Logiche modali

Marco Piastra

Un paradosso?

Una particolare fbf di L_P :

$(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$

Si tratta di una *tautologia* di L_P:

φ	ψ	$\varphi \to \psi$	$\psi \to \varphi$	$(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

- Lettura informale:

  Una relazione di implicazione sussiste <u>comunque</u>
  tra due fbf φ e ψ qualsiasi di L_P , in un senso o nell'altro.

Implicazione stretta

Si direbbe che la relazione di *implicazione* sia troppo ‘pervasiva’

Non si possono rappresentare coppie di proposizioni
che non hanno alcuna relazione logica:

φ : “Questi fagioli sono bianchi”

ψ : “Oggi c’è lezione di IA”

- L’origine storica della logica modale

Il desiderio di rappresentare una forma di *implicazione*
per cui questo ‘paradosso’ non vale

Originariamente detta ***implicazione stretta*** (Lewis, 1912)

Si affianca all’implicazione classica (anche *implicazione materiale*)

Come si vedrà, la definizione dell’implicazione stretta non è univoca
(già Lewis era arrivato a definire diverse logiche modali, non una sola)

Implicazione modale

$\Box\,(A \rightarrow B)$ (lettura informale: $\Box$ come "L'agente ritiene che")

p. es. A : "Il treno non è riportato dall'orario ferroviario", B : "Il treno non c'è"

L'obiettivo è definire delle regole di ragionamento in cui si possa distinguere le verità soggettive ("l'agente ritiene che") dalle verità oggettive.

Intuitivamente ci si aspetta che:

$\Box\,(A \rightarrow B),\ \Box\,A \vdash \Box\,B$

Se l'agente ritiene che $A \rightarrow B$ e A, allora ritiene che B

$\Box\,(A \rightarrow B),\ A \vdash \Box\,B$

Se A è (oggettivamente) vera, allora l'agente ritiene che B

$\Box\,(A \rightarrow B),\ A \nvdash B$

Se la regola è soggettiva, la verità (oggettiva) di A non implica la verità di B

Inoltre:

$\vdash \Box\,A \vee \neg\Box\,A$

L'agente può ritenere A vera oppure no …

$\nvdash \Box\,A \vee \Box\,\neg A$

… ma non è obbligato ad avere un'opinione definita su A

$\nvdash \Box\,(A \rightarrow B) \vee \Box\,(B \rightarrow A)$

In particolare, l'agente non è obbligato a ritenere vera l'implicazione in uno dei due sensi

Linguaggio e derivazione

- L_{MP} : **Logica modale proposizionale**

  Linguaggio della logica proposizionale **classica** + il simbolo unario $\Box$
  insieme ad un ulteriore, simbolo unario *derivato*:

  $\Diamond$ che equivale a $\neg\Box\neg$

  Informalmente, $\Diamond\varphi$ sta per "è *possibile* φ" o anche "l'agente ritiene possibile φ",
  mentre $\Box\varphi$ sta per "l'agente ritiene vero φ"

- Assiomi proposizionali

  Valgono gli schemi di assioma Ax_1, Ax_2, Ax_3 di L_P (si estende la logica classica)

- Regole di inferenza

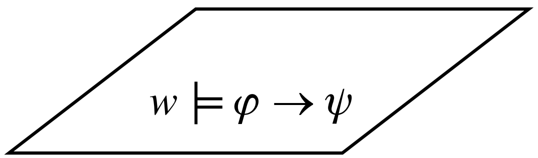
  modus ponens $\varphi \to \psi, \varphi \vdash \psi$
  necessitazione (Nec) $\varphi \vdash \Box\varphi$

  Identico il concetto di *dimostrazione* (metodo *a la Hilbert*)
  MA SENZA LE SCORCIATOIE: in logica modale NON vale il teorema di deduzione

Semantica: mondi possibili ed accessibilità (Kripke, 1963)

- Intuitivamente, in logica classica
  - L'agente considera un solo mondo (un *mondo possibile*)
    - Le formule di una teoria descrivono i fatti noti (esempio: il mondo dei blocchi)
- In logica modale (nella declinazione *epistemica*)
  - L'agente considera una pluralità di ***mondi possibili***
    - Ciascuno mondo possibile descrive una situazione logicamente coerente (in senso classico)
    - Le formule di una teoria descrivono fatti noti e fatti ritenuti veri
- L'insieme dei mondi possibili è <u>strutturato</u>
  - Sull'insieme dei mondi possibili è definita una relazione di **accessibilità** che rappresenta un collegamento (orientato) tra i mondi possibili

