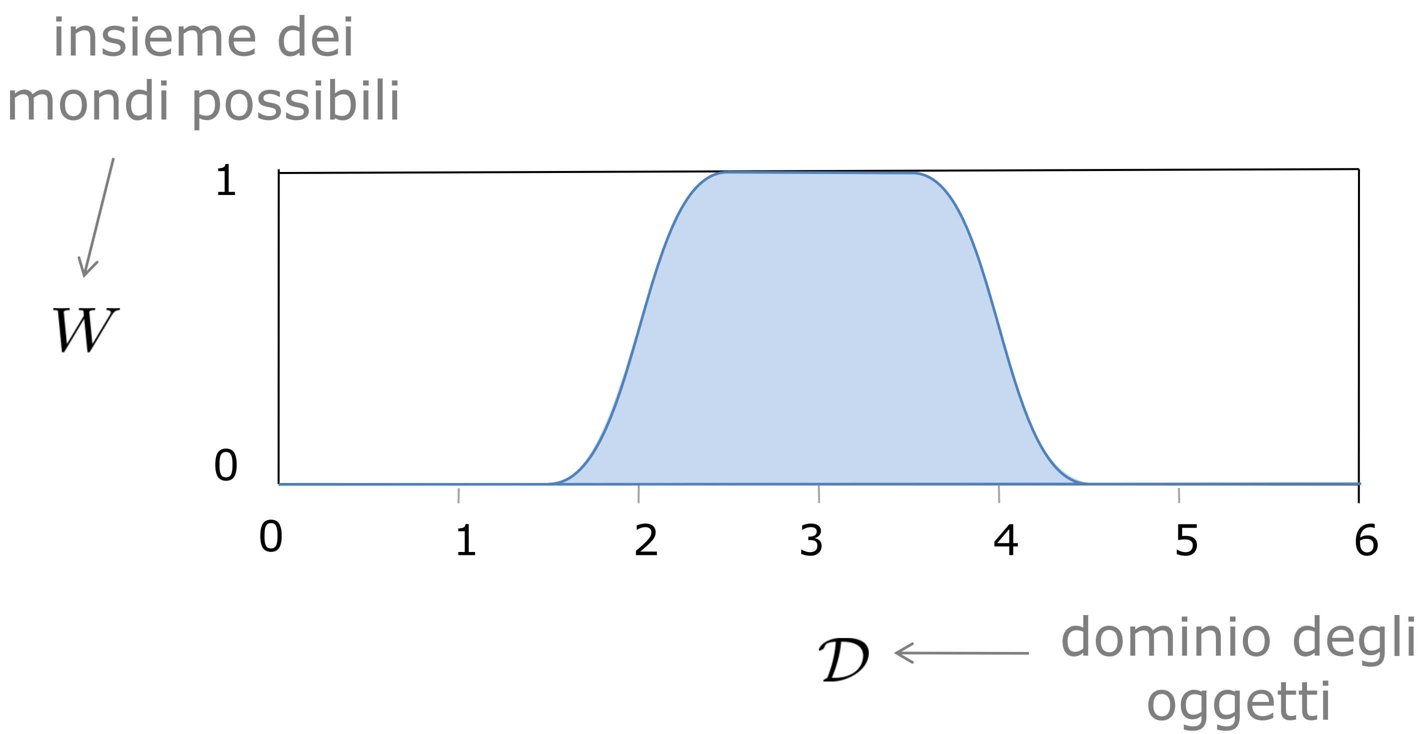
$\downarrow$

emergono "naturalmente" all'interno della costruzione probabilistico-modale

Cosa sono gli insiemi fuzzy?

- Sono particolari *fbf aperte* del tipo $\mathsf{Moderata}(x)$

- Rappresentazione:

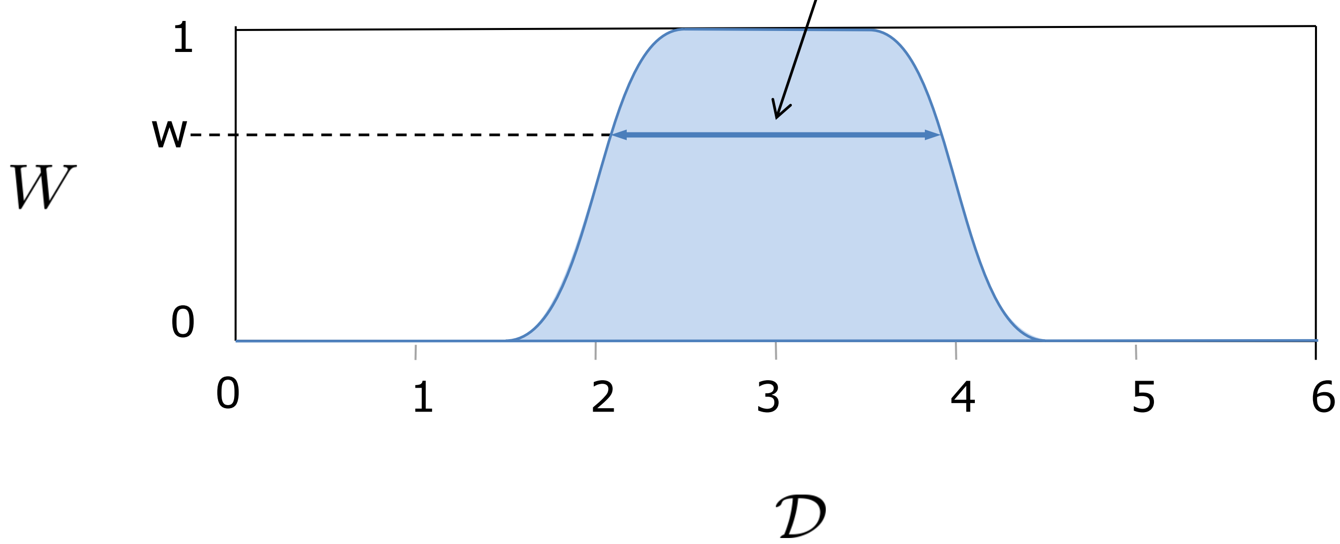


Cosa sono gli insiemi fuzzy?

