Intelligenza Artificiale II

Automi cellulari

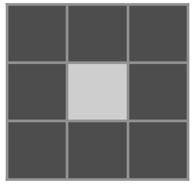
The presentation of Conway's construction by Martin Gardner in the October 1970 issue of Scientific American made it so famous that, in 1974, Time magazine even complained about how much computer time could be wasted because "growing hordes of fanatics" spent their office days playing with the new "toy“
[Rennard, 2002]

Introduzione

Marco Piastra

Game of Life (J.H. Conway, 1970)

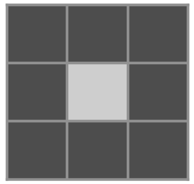
- Universo
  - Reticolo ortogonale infinito di celle quadrate
  - Le celle sono tutte uguali (universo omogeneo)
- Stati
  - Ciascuna cella può essere viva o morta (1 o 0)
- Intorno (di una cella)
  - Ciascuna cella ha un intorno formato dalle otto celle contigue



- Dinamica
  - L'universo si evolve nel tempo, a partire da una configurazione iniziale
  - Evoluzione parallela:
    Ciascuna cella decide il proprio stato futuro in base al proprio stato ed allo stato delle celle nel suo intorno
  - Tempo discreto:
    Ad ogni istante, ciascuna cella dell'universo decide quale stato avrà nell'istante successivo

Game of Life (J.H. Conway, 1970)

- Universo
  - Reticolo ortogonale infinito di celle quadrate
  - Le celle sono tutte uguali (universo omogeneo)
- Stati
  - Ciascuna cella può essere viva o morta (1 o 0)
- Intorno (di una cella)
  - Ciascuna cella ha un intorno formato dalle otto celle contigue

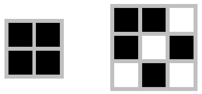


- Dinamica
  - Regole di transizione:
    1) Una cella viva muore se l’intorno contiene meno di due celle vive (*solitudine*)
    2) Una cella viva muore se l’intorno contiene più di tre celle vive (*sovrapopolazione*)
    3) Una cella viva rimane viva se l’intorno contiene due o tre celle vive (*mutuo sostegno*)
    4) Una cella morta con tre celle vive nel suo intorno diventa viva (*genesi*)

Game of Life: configurazioni e dinamica

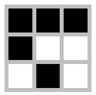
L'aspetto emergente è il comportamento della popolazione di celle vive

- Configurazioni iniziali
  - Il comportamento è completamente determinato dalla configurazione iniziale
- Comportamenti possibili (vedi dimostrazione con Golly)
  - Nessuna variazione



  - Comportamento periodico

  - Altri comportamenti ....



Game of Life: configurazioni e dinamica

L'aspetto emergente è il comportamento della popolazione di celle

- Configurazioni iniziali
  - Il comportamento è completamente determinato dalla configurazione iniziale
- Altre categorie (informali)
  - *Still lifes*
    - Pattern statici o quasi statici
  - *Oscillators*
    - Pattern che si riproducono dopo un certo periodo di tempo
  - *Gliders*
    - Pattern che si 'spostano' nell'universo
  - *Guns*
    - Pattern che 'emettono' *gliders*

Interludio: *Billiard Ball Model* (BBM) (Fredkin & Toffoli, 1992)

- *Una macchina di Turing con le palle da biliardo*

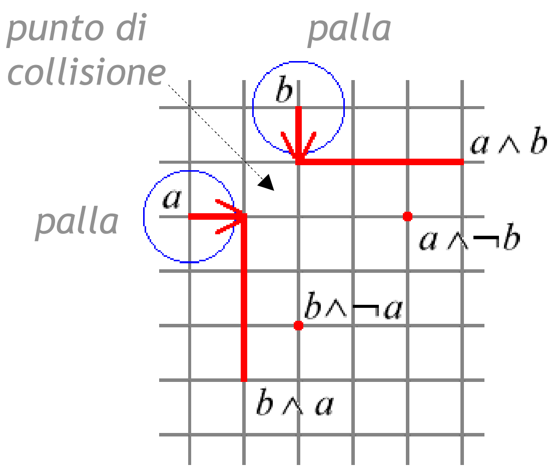
  Le palle, tutte identiche, si muovono su una griglia rettangolare, alla stessa velocità