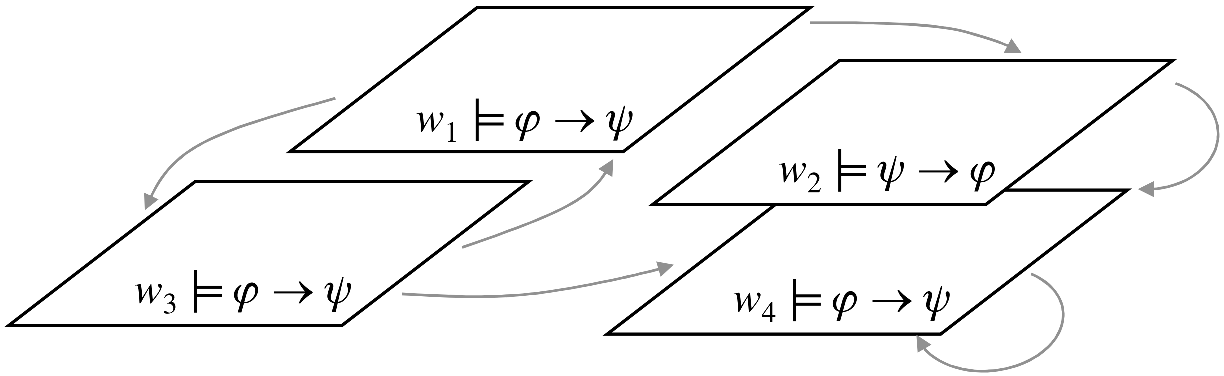
Semantica della logica **classica**



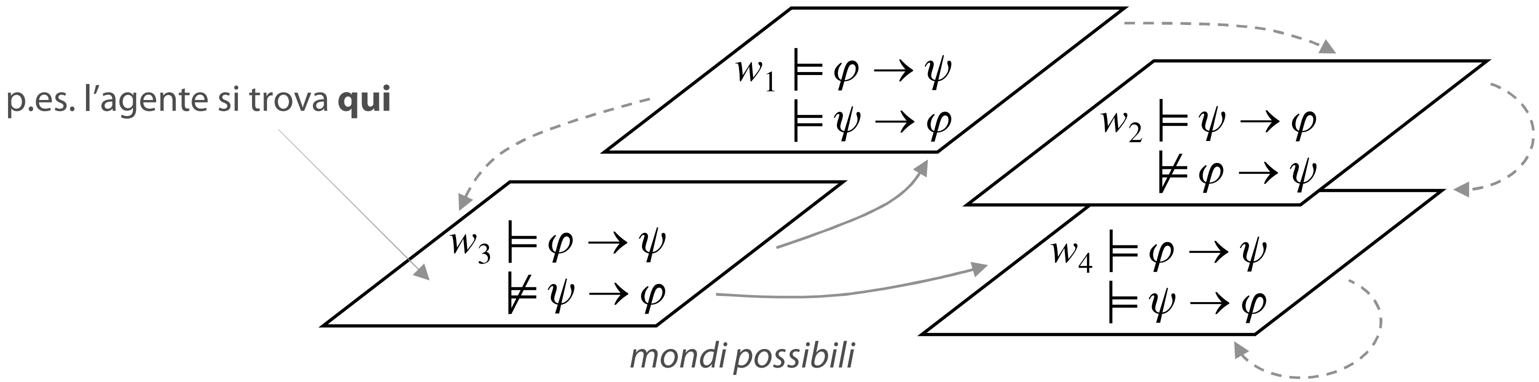
mondo possibile

Semantica della logica **modale**

mondi possibili + relazione di accessibilità



Interpretazione degli operatori modali



In ciascun mondo, tutte le fbf φ <u>non modali</u> hanno un valore definito

- La semantica di $\Box$ è definita in riferimento a un singolo mondo

  $\Box\,\varphi$ è vera in un mondo w sse φ è vera in tutti mondi accessibili (o *possibili*) da w

  Esempio:

  Per un agente che si trova in w_3, $\Box\,(\varphi \rightarrow \psi)$ è vera, $\Box\,(\psi \rightarrow \varphi)$ è vera

  Per un agente che si trova in w_1, $\Box\,(\varphi \rightarrow \psi)$ è falsa, $\Box\,(\psi \rightarrow \varphi)$ è falsa, mentre $\Diamond\,(\varphi \rightarrow \psi)$ è vera, $\Diamond\,(\psi \rightarrow \varphi)$ è vera

  Una formula modale può essere vera in tutti i mondi possibili

  Esempio: $\Diamond\,(\psi \rightarrow \varphi)$ è vera in tutti mondi in figura

Strutture semantiche modali (a la Kripke)

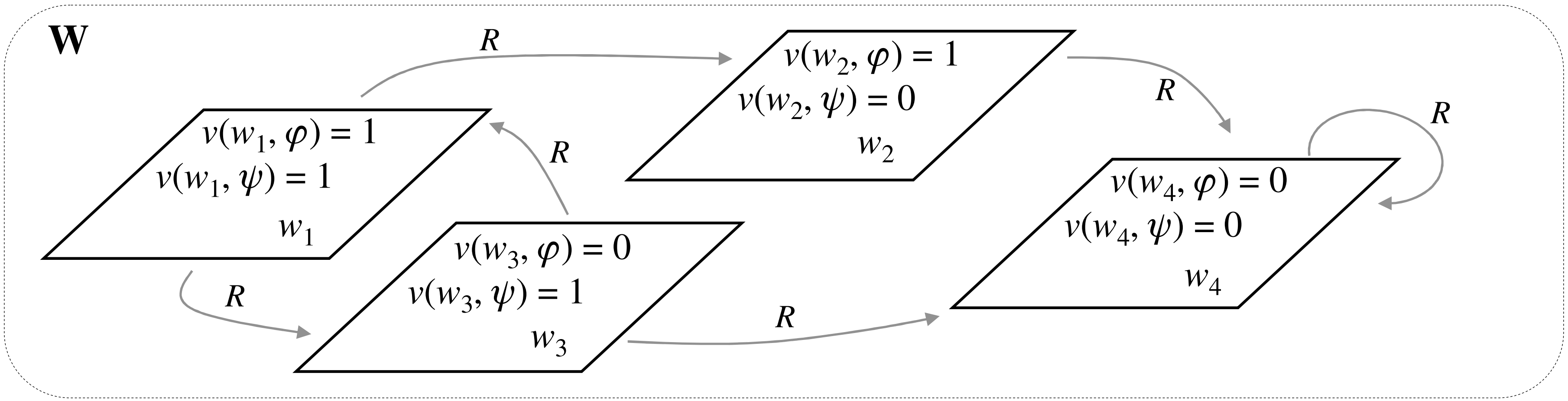
(dato un linguaggio proposizionale modale L_{MP})

Una **struttura** (*frame*) $<\mathbf{W}, R>$:

- $\mathbf{W}$ è un insieme di punti detti anche ‘stati’ o ‘mondi possibili’
- R è una relazione binaria (=sottoinsieme di $\mathbf{W}^2$) che definisce l’accessibilità tra mondi

Un **modello** (*model*) $<\mathbf{W}, R, v>$:

- $\mathbf{W}$ ed R come sopra
- v è una funzione che assegna un valore di verità alle fbf di L_{MP} in ciascun mondo $w \in \mathbf{W}$



(*è la stessa struttura dell’esempio precedente*)

Regole semantiche

Definizione in tre passi

1) Soddisfacimento di formule non modali in un mondo w del modello $<\mathbf{W}, R, v>$
2) Soddisfacimento di formule modali in un mondo w del modello $<\mathbf{W}, R, v>$
3) Soddisfacimento nell'intero modello

- Soddisfacimento

1) Una fbf *non* modale φ è soddisfatta in un mondo $w \in \mathbf{W}$ di una struttura $<\mathbf{W}, R, v>$ semplicemente sse φ è vera in w

   $<\mathbf{W}, R, v>, w \models \varphi$ sse $v(w, \varphi) = 1$ (secondo le regole semantiche di L_P)