- Sono particolari *fbf aperte* del tipo $\mathsf{Moderata}(x)$

- Rappresentazione:

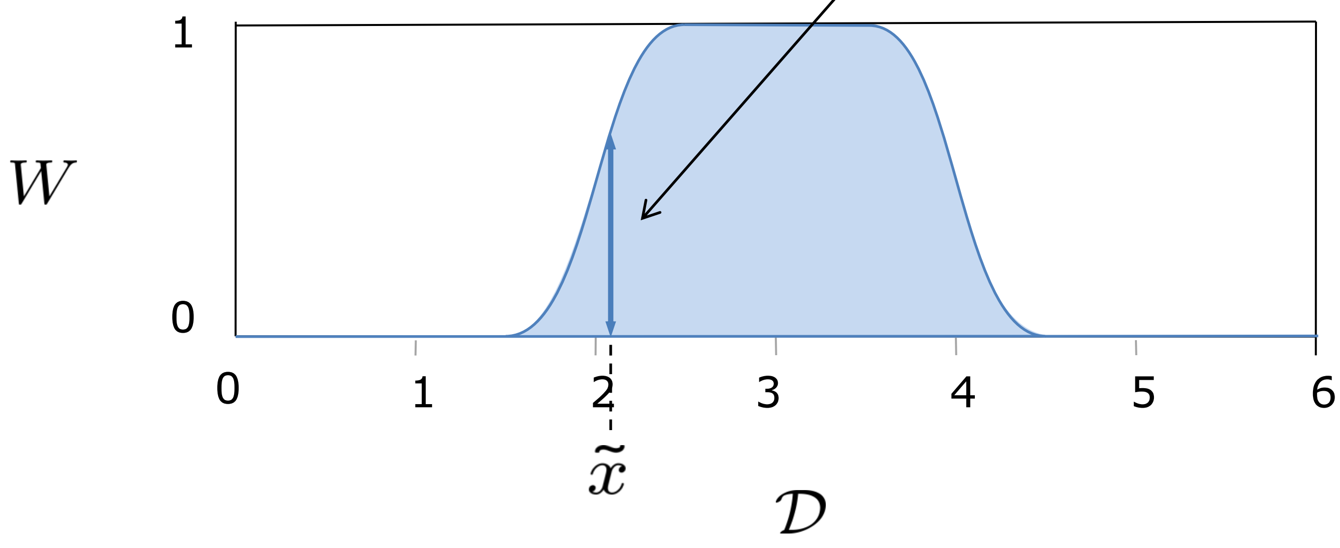
$$\{d \in \mathcal{D} \;:\; w \models \mathsf{Moderata}(d)\}$$



Cosa sono gli insiemi fuzzy?

- Sono particolari *fbf aperte* del tipo
- Rappresentazione:

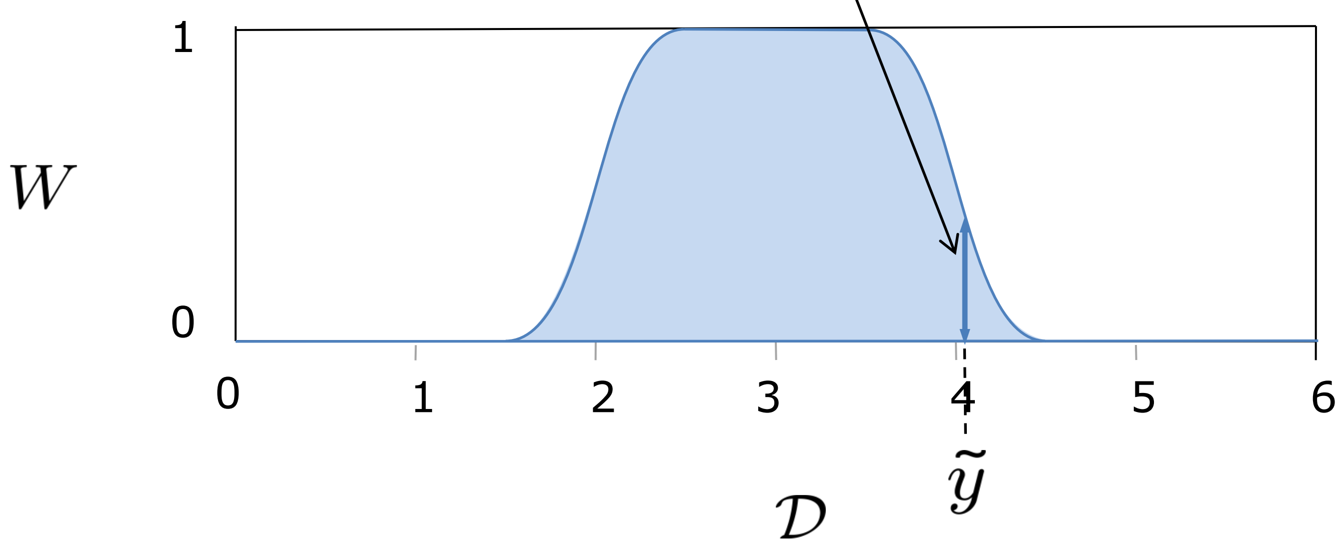
$$\pi(\{w \in \mathcal{W} \ : \ w \models \mathrm{Moderata}(\tilde{x})\}) = 0,65$$



Cosa sono gli insiemi fuzzy?

- Sono particolari *fbf aperte* del tipo
- Rappresentazione:

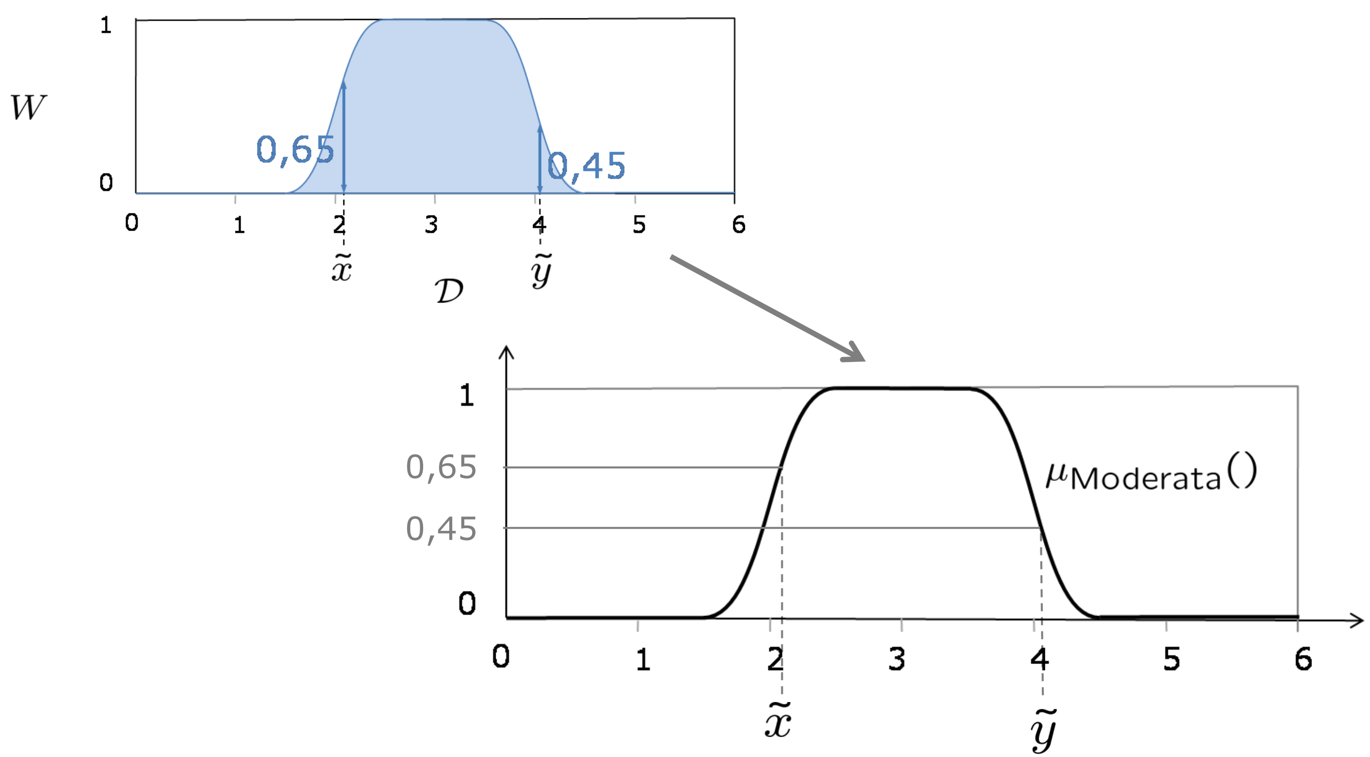
$$\pi(\{w \in \mathcal{W} \ : \ w \models \mathsf{Moderata}(\tilde{y})\}) = 0,45$$



Cosa sono gli insiemi fuzzy?

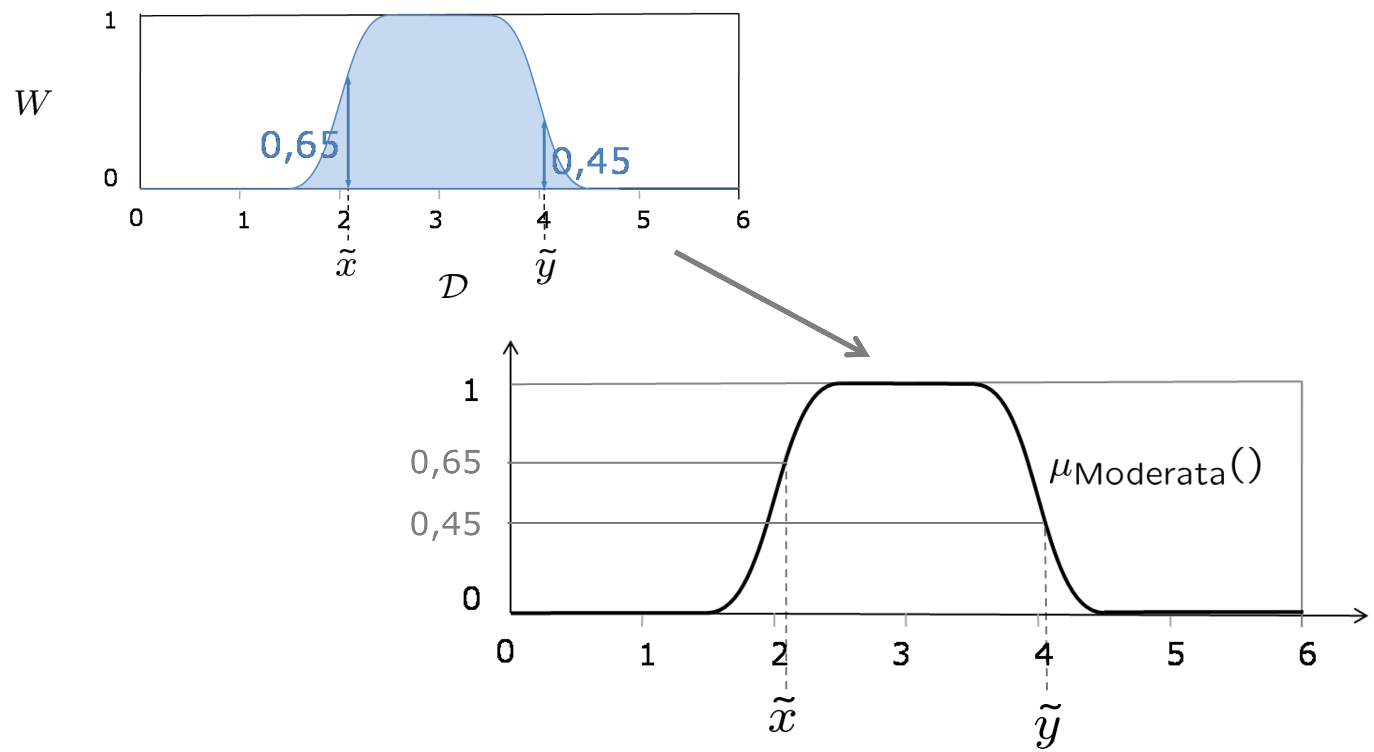
- Sono particolari *fbf aperte* del tipo

- Funzione d'appartenenza:



Cosa succede agli insiemi fuzzy?