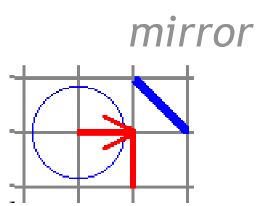
  Le palle sono disposte in modo da urtarsi solo per angoli retti

  Le collisioni sono elastiche: non si perde energia

  Si possono utilizzare dei ‘mirror’ per guidare il percorso delle palle

Gate logico di base

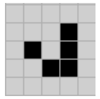




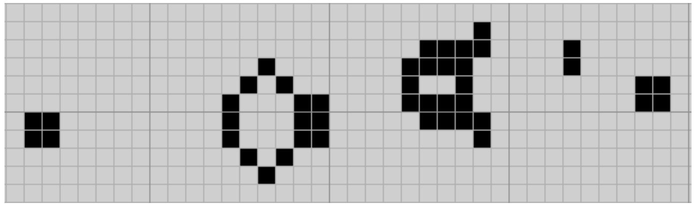
Gate logici nel *Game of Life*

- Componenti di base

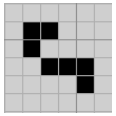
Segnali: *glider*



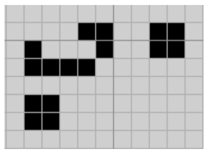
Generatori di segnale: *glider guns*



Interruttori: *stopper*



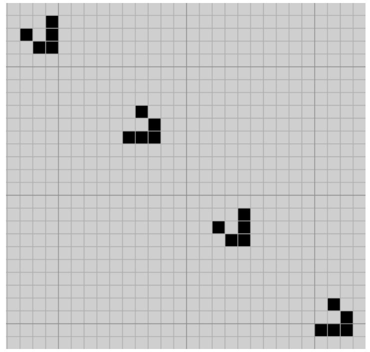
Output: *detector*



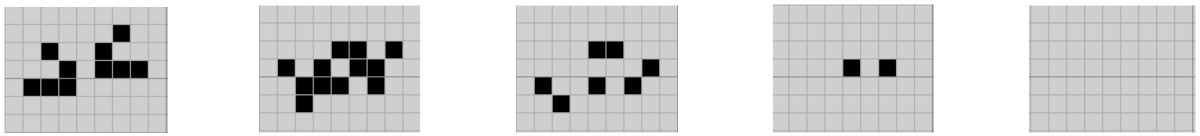
Gate logici nel *Game of Life*

- Meccanismi di base

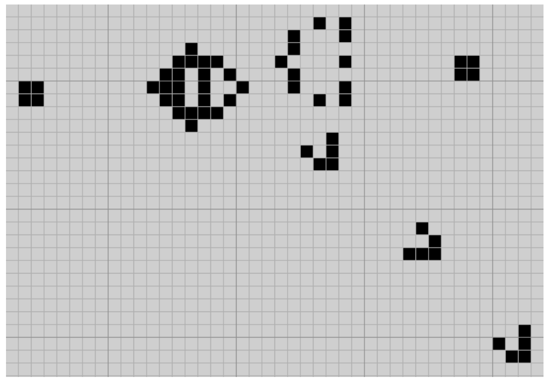
I *glider* si muovono nello spazio seguendo una traiettoria lineare