2) Una fbf modale è soddisfatta in un mondo w

   $<\mathbf{W}, R, v>, w \models \Box \varphi$ sse $\forall w' \in \mathbf{W}, wRw'; <\mathbf{W}, R, v>, w' \models \varphi$

   $<\mathbf{W}, R, v>, w \models \Diamond \varphi$ sse $\exists w' \in \mathbf{W}, wRw'; <\mathbf{W}, R, v>, w' \models \varphi$

   Tramite le usuali regole di composizione semantica,
   le definizioni si estendono anche alle fbf composite

3) Formula qualsiasi $\varphi \in L_{MP}$, nell'intero modello $<\mathbf{W}, R, v>$

   $<\mathbf{W}, R, v> \models \varphi$ sse $\forall w \in \mathbf{W}; <\mathbf{W}, R, v>, w \models \varphi$

Formule valide

- Validità in un modello (*model*)

  Una fbf $\varphi \in L_{MP}$ che è soddisfatta in tutti i mondi w del modello $<\mathbf{W}, R, v>$

  $<\mathbf{W}, R, v> \models \varphi$ sse $\forall w \in \mathbf{W}; <\mathbf{W}, R, v>, w \models \varphi$

- Validità in una struttura (*frame*)

  Una fbf $\varphi \in L_{MP}$ che è valida in tutti i modelli $<\mathbf{W}, R, v>$ costruiti a partire da un struttura $<\mathbf{W}, R>$

- Validità

  Una fbf $\varphi \in L_{MP}$ che è valida in qualsiasi modello $<\mathbf{W}, R, v>$

Conseguenza logica

- Definizione

Una fbf φ è conseguenza logica di un insieme di fbf Γ

$\Gamma \models \varphi$

sse

$<\mathbf{W}, R, v> \models \Gamma \;\Rightarrow\; <\mathbf{W}, R, v> \models \varphi$

Nota:

Questo significa che, se $\Gamma \models \varphi$, in qualsiasi mondo $w \in \mathbf{W}$ di un modello $<\mathbf{W}, R, v> \models \Gamma$ si ha che $w \models \Gamma$ e anche $w \models \varphi$

Assiomi modali

- Assioma K

  K: $\Box (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box \varphi \rightarrow \Box \psi)$

- Altri assiomi modali

  D: $\Box \varphi \rightarrow \neg\Box \neg\varphi$ (equivale a $\Box \varphi \rightarrow \Diamond \varphi$)

  T: $\Box \varphi \rightarrow \varphi$

  4: $\Box \varphi \rightarrow \Box\Box \varphi$

  5: $\neg\Box \neg\varphi \rightarrow \Box\neg\Box \neg\varphi$ (equivale a $\Diamond \varphi \rightarrow \Box\Diamond \varphi$)

  B: $\varphi \rightarrow \Box\neg\Box \neg\varphi$ (equivale a $\varphi \rightarrow \Box\Diamond \varphi$)

Assiomi modali e corrispondenze semantiche

- Assioma K

  K: $\Box (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box \varphi \rightarrow \Box \psi)$

  E' una fbf valida in tutte le *strutture* $<\mathbf{W}, R>$

  Garantisce la possibilità di una semantica dei mondi possibili – *a la Kripke*

  Altri assiomi modali corrispondono a una classe di *strutture* $<\mathbf{W}, R>$

- Altri assiomi modali

  D: $\Box \varphi \rightarrow \neg \Box \neg \varphi$ (equivale a $\Box \varphi \rightarrow \Diamond \varphi$)

  E' valida in una classe di *strutture* $<\mathbf{W}, R>$ sse la relazione R è *seriale* $(\forall w\ \exists u,\ wRu)$

  T: $\Box \varphi \rightarrow \varphi$

  E' valida in una classe di *strutture* $<\mathbf{W}, R>$ sse la relazione R è *riflessiva* $(\forall w,\ wRw)$

  4: $\Box \varphi \rightarrow \Box\Box \varphi$

  E' valida in una classe di *strutture* $<\mathbf{W}, R>$ sse la relazione R è *transitiva* $(wRu,\ uRs \Rightarrow wRs)$

  5: $\neg \Box \neg \varphi \rightarrow \Box \neg \Box \neg \varphi$ (equivale a $\Diamond \varphi \rightarrow \Box \Diamond \varphi$)

  E' valida in una classe di *strutture* $<\mathbf{W}, R>$ sse la relazione R è *euclidea* $(wRu,\ wRs \Rightarrow uRs)$

  B: $\varphi \rightarrow \Box \neg \Box \neg \varphi$ (equivale a $\varphi \rightarrow \Box \Diamond \varphi$)

  E' valida in una classe di *strutture* $<\mathbf{W}, R>$ sse la relazione R è *simmetrica* $(wRu \Rightarrow uRw)$

Logiche modali

Non tutte le proprietà della relazione R corrispondono ad un assioma modale

(p. es. non ci sono fbf modali che corrispondono a *irriflessività* o *intransitività* di R)

Vale invece una sorta di 'sovrapposizione degli effetti'

Ad esempio le fbf T, 4 e B sono simultaneamente valide in una struttura $<\mathbf{W}, R>$ in cui la relazione R è *riflessiva*, *simmetrica* e *transitiva.*

In altri termini, se le le fbf T, 4 e B sono valide in $<\mathbf{W}, R>$ allora $<\mathbf{W}, R>$ è strutturata in *classi di equivalenza*.

- Logiche modali **normali**

Sono tutte le logiche modali in cui vale l'assioma K

K: $\Box\,(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\,\varphi \rightarrow \Box\,\psi)$

Garantisce la possibilità di una semantica dei mondi possibili – *a la Kripke*

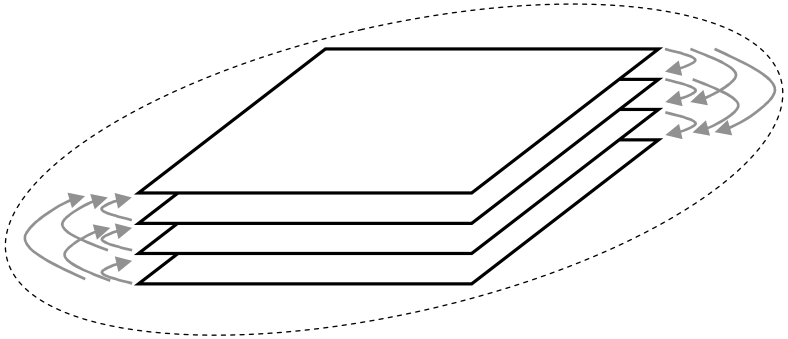
La scelta degli ulteriori assiomi dipende dal tipo di modalità che si vuole rappresentare

In che senso?