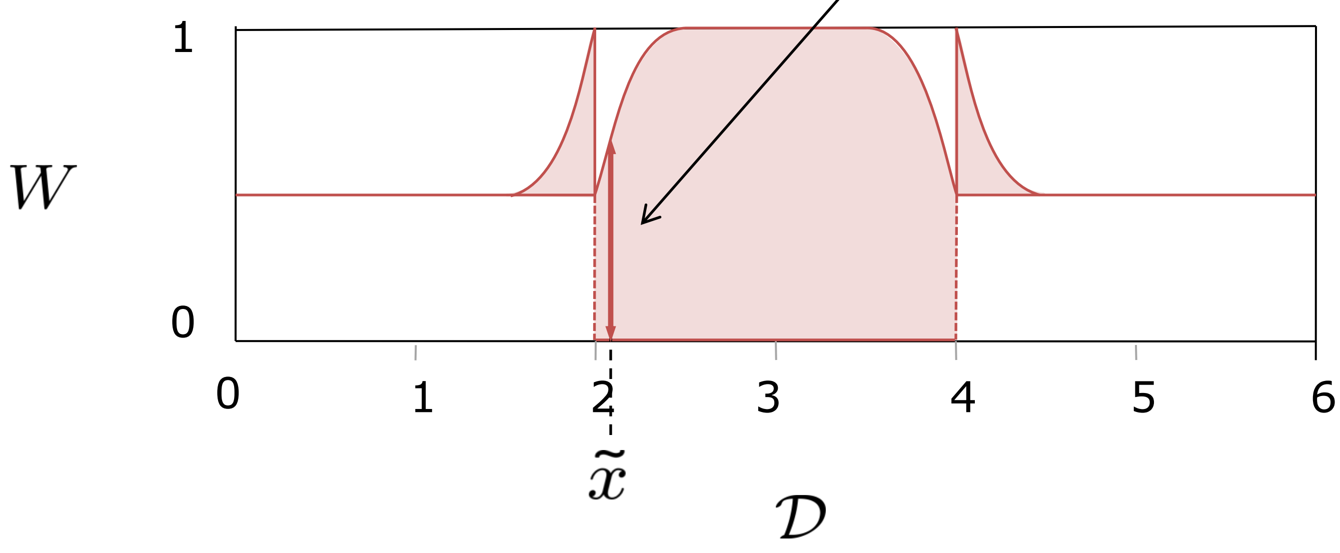
- La funzione di appartenenza non è più sufficiente per caratterizzarli completamente



Cosa succede agli insiemi fuzzy?

- La funzione di appartenenza non è più sufficiente per caratterizzarli completamente

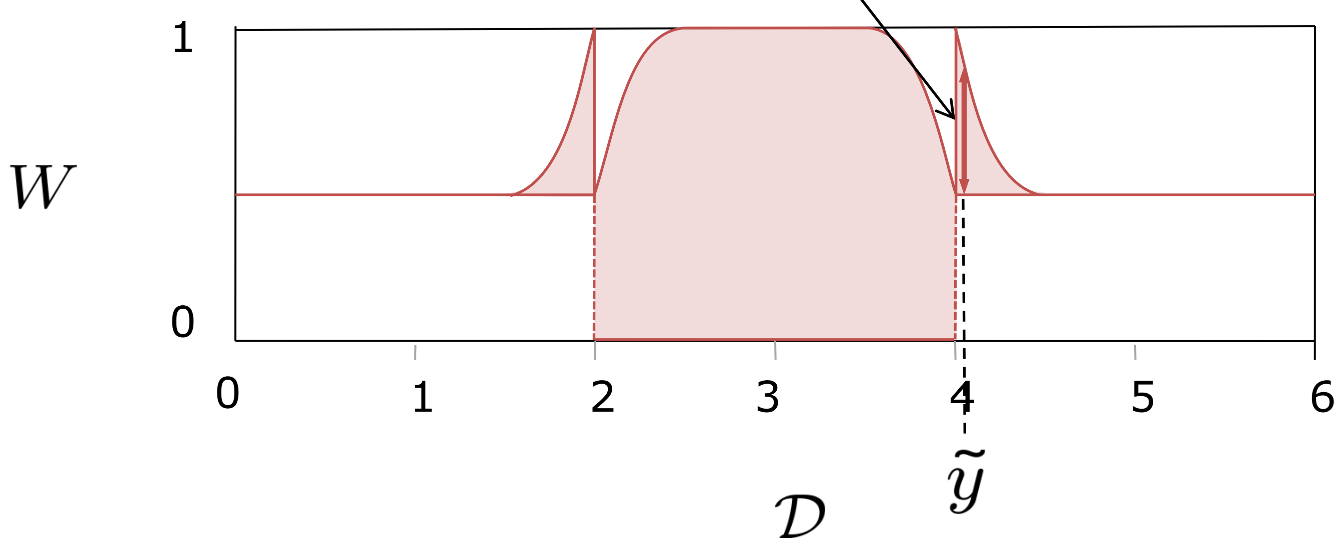
$$\pi(\{w \in \mathcal{W} \ : \ w \models \text{Moderata}(\tilde{x})\}) = 0,65$$



Cosa succede agli insiemi fuzzy?

- La funzione di appartenenza non è più sufficiente per caratterizzarli completamente

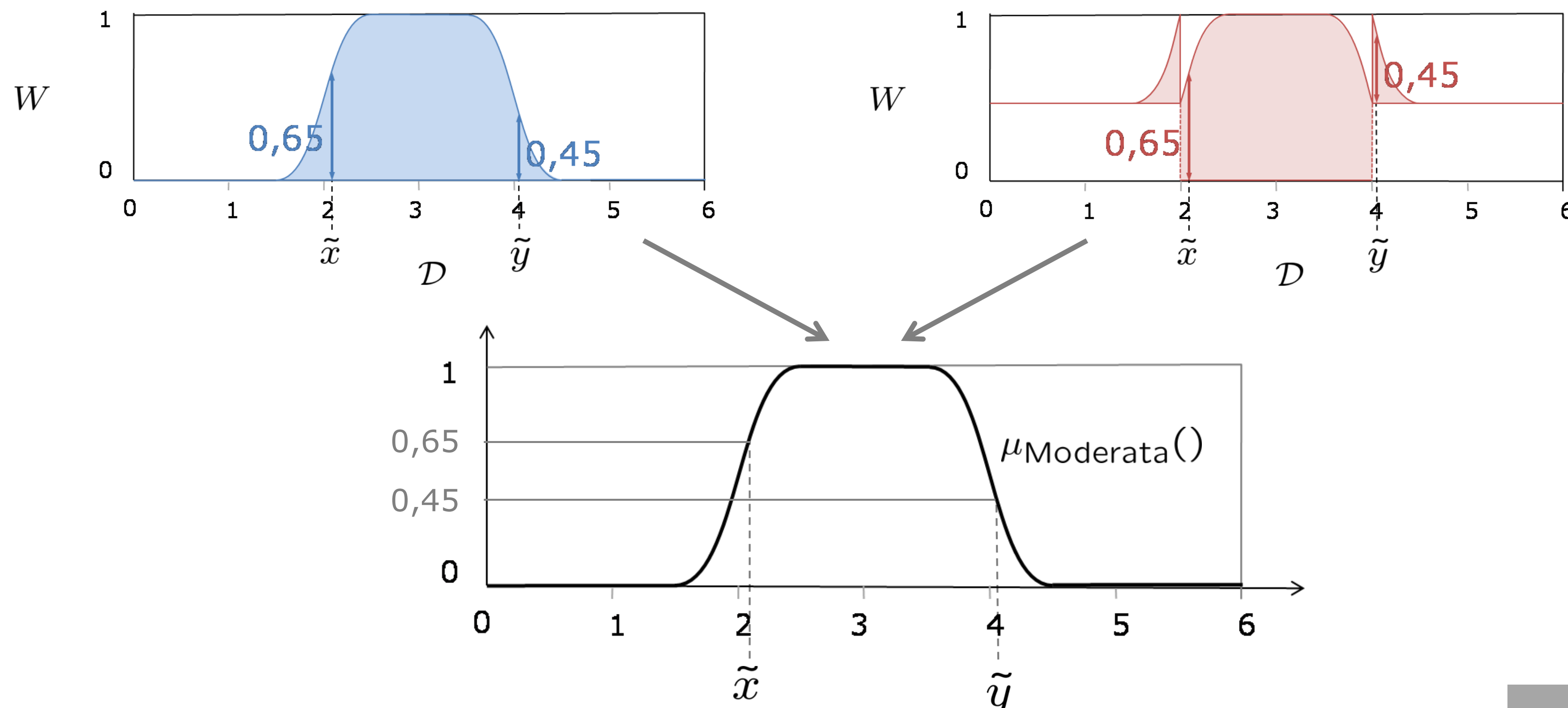
$$\pi(\{w \in \mathcal{W} \; : \; w \models \text{Moderata}(\tilde{y})\}) = 0,45$$