Nelle collisioni si possono 'annullare' a vicenda



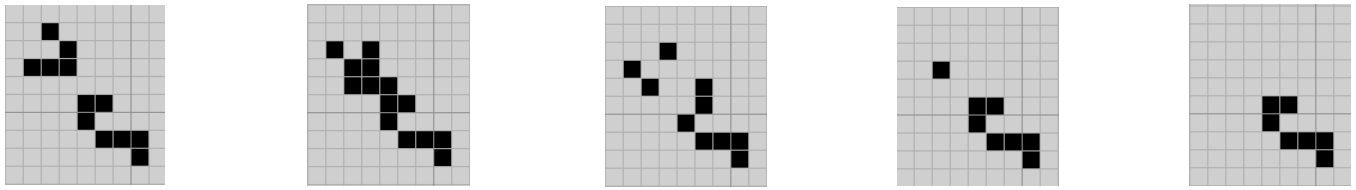
I *glider gun* emettono *glider* in continuazione



Gate logici nel *Game of Life*

- Meccanismi di base

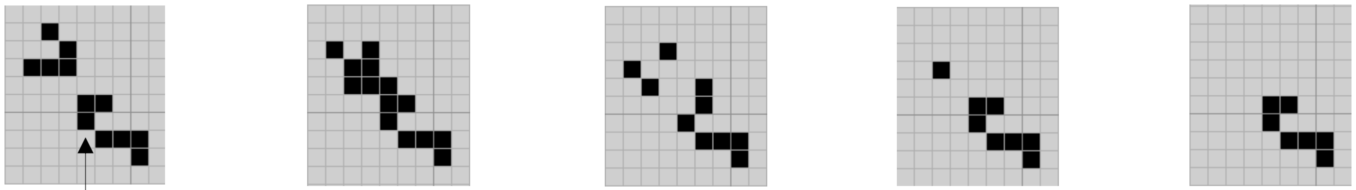
  Gli *stopper* 'assorbono' i *glider*



Gate logici nel *Game of Life*

- Meccanismi di base

Gli *stopper* ‘assorbono’ i *glider*

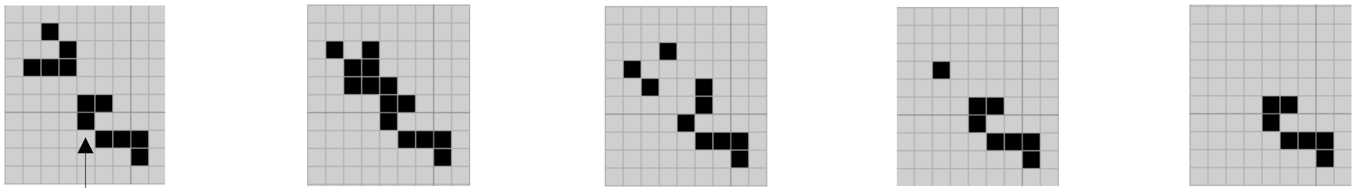


Ma se questa cella è attiva anche lo stopper si annulla (switch)