Le logiche modali sono identificate da una sigla che, in generale, identifica gli assiomi adottati (esempi: KT4, KT45)

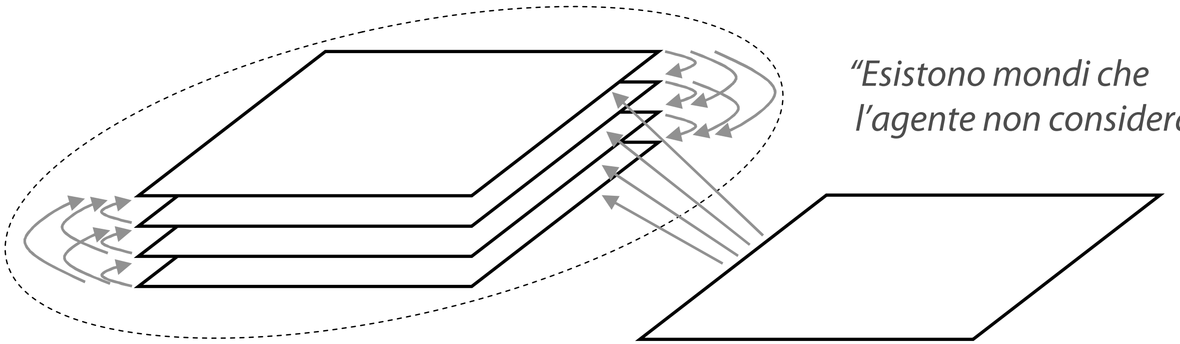
Logiche modali

Tutte le teorie soddisfacibili della logica KT45 (= KT5, = KT4B) sono soddisfacibili in una classe di strutture in cui tutti i mondi appartengono ad un'unica classe di equivalenza



"L'agente considera tutti i mondi della struttura come possibili"

Tutte le teorie soddisfacibili della logica KD45 sono invece soddisfacibili in una classe di strutture in cui almeno un mondo rimane '*all'esterno*'



"Esistono mondi che l'agente non considera possibili"

Logiche epistemiche

Con la logica modale si intende caratterizzare il sistema di conoscenze di un agente

KT45 è la logica della conoscenza *infallibile*

infatti vale T: $\Box \varphi \rightarrow \varphi$

KD45 è invece la logica della conoscenza *falsificabile*

infatti vale D: $\Box \varphi \rightarrow \neg \Box \neg \varphi$

L'assioma D esprime un requisito più debole, di non contraddittorietà

Gli assiomi 4 e 5 riguardano le capacità introspettive

4: $\Box \varphi \rightarrow \Box\Box \varphi$

5: $\Diamond \varphi \rightarrow \Box\Diamond \varphi$

L'agente "sa di sapere"?

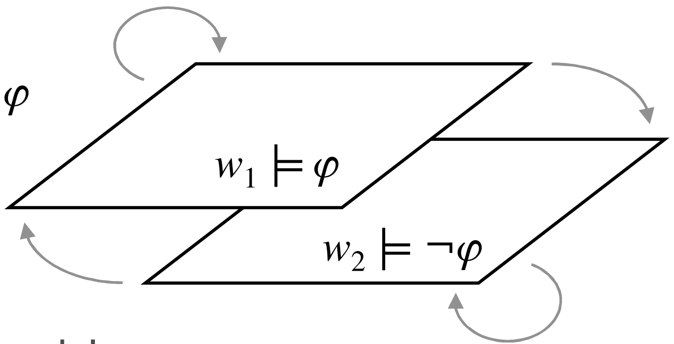
Verità e conoscenza

- L'operatore modale $\Box$ <u>non</u> è un quantificatore sui mondi possibili

  La semantica si basa infatti sulla relazione di accessibilità R

  Esempio: $\varphi \to \Box\,\varphi$ non è una fbf valida in S5

  $\not\models_{S5}\ \varphi \to \Box\,\varphi$

  La struttura è S5 ma $\varphi \to \Box\,\varphi$ non è vera in alcuno dei due mondi

  Si ricordi la regola Nec $\varphi \vdash \Box\,\varphi$:
  evidentemente il teorema di deduzione **NON** vale in logica modale

  La validità di $\varphi \to \Box\,\varphi$ in S5 provocherebbe il 'collasso' della logica modale: il simbolo $\Box$ diventerebbe inutile e si avrebbe $S5 \equiv L_P$

  Che significa tutto questo?

  - In S5 il sistema delle conoscenze $\Box\,\varphi$ è certo (e progressivo) ma non si confonde con φ

    La fbf $\varphi \to \Box\,\varphi$ significherebbe "ciò che è certo è anche conosciuto"

  - La regola $\varphi \vdash \Box\,\varphi$ significa "ciò che è certo può essere derivato (o conosciuto)"

    In KD45 il sistema delle conoscenze $\Box\,\varphi$ <u>non è</u> certo (e nemmeno progressivo, o monotono)

Logiche temporali

La struttura dei mondi possibili come successioni di istanti discreti

Ogni mondo rappresenta lo stato del mondo in un dato istante

La relazione di accessibilità descrive le possibili transizioni temporali

- Operatori temporali

A		A è vero (da sempre e per sempre)
$\bigcirc A$	(*next time* A)	A sarà vero nell'istante successivo
$\circ A$	(*always* A)	A sarà vero, dall'istante successivo ("d'ora in poi")
$\Diamond A$	(*eventually* A)	A sarà vero, prima o poi

Esempi

$\Box (A \rightarrow B)$	"D'ora in poi, se A allora B"
$A \rightarrow \Box B$	"Se A allora d'ora in poi B"
$A \rightarrow \bigcirc B$	"Se A allora B sarà vero da ora in poi"
$\Diamond\Box A$	"Prima o poi A sarà vero per sempre"
$\Box\Diamond A$	"Da ora in poi, A sarà vero prima o poi"

$$\Box((\neg passport \vee \neg ticket) \rightarrow \bigcirc\neg board\_flight)$$