Cosa succede agli insiemi fuzzy?

- La funzione di appartenenza non è più sufficiente per caratterizzarli completamente

(esistono strutture in cui insiemi fuzzy differenti hanno la medesima funzione di appartenenza)



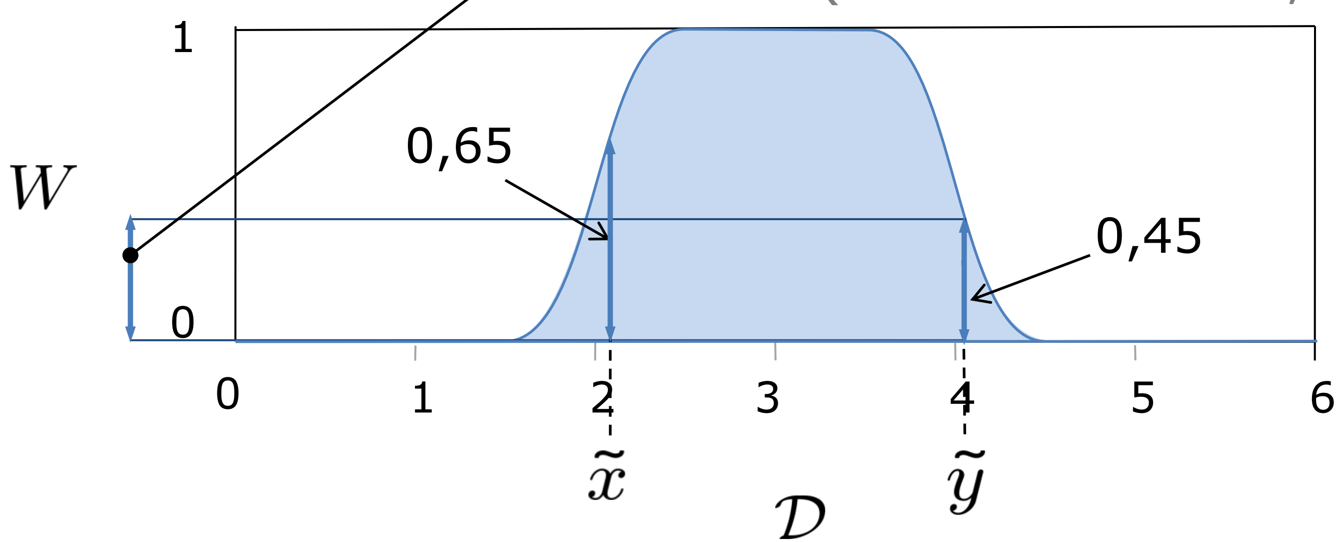
Cosa succede agli insiemi fuzzy?

- I connettivi dipendono dalla struttura interna degli insiemi fuzzy cui sono applicati

(non possono essere scelti arbitrariamente)

$$\pi(\mathsf{Moderata}(\tilde{x}) \wedge \mathsf{Moderata}(\tilde{y})) = 0,45$$

(è il minimo tra 0,65 e 0,45)



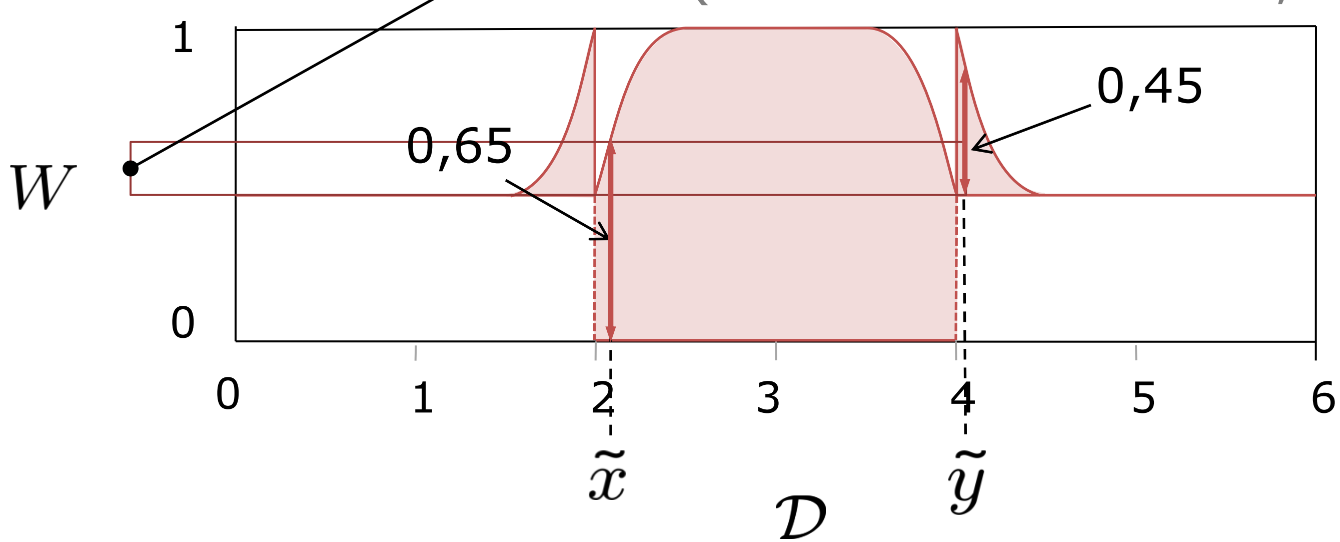
Cosa succede agli insiemi fuzzy?