Gate logici nel *Game of Life*

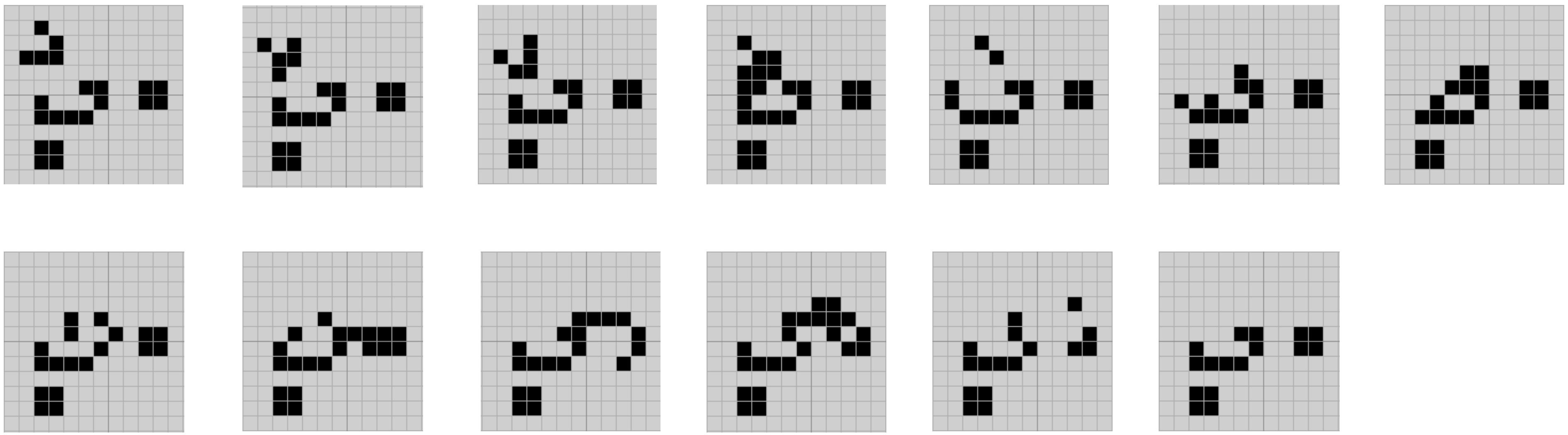
- Meccanismi di base

Gli *stopper* ‘assorbono’ i *glider*



Ma se questa cella è attiva anche lo stopper si annulla (switch)

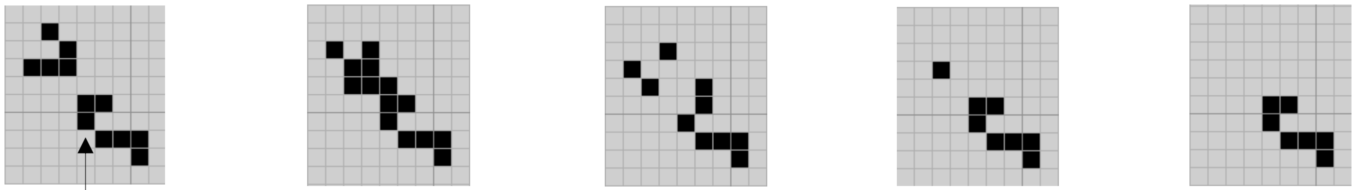
I *detector* ‘assorbono’ i *glider* e cambiano temporaneamente stato