Logiche temporali

- LTL_P : **logica temporale lineare (proposizionale)**

  Linguaggio di L_P più i simboli unari $\Box$, $\bigcirc$, $\Diamond$

- Assiomi

  Gli schemi di assioma Ax_1, Ax_2, Ax_3 di L_P

  Assiomi specifici:

  ltl_1: $\neg\bigcirc\varphi \leftrightarrow \bigcirc\neg\varphi$

  ltl_2: $\bigcirc(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\bigcirc\varphi \rightarrow \bigcirc\psi)$ (sussume l'assioma K)

  ltl_3: $\Box\varphi \rightarrow (\varphi \wedge \bigcirc\Box\varphi)$

- Regole di inferenza

  Modus Ponens $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \vdash \psi$

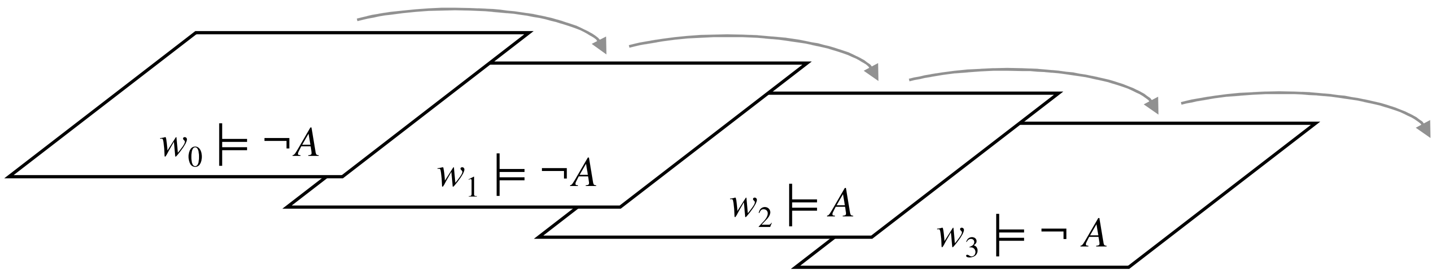
  Nex $\varphi \vdash \bigcirc\varphi$

  Ind $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \rightarrow \bigcirc\varphi \vdash \varphi \rightarrow \Box\psi$

  NON vale il teorema di deduzione

Logiche temporali

- La logica LTL_P è soddisfacibile in una classe di strutture in cui tutti i mondi appartengono ad un'unica **sequenza**



- Regole semantiche:

  Data una struttura $<\mathrm{W}, w_0, v>$, dove $\mathbf{W}$ è una sequenza di mondi $\{w_i\}$, $i \in \mathrm{N}$

  $<\mathbf{W}, v>, w_i \models \bigcirc \varphi$ sse $<\mathbf{W}, v>, w_{i+1} \models \varphi$

  $<\mathbf{W}, v>, w_i \models \Box \varphi$ sse $\forall j \geq i, <\mathbf{W}, v>, w_j \models \varphi$

  $<\mathbf{W}, v>, w_i \models \Diamond \varphi$ sse $\exists j \geq i, <\mathbf{W}, v>, w_j \models \varphi$

Logiche modali

- Sono caratterizzate dalla scelta di un particolare insieme di assiomi
  (e.g. KT5, KD45) a seconda del tipo di nozione informale si vuole rappresentare
- In molti casi (tutti quelli visti finora) sono *complete*
  rispetto alla corrispondente classe di strutture

- Inoltre
  - Non sono *vero-funzionali*:
    non esiste la possibilità di creare tavole di verità con un numero finito di valori
  - Sono considerate *intensionali* e non *estensionali*
    in quanto il valore di verità dipende anche da un 'mondo possibile' o contesto

- Automazione

  Sono *decidibili* (in versione proposizionale)
  Quindi anche il corrispondente frammento di L_{PO} lo è

  Tipicamente, si usano metodi a tableau
  (con regole di inferenza specifiche e *diverse*, a seconda della logica modale)

Semantic Tableau modali

L'idea di base è la stessa dei *Semantic Tableau* per la logica proposizionale

- Formule con *label*

  Tutte le fbf φ che compaiono nel tableau modale hanno una *label*

  $\sigma :: \varphi$

  La label è σ: è formata da una sequenza di numeri, separate da un punto

  Esempio:

  1.1.2 :: $\Box\,(A \rightarrow B)$

  Con la notazione $\sigma.n$ si intende una *label* formata a partire da σ aggiungendo un numero

  Per convenzione, tutte le label di un tableau hanno come primo numero 1

- Formule con *label e stato*

  Ciascuna fbf con *label* $\sigma :: \varphi$ in un tableau ha uno stato associato:

  Stati possibili:

  1) awake (a)
  2) asleep (s)
  3) finished (f)

Semantic Tableau modali

L'idea di base è la stessa dei *Semantic Tableau* per la logica proposizionale

- Regole *PC*

  Le stesse regole alfa e beta della logica proposizionale

  Regole alfa (o di espansione)

  (a1)

  $$\begin{array}{c} \sigma :: \neg(\neg\varphi) \\ | \\ \sigma :: \varphi \end{array}$$

  (a2)

  $$\begin{array}{c} \sigma :: \varphi \land \psi \\ | \\ \sigma :: \varphi, \sigma :: \psi \end{array}$$

  Regole beta (o di biforcazione)

  (b1)

  $$\begin{array}{ccc} & \sigma :: \varphi \lor \psi & \\ \swarrow & & \searrow \\ \sigma :: \varphi & & \sigma :: \psi \end{array}$$

Per semplicità, in molti testi si considerano solo le regole alfa e beta per $\land$, $\lor$ *e* $\neg$ *e si assume che le fbf vengano tradotte in forma opportuna*

Semantic Tableau modali

L'idea di base è la stessa dei *Semantic Tableau* per la logica proposizionale

- Regole ν

  Sono regole modali che corrispondono agli assiomi (con alcune eccezioni)

  Sono tutte regole alfa (o di espansione)

(K)

$$\begin{array}{c} \sigma :: \Box\, \varphi \\ | \\ \sigma.n :: \varphi \end{array}$$