- I connettivi dipendono dalla struttura interna degli insiemi fuzzy cui sono applicati

(non possono essere scelti arbitrariamente)

$$\pi(\text{Moderata}(\tilde{x}) \wedge \text{Moderata}(\tilde{y})) = 0,15$$

(non è il minimo tra 0,65 e 0,45)

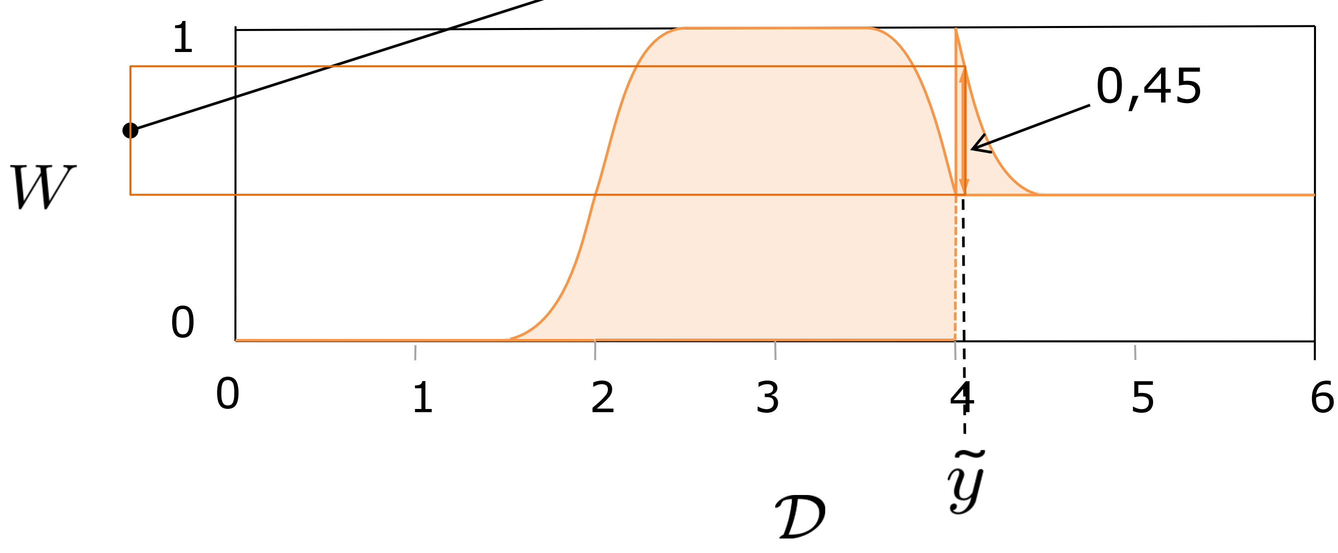


Cosa succede agli insiemi fuzzy?

- Non è garantita la verofunzionalità

$$\pi(\text{Moderata}(\tilde{y})) = 0,45$$

$$\pi(\text{Moderata}(\tilde{y}) \wedge \text{Moderata}(\tilde{y})) = 0,45$$



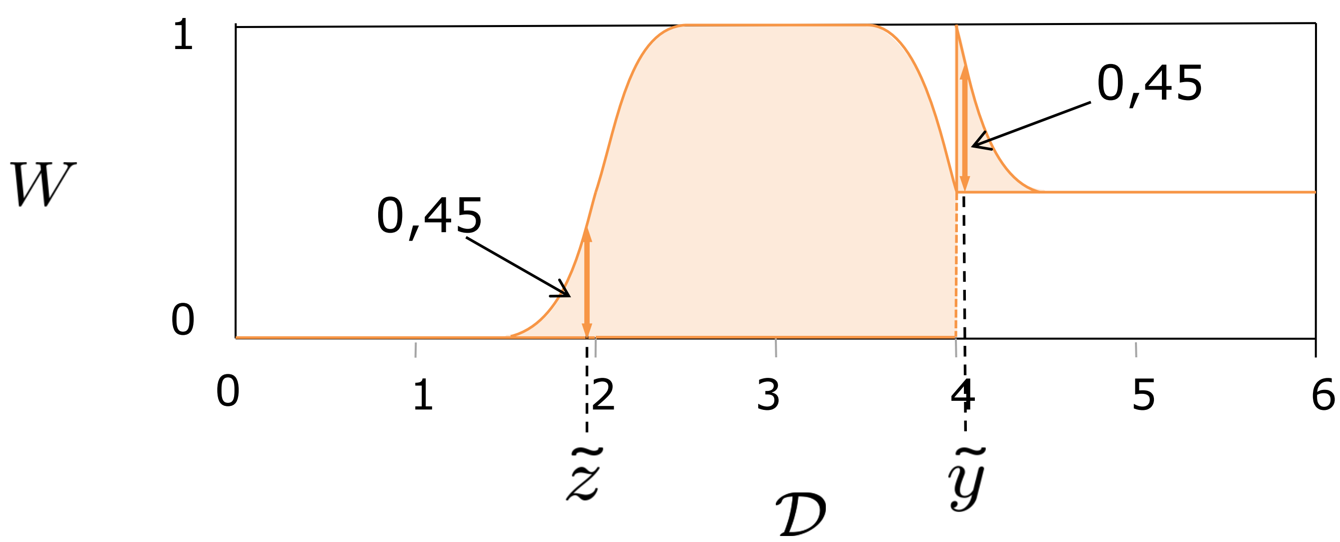
Cosa succede agli insiemi fuzzy?