Gate logici nel *Game of Life*

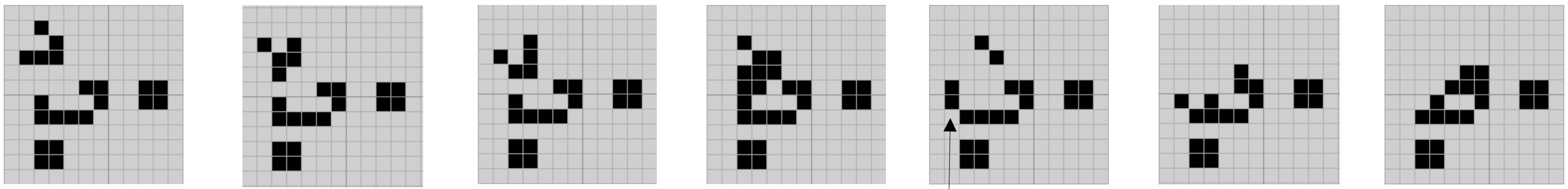
- Meccanismi di base

Gli *stopper* ‘assorbono’ i *glider*

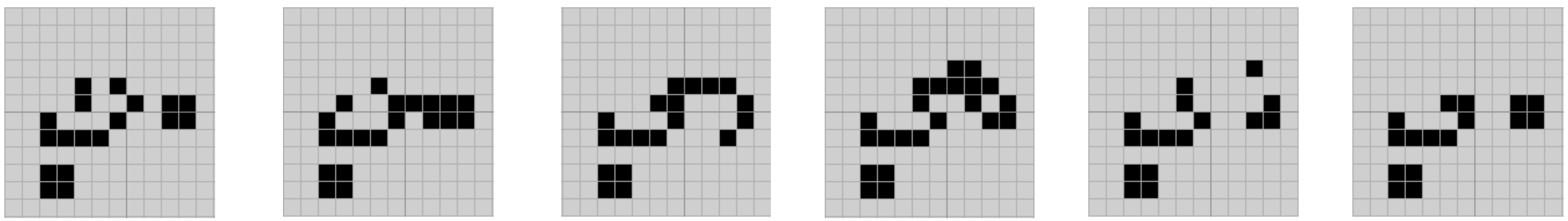


Ma se questa cella è attiva anche lo stopper si annulla (switch)

I *detector* ‘assorbono’ i *glider* e cambiano temporaneamente stato



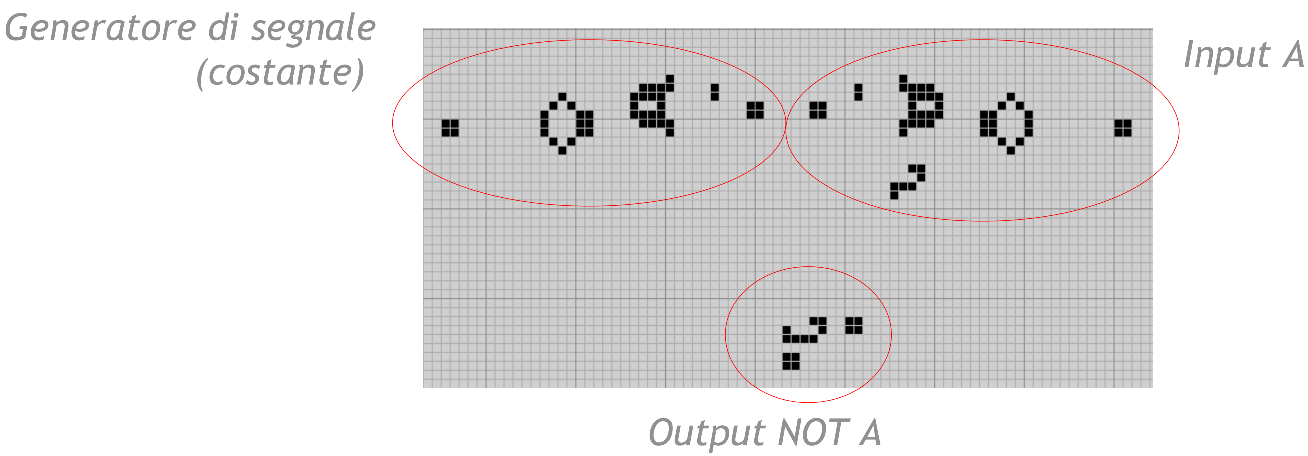
Questa cella si attiva temporaneamente (output)



Gate logici nel *Game of Life*

- Gate NOT

  Due *glider gun*, uno *stopper*, un *detector*

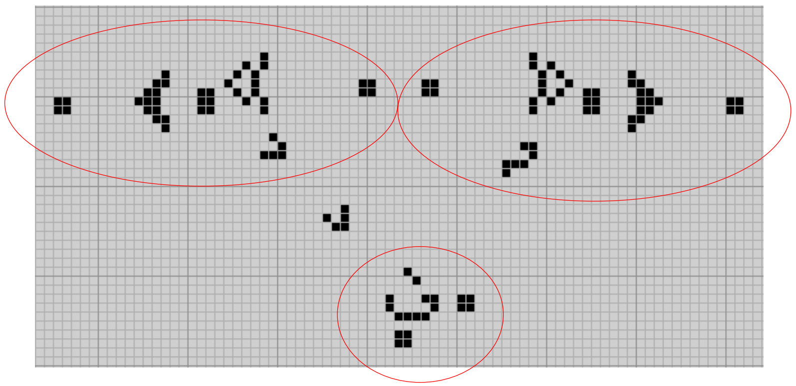


Gate logici nel *Game of Life*

- Gate NOT

  Due *glider gun*, uno *stopper*, un *detector*

Generatore di segnale (costante)