(D)

$$\begin{array}{c} \sigma :: \Box\, \varphi \\ | \\ \sigma.n :: \neg\Box\neg\varphi \end{array}$$

(T)

$$\begin{array}{c} \sigma :: \Box\, \varphi \\ | \\ \sigma.n :: \varphi \end{array}$$

(B)

$$\begin{array}{c} \sigma.n :: \neg\Box\, \varphi \\ | \\ \sigma :: \neg\varphi \end{array}$$

(4)

$$\begin{array}{c} \sigma :: \Box\, \varphi \\ | \\ \sigma.n :: \Box\, \varphi \end{array}$$

(5)

$$\begin{array}{c} 1 :: \Box\, \varphi \\ | \\ 1.n :: \Box\Box\, \varphi \end{array}$$

(4r)

$$\begin{array}{c} \sigma.n :: \Box\, \varphi \\ | \\ \sigma :: \Box\, \varphi \end{array}$$

(4d)

$$\begin{array}{c} \sigma.n :: \Box\, \varphi \\ | \\ \sigma.n.m :: \Box\, \varphi \end{array}$$

NOTA:
Le regole ν non creano nuove label
Quindi in $\sigma.n$ la n deve già esistere nel ramo

Semantic Tableau modali

L'idea di base è la stessa dei *Semantic Tableau* per la logica proposizionale

- Regole π

  E' una regola modale che crea nuove *label*

  E' una regola alfa (o di espansione)

$$(\pi)$$

$$\begin{array}{c} \sigma :: \neg\Box\,\varphi \\ | \\ \sigma.n :: \neg\varphi \end{array}$$

In $\sigma.n$ la n deve essere <u>nuova</u> nel ramo

Semantic Tableau modali

- Fate il vostro metodo a tableau

  A seconda della logica modale, si utilizza un set di regole diverso

$\mathcal{L}CL$	**PC**-Rules	ν-Rules	π-Rule
$\mathcal{L}CPC$	$(l\neg), (l\wedge), (l\vee)$	—	—
$\mathcal{L}CK$	$\mathcal{L}CPC$	(lK)	$(l\pi)$
$\mathcal{L}CT$	$\mathcal{L}CPC$	$(lK), (lT)$	$(l\pi)$
$\mathcal{L}CD$	$\mathcal{L}CPC$	$(lK), (lD)$	$(l\pi)$
$\mathcal{L}CKB$	$\mathcal{L}CPC$	$(lK), (lB)$	$(l\pi)$
$\mathcal{L}CK4$	$\mathcal{L}CPC$	$(lK), (l4)$	$(l\pi)$
$\mathcal{L}CK5$	$\mathcal{L}CPC$	$(lK), (l4^d), (l4^r), (l5)$	$(l\pi)$
$\mathcal{L}CKDB$	$\mathcal{L}CPC$	$(lK), (lB), (lD)$	$(l\pi)$
$\mathcal{L}CKD5$	$\mathcal{L}CPC$	$(lK), (lD), (l4^d), (l4^r), (l5)$	$(l\pi)$
$\mathcal{L}CK4D$	$\mathcal{L}CPC$	$(lK), (lD), (l4)$	$(l\pi)$
$\mathcal{L}CK45$	$\mathcal{L}CPC$	$(lK), (l4), (l4^r), (l5)$	$(l\pi)$
$\mathcal{L}CK45D$	$\mathcal{L}CPC$	$(lK), (l4), (l4^r), (l5), (lD)$	$(l\pi)$
$\mathcal{L}CK4B$	$\mathcal{L}CPC$	$(lK), (lB), (l4), (l4^r)$	$(l\pi)$
$\mathcal{L}CB$	$\mathcal{L}CPC$	$(lK), (lT),(lB)$	$(l\pi)$
$\mathcal{L}CS4$	$\mathcal{L}CPC$	$(lK), (lT), (l4)$	$(l\pi)$
$\mathcal{L}CS5$	$\mathcal{L}CPC$	$(lK), (lT), (l4), (l4^r)$	$(l\pi)$

R. Goré
"Tableau Methods for Modal and Temporal Logics"

Semantic Tableau modali

- Algoritmo

Stage 1: Put the labelled formulae $1 :: A_i$, $1 \leq i \leq n$, in a vertical linear sequence of nodes, one beneath the other, in some order and mark them all as awake.

While the tableau is open and some formula is awake do:

Begin Stage n+1: Choose an awake labelled formula $\sigma :: A$ as close to the root as possible. If there are several awake formulae at the same level then choose the one on the leftmost branch. If $\sigma :: A$ is atomic then mark this formula as finished and stop stage $n+1$. Otherwise update the tableau as follows where 'updating a branch with a labelled formula' means adding the formula to the end of the branch and marking it as awake if it does not already appear on the branch (with any mark), but doing nothing if the formula already appears on the branch (with any mark). For every *open* branch B which passes through $\sigma :: A$, do:

($\wedge$) if $\sigma :: A$ is of the form $\sigma :: P \wedge Q$ then update B with $\sigma :: P$ and then update the new B with $\sigma :: Q$;

($\vee$) if $\sigma :: A$ is of the form $\sigma :: \neg(P \wedge Q)$ then split the end of B and update the left fork with $\sigma :: \neg P$ and update the right fork with $\sigma :: \neg Q$. If any of these updates fails to add the corresponding formula then delete that fork, possibly leaving B unaltered or with no fork;

($\neg$) if $\sigma :: A$ is of the form $\sigma :: \neg\neg P$ then update B with $\sigma :: P$;

(ν) if $\sigma :: A$ is of the form $\sigma :: \Box P$ then, for every ν-rule rule in the calculus which is applicable to $\sigma :: \Box P$, update B with the corresponding denominator;

(π) if $\sigma :: A$ is of the form $\sigma :: \neg\Box P$ then let k be the smallest integer such that the label σk is new on branch B, update B with $\sigma k :: \neg P$, and mark all formula on B of the form $\sigma :: \Box Q$ as awake;

End Stage n+1: Once this has been done for every open branch that passes through $\sigma :: A$, if $\sigma :: A$ is of the form $\sigma :: \Box P$ then mark it as asleep, otherwise mark $\sigma :: A$ as finished, and terminate Stage n+1.