- Non è garantita la verofunzionalità

$$\pi(\text{Moderata}(\tilde{y})) = 0,45 \quad \text{e} \quad \pi(\text{Moderata}(\tilde{z})) = 0,45$$

ma

$$\pi(\text{Moderata}(\tilde{y}) \wedge \text{Moderata}(\tilde{y})) = 0,45$$
$$\pi(\text{Moderata}(\tilde{y}) \wedge \text{Moderata}(\tilde{z})) = 0$$



Alcuni risultati

- **<u>Teorema:</u>** dati gli insiemi fuzzy $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ sono equivalenti

1) $\forall x \forall y\, (\Box(\varphi(x) \to \psi(y)) \vee \Box(\psi(y) \to \varphi(x)))$;
2) $p = \max(q, r)$:
   $\forall x \forall y\, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \vee \psi(y)))$;
3) $p = \min(q, r)$:
   $\forall x \forall y\, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \wedge \psi(y)))$;
4) $p = \min(1 - q + r, 1)$:
   $\forall x \forall y\, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \to \psi(y)))$.

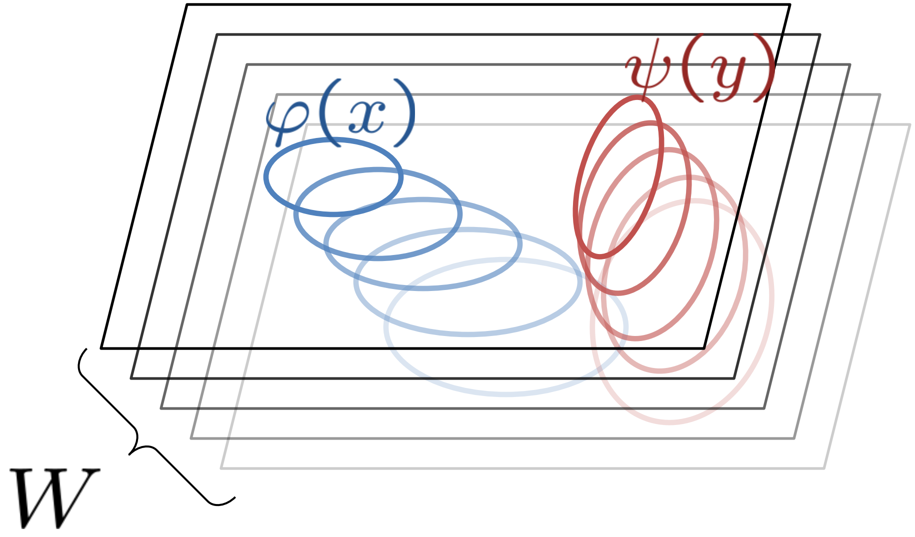
Alcuni risultati

- **<u>Teorema:</u>** dati gli insiemi fuzzy $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ sono equivalenti

  1) $\forall x \forall y\, (\Box(\varphi(x) \to \psi(y)) \vee \Box(\psi(y) \to \varphi(x)))$

  (descrive la forma degli insiemi coinvolti)

Ad esempio:

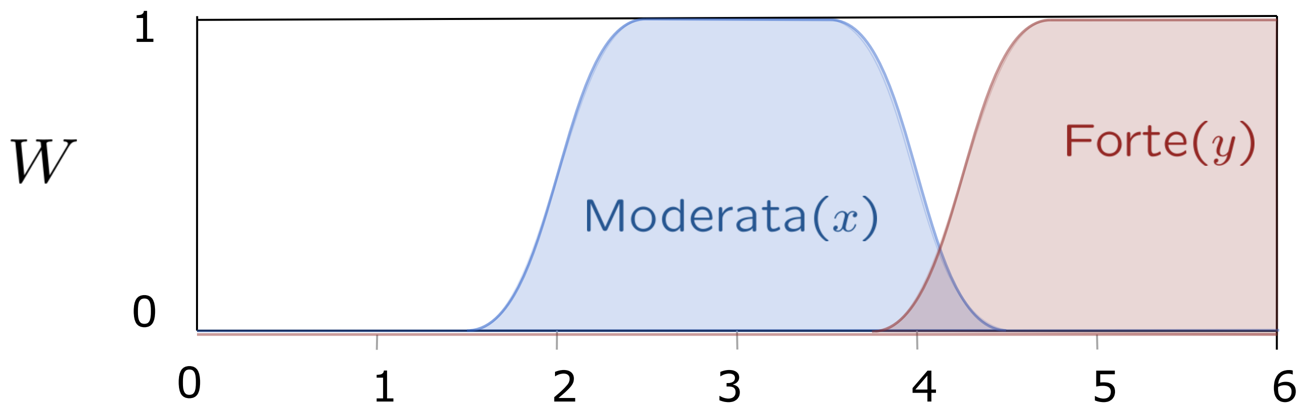


Alcuni risultati

- **<u>Teorema:</u>** dati gli insiemi fuzzy $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ sono equivalenti

1) $\forall x \forall y \, (\Box(\varphi(x) \to \psi(y)) \vee \Box(\psi(y) \to \varphi(x)))$

(descrive la forma degli insiemi coinvolti)



Alcuni risultati

- **<u>Teorema:</u>** dati gli insiemi fuzzy $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ sono equivalenti

1) $\forall x \forall y\, (\Box(\varphi(x) \to \psi(y)) \vee \Box(\psi(y) \to \varphi(x)))$;

2) $p = \boxed{\max(q, r)}$:
$\forall x \forall y\, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \vee \psi(y)))$;

Alcuni risultati

- **Teorema:** dati gli insiemi fuzzy $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ sono equivalenti

1) $\forall x \forall y\, (\Box(\varphi(x) \to \psi(y)) \vee \Box(\psi(y) \to \varphi(x)))$;
2) $p = \boxed{\max(q,r)}$: $\forall x \forall y\, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \vee \psi(y)))$;
3) $p = \boxed{\min(q,r)}$: $\forall x \forall y\, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \wedge \psi(y)))$;
4) $p = \boxed{\min(1-q+r,1)}$: $\forall x \forall y\, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \to \psi(y)))$.

la forma degli insiemi fuzzy (1) obbliga ad utilizzare una certa disgiunzione (2), una certa congiunzione (3) e una certa implicazione (4)

Alcuni risultati

- **<u>Teorema:</u>** dati gli insiemi fuzzy $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ sono equivalenti

1) $\forall x \forall y \, (\Box(\varphi(x) \to \neg\psi(y)) \vee \Box(\neg\psi(y) \to \varphi(x)));$
2) $p = \min(q + r, 1)$:
$\forall x \forall y \, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \vee \psi(y)));$
3) $p = \max(q + r - 1, 0)$:
$\forall x \forall y \, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \wedge \psi(y)));$
4) $p = \max(1 - q, r)$:
$\forall x \forall y \, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \to \psi(y))).$