Input A: lo stopper è chiuso il valore è FALSE

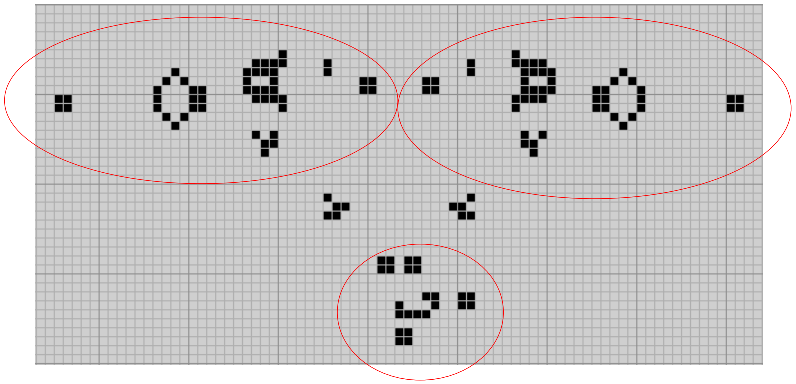
Output NOT A: i segnali del generatore arrivano il valore è TRUE

Gate logici nel *Game of Life*

- Gate NOT

  Due *glider gun*, uno *stopper*, un *detector*

Generatore di segnale (costante)



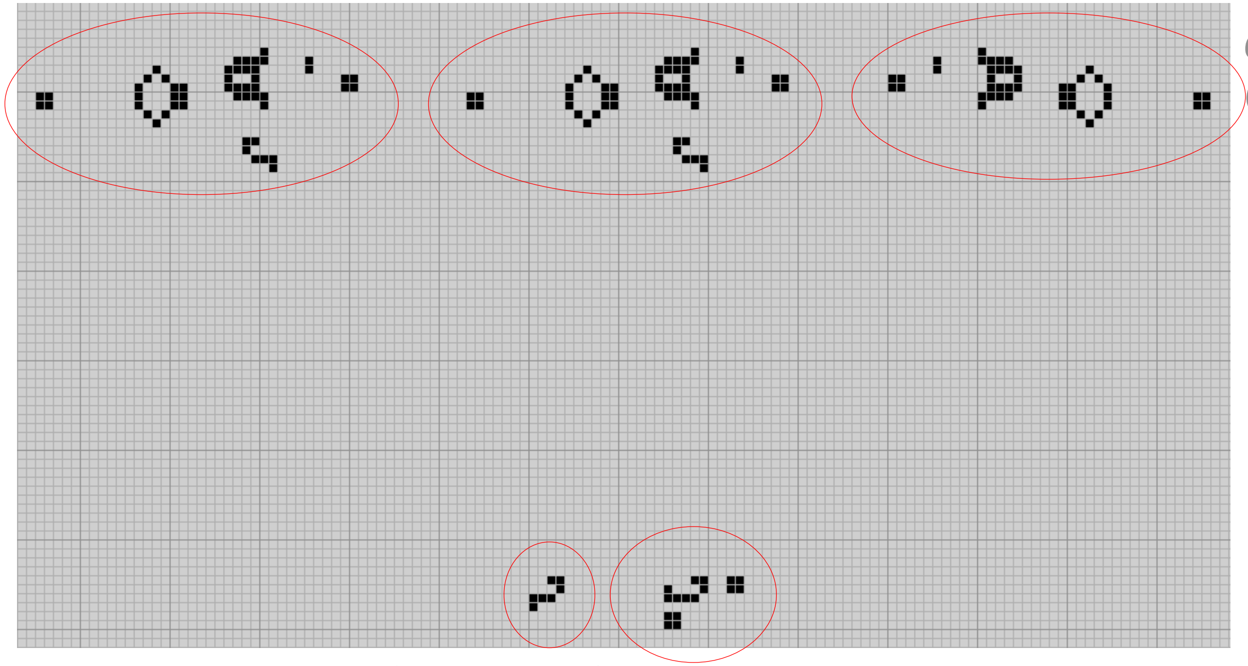
Input A: lo stopper è aperto il valore è TRUE