Da R. Goré
"Tableau Methods for Modal and Temporal Logics"

Semantic Tableau modali

- Esempio

Da R. Goré
"Tableau Methods for Modal and Temporal Logics"

Systematic $\mathcal{LCK}$-tableau for $X = \{\Box(p \to q), \neg(\Box p \to \Box q)\}$

Extant Tableau at Stage End	Marks at Stage End 1	2	3	4	5	6	7	8	9
$1 :: \Box(p \to q)$	a	s	s	s	s/a	s	s	s	s
$1 :: \neg(\Box p \to \Box q)$	a	a	f	f	f	f	f	f	f
$1 :: \Box p$			a	s	s/a	a	s	s	s
$1 :: \neg\Box q$			a	a	f	f	f	f	f
$1.1 :: \neg q$					a	a	a	f	f
$1.1 :: p \to q$						a	a	a	f
$1.1 :: p$							a	a	a
$1.1 :: \neg p$									a
$1.1 :: \neg\neg q$									a
(closed) (closed)									

Logiche modali e L_{PO}

- L'operatore modale $\Box$ è comunque un quantificatore

  L_{MP} corrisponde infatti ad un frammento (un sotto-insieme) di L_{PO}

  Regole di traduzione standard (*Standard Translation*)

  $ST_x(A) = A(x)$ (da proposizione a predicato unario, x variabile libera)

  $ST_x(\neg\varphi) = \neg ST_x(\varphi)$

  $ST_x(\varphi \to \psi) = ST_x(\varphi) \to ST_x(\psi)$

  $ST_x(\Box\,\varphi) = \forall y\,(R(x,y) \to ST_y(\varphi))$ (notare l'uso di y in ST_y, y vincolata)

  $ST_x(\Diamond\,\varphi) = \exists y\,(R(x,y) \wedge ST_y(\varphi))$ (notare l'uso di y in ST_y, y vincolata)

  Esempio: $ST_x(A \to \Diamond A)$
  $$\begin{aligned} &= ST_x(A) \to ST_x(\Diamond A)\\ &= A(x) \to ST_x(\Diamond A)\\ &= A(x) \to \exists y\,(R(x,y) \wedge ST_y(A))\\ &= A(x) \to \exists y\,(R(x,y) \wedge A(y)) \end{aligned}$$

  In generale, una fbf modale φ è K-*valida* sse $\forall x\, ST_x(\varphi)$ è *valida* in L_{PO}

  La fbf $A \to \Diamond A$ è K-valida sse $\forall x\,(A(x) \to \exists y\,(R(x,y) \wedge A(y)))$ è valida in L_{PO}

  Per la validità in altre logiche (p.es. KD45) basta aggiungere assiomi per $R(x,y)$

Logiche modali e L_{PO}

- Frammenti decidibili di L_{PO}

  Il metodo dei *Semantic Tableau* modali è corretto e completo
  per molte logiche modali proposizionali (in particolare, per tutte quelle viste qui)

  Il metodo dei *Semantic Tableau* modali è una procedura di decisione:
  ne segue che queste stesse logiche sono *decidibili*

  La regola di traduzione standard (*Standard Translation*) stabilisce una corrispondenza tra logiche modali e sottoinsiemi di L_{PO}

  In generale, L_{PO} è solo *semi*-decidibile, anche nella forma limitata alle clausole di Horn

  Morale: esistono sottoinsiemi di L_{PO} (in particolare, quelli corrispondenti a logiche modali) che sono *decidibili*

  Questa è l'idea di base per la definizione delle Description Logics (per il Semantic Web)

Logiche modali del primo ordine

Le estensioni modali della logica del primo ordine sono assai complesse

- Predicati, variabili e quantificatori

  Consideriamo un linguaggio logico del primo ordine senza funzioni e costanti

  Aggiungiamo i simboli modali $\Box$ e $\Diamond$

  Esempi di fbf:

$\exists x\ P(x)$	Esiste un oggetto del dominio del discorso che è P
$\Box\ \exists x\ P(x)$	L'agente sa che esiste un oggetto del dominio del discorso è P
$\exists x\ \Box\ P(x)$	Esiste un oggetto del dominio del discorso di cui l'agente sa che è P

Logiche modali del primo ordine

Le estensioni modali della logica del primo ordine sono assai complesse

- Predicati, variabili e quantificatori

  Consideriamo un linguaggio logico del primo ordine senza funzioni e costanti

  Aggiungiamo i simboli modali $\Box$ e $\Diamond$

  Esempi di fbf:

$\exists x\ P(x)$	Esiste un oggetto del dominio del discorso che è P
$\Box\ \exists x\ P(x)$	L'agente sa che esiste un oggetto del dominio del discorso è P
$\exists x\ \Box\ P(x)$	Esiste un oggetto del dominio del discorso di cui l'agente sa che è P

  Semantica informale:

$\exists x\ P(x)$	In qualsiasi modello della fbf esiste un oggetto di D che appartiene a $P/1$
$\Box\ \exists x\ P(x)$	In tutti i mondi accessibili esiste un oggetto di D che appartiene a $P/1$

$\exists x\ \Box\ P(x)$	Esiste un oggetto di D che appartiene a $P/1$ in tutti i mondi accessibili

Logiche modali del primo ordine

Le estensioni modali della logica del primo ordine sono assai complesse

- Predicati, variabili e quantificatori

  Consideriamo un linguaggio logico del primo ordine senza funzioni e costanti

  Aggiungiamo i simboli modali $\Box$ e $\Diamond$

  Esempi di fbf:

$\exists x\ P(x)$	Esiste un oggetto del dominio del discorso che è P
$\Box\ \exists x\ P(x)$	L'agente sa che esiste un oggetto del dominio del discorso è P
$\exists x\ \Box\ P(x)$	Esiste un oggetto del dominio del discorso di cui l'agente sa che è P

  Semantica informale:

  $\exists x\ P(x)$ In qualsiasi modello della fbf esiste un oggetto di D che appartiene a $P/1$

  $\Box\ \exists x\ P(x)$ In tutti i mondi accessibili esiste un oggetto di D che appartiene a $P/1$

  Ma D è lo stesso dominio in tutti i mondi accessibili? In tutto W?

  L'oggetto di D che appartiene a $P/1$ è diverso a seconda del mondo?