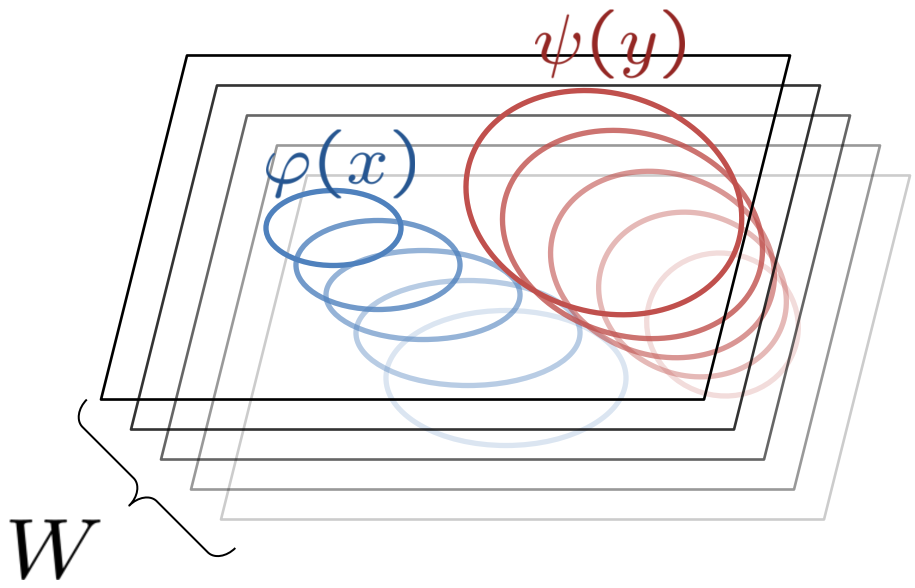
Alcuni risultati

- **<u>Teorema:</u>** dati gli insiemi fuzzy $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ sono equivalenti

1) $\forall x \forall y\, (\Box(\varphi(x) \to \neg\psi(y)) \vee \Box(\neg\psi(y) \to \varphi(x)))$

(descrive la forma degli insiemi coinvolti)

Ad esempio:



Alcuni risultati

- **<u>Teorema:</u>** dati gli insiemi fuzzy $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ sono equivalenti

1) $\forall x \forall y\,(\Box(\varphi(x) \to \neg\psi(y)) \vee \Box(\neg\psi(y) \to \varphi(x)))$;
2) $p = \boxed{\min(q+r,1)}$:
$\forall x \forall y\,((\mathbf{P}_q\varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r\psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \vee \psi(y)))$;
3) $p = \boxed{\max(q+r-1,0)}$:
$\forall x \forall y\,((\mathbf{P}_q\varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r\psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \wedge \psi(y)))$;
4) $p = \boxed{\max(1-q,r)}$:
$\forall x \forall y\,((\mathbf{P}_q\varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r\psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \to \psi(y)))$.

la forma degli insiemi fuzzy (1) obbliga ad utilizzare una certa disgiunzione (2), una certa congiunzione (3) e una certa implicazione (4)

Alcuni risultati

- **Teorema:** dati gli insiemi fuzzy $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ sono equivalenti

1) $\forall x \forall y\, (\varphi(x) \perp \psi(y));$ (gli insiemi hanno forme "indipendenti")

2) $p = \boxed{q + r - (q \cdot r)}:$
$\forall x \forall y\, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \vee \psi(y)));$

3) $p = \boxed{q \cdot r}:$
$\forall x \forall y\, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \wedge \psi(y)));$

4) $p = \boxed{1 - (1 - r) \cdot q}:$
$\forall x \forall y\, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \to \psi(y))).$

la forma degli insiemi fuzzy (1) obbliga ad utilizzare una certa disgiunzione (2), una certa congiunzione (3) e una certa implicazione (4)

Conclusioni: presente

- Ora si ha una potente struttura che abbraccia sia la probabilità sia gli insiemi fuzzy e nella quale
    - si preserva l’intuizione,
      senza perdere il rigore formale
    - i connettivi sono verofunzionali
      solo a certe condizioni
    - la struttura interna degli insiemi fuzzy
      influenza l’utilizzo dei connettivi
    - regole specifiche
      normano la relazione
      tra insiemi fuzzy e connettivi

Conclusioni: futuro

- Il lavoro da fare è indirizzato a esplorare la struttura formale per
  - trovare nuove relazioni
    tra insiemi e connettivi
  - includere anche il ragionamento probabilistico
    (ad esempio: la condizionalizzazione)
  - "fondere" probabilità e insiemi fuzzy
    (cosa succede se è variabile l'interpretazione sia dei predicati sia delle costanti?)
  - trovare applicazioni pratiche

Bibliografia

- Fuzzy Logics 1.0

  - Dubois, D. e Prade H. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications.* Academic Press, Inc. 1980 (qualcosa di tecnico)
  - Hájek, J. Y. *Metamathematics of Fuzzy Logics*. Kluwer. 1998 (qualcosa di formale)
  - Cammarata, S. *Sistemi a Logica Fuzzy*. Etas Libri. 1997 (qualche applicazione)
  - Kosko, B. *Il Fuzzy-pensiero. Teoria e Applicazioni della Logica Fuzzy*. Baldini e Castoldi. 1995 (un po' di storia)

Bibliografia

- Fuzzy Logics 2.0

  - Piastra, M. What’s in a fuzzy set? In *Proceedings of the Sixteenth National Conference on Artificial Intelligence and the Eleventh Annual Conference on Innovative Applications of Artificial Intelligence (Orlando, Florida, United States, July 18-22, 1999)*. American Association for Artificial Intelligence, Menlo Park, CA, 200-207. 1999. (l’idea)
  - Fitting, M. E Mendelsohn, R. L. *First-Order Modal Logic*. Kluwer Academic Publishers. 1998. (la componente modale)

Bibliografia

- Fuzzy Logics 2.0

  - Bacchus, F. *Representing and Reasoning with Probabilistic Knowledge – A Logical Approach to Probabilities*. The MIT Press, Cambridge, MA. 1990. (KD45 e probabilità)
  - Abadi, M. E Halpern, J. Y. Decidability and expressiveness for first-order logics of probability. *30th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (sfcs 1989)*, 148-153. 1989. (logica e probabilità)
  - Halpern, J. Y. An analysis of first-order logics of probability. *Artificial Intelligence, 46*, 311-350. 1990 (logica e probabilità)