  $\exists x\ \Box\ P(x)$ Esiste un oggetto di D che appartiene a $P/1$ in tutti i mondi accessibili

  L'estensione di $P/1$ (=il sottoinisieme di D che v associa a $P/1$) è la stessa in tutti i mondi?

  Se così non è, la fbf dice che tutte le estensioni hanno un elemento in comune.

Logiche modali del primo ordine

Un'ulteriore ipotesi restrittiva, per semplificare le cose

- Modelli a dominio costante

Una **struttura** (*frame*) $<\mathbf{W}, R>$: *definizione identica al caso proposizionale*

- R è una relazione binaria (=sottoinsieme di $\mathbf{W}^2$) che definisce l'accessibilità tra mondi

Un **modello** (*model*) $<\mathbf{W}, \mathrm{D}, R, v>$:

- $\mathbf{W}$ è un insieme di punti detti anche 'stati' o 'mondi possibili'
- D è un insieme di oggetti (dominio)
- R è una relazione binaria (=sottoinsieme di $\mathbf{W}^2$) che definisce l'accessibilità tra mondi
- v è una funzione che assegna un significato al linguaggio in ciascun mondo $w \in \mathbf{W}$
  In questo caso, la funzione v assegna, in ciascun mondo, a ciascun *simbolo predicativo* una *relazione* definita su D

  $v(\,P/n, w\,) \subseteq \mathrm{D}^n$ (P simbolo predicativo avente arità n)

Si assume quindi che D sia lo stesso in tutto $\mathbf{W}$

Logiche modali del primo ordine

- Formule e proprietà corrispondenti

  Dato che la definizione di struttura (*frame)* è identica,
  si hanno le stesse corrispondenze della logica modale proposizionale

  K: $\Box (\varphi \to \psi) \to (\Box \varphi \to \Box \psi)$

  D: $\Box \varphi \to \neg\Box \neg\varphi$ la relazione R è *seriale* ($\forall w\ \exists u,\ wRu$)

  T: $\Box \varphi \to \varphi$ la relazione R è *riflessiva* ($\forall w,\ wRw$)

  4: $\Box \varphi \to \Box\Box \varphi$ la relazione R è *transitiva* ($wRu,\ uRs \Rightarrow wRs$)

  5: $\neg\Box \neg\varphi \to \Box\neg\Box \neg\varphi$ la relazione R è *euclidea* ($wRu,\ wRs \Rightarrow uRs$)

  B: $\varphi \to \Box\neg\Box \neg\varphi$ la relazione R è *simmetrica* ($wRu \Rightarrow uRw$)

  La scelta di diverse combinazioni determina logiche diverse: K4, KD45, KT45≡S5

Logiche modali del primo ordine

- Formule e proprietà corrispondenti

  Dato che la definizione di struttura (*frame)* è identica,
  si hanno le stesse corrispondenze della logica modale proposizionale

  K: $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

  D: $\Box\varphi \to \neg\Box\neg\varphi$ — la relazione R è *seriale* $(\forall w\ \exists u,\ wRu)$

  T: $\Box\varphi \to \varphi$ — la relazione R è *riflessiva* $(\forall w,\ wRw)$

  4: $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ — la relazione R è *transitiva* $(wRu,\ uRs \Rightarrow wRs)$

  5: $\neg\Box\neg\varphi \to \Box\neg\Box\neg\varphi$ — la relazione R è *euclidea* $(wRu,\ wRs \Rightarrow uRs)$

  B: $\varphi \to \Box\neg\Box\neg\varphi$ — la relazione R è *simmetrica* $(wRu \Rightarrow uRw)$

  La scelta di diverse combinazioni determina logiche diverse: K4, KD45, KT45≡S5

  Se il dominio è costante, sono valide anche le due seguenti fbf

  $\forall x\, \Box\varphi \to \Box\forall x\, \varphi$ (formula di Barcan)
  $\Diamond\exists x\, \varphi \to \exists x\, \Diamond\varphi$ (equivalente)

  $\Box\forall x\, \varphi \to \forall x\, \Box\varphi$ (formula di Barcan inversa)
  $\exists x\, \Diamond\varphi \to \Diamond\exists x\, \varphi$ (equivalente)

  (se sono valide entrambe, le coppie di quantificatore/simbolo modale 'commutano')

Logiche modali del primo ordine

- Predicati *rigidi* e non
  - Un predicato P/n si dice *rigido* se ha la stessa estensione in ogni mondo
    - In altri termini, se il valore assegnato da v
      $v(P/n, w) \subseteq D^m$
      non dipende da w
  - Perché volere un predicato *rigido*?
    - Si consideri il caso dell'identità: $=/2$ (simbolo predicativo ad arità 2)
    - Si vorrebbe che
      $v(=/2, w) = \{<d,d>, \forall d \in D\}$
    - vale a dire, che la relazione assegnata fosse indipendente da w
  - Perché volere un predicato *non rigido*?
    - Si considerino predicati come $Bello/1$, $Alto/1$, $Simpatico/2$
    - E' possibile che si voglia rappresentare l'estensione come non fissa a priori, ma variabile *a seconda del contesto* (inteso come mondo possibile).

Logiche modali del primo ordine

- Costanti *rigide* e non

  Una costante c si dice *rigida* se indica lo stesso oggetto in ogni mondo

  In altri termini, se il valore assegnato da v

  $v(c, w) \in D$

  non dipende da w

  Perché volere costanti *rigide*?

  I numeri: $1, 2, \pi, \infty$

  In un linguaggio logico sono *costanti*, e non si vuole che il significato cambi

  Perché volere costanti *non rigide*?

  Si assuma che l'agente consideri c come il numero di abitanti del pianeta

  Date le regole semantiche (vedi sopra) c ha un valore in qualsiasi mondo

  $\Box (c > 6 \times 10^9) \land \neg\Box (c > 6.2 \times 10^9) \land \Diamond (c > 6.2 \times 10^9)$

  "L'agente sa che $c > 6 \times 10^9$*, non sa se* $c > 6.2 \times 10^9$ *ma lo ritiene possibile"*

  Se tutte le costanti fossero rigide, questa fbf modale non avrebbe un modello

  In un ambito probabilistico, con alcune condizioni ulteriori,
  c potrebbe essere definita una **variabile aleatoria**