Output NOT A: i segnali dell'input annullano quelli del generatore il valore è FALSE

Gate logici nel *Game of Life*

- Gate AND

Tre *glider gun*, tre *stopper*, un *detector*



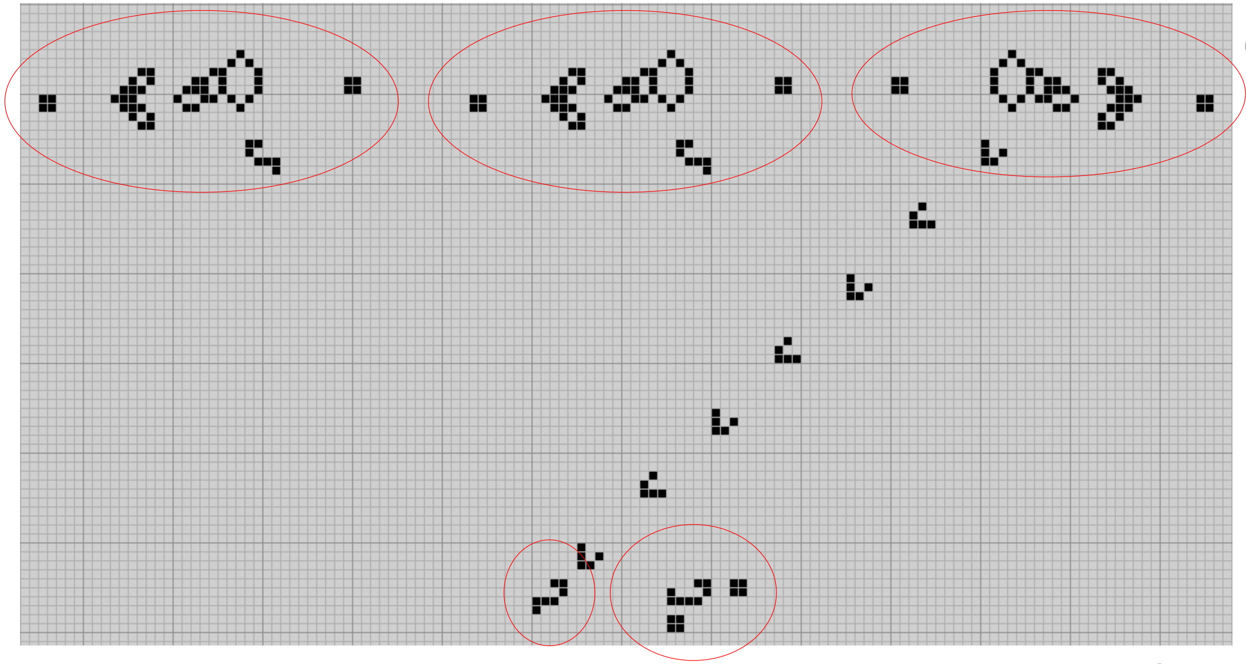
Gate logici nel *Game of Life*

- Gate AND

  Tre *glider gun*, tre *stopper*, un *detector*

Input A: lo stopper è chiuso il valore è FALSE

Input B: lo stopper è chiuso il valore è FALSE



Generatore di segnale (costante)

Stopper: annulla i segnali del generatore

Output A AND B: non arriva segnale il valore è FALSE

Gate logici nel *Game of Life*

- Gate AND

Tre *glider gun*, tre *stopper*, un *detector*

Input A: lo stopper è aperto il valore è TRUE

Input B: lo stopper è chiuso il valore è FALSE

Generatore di segnale (costante)

Stopper: è inattivo

Output A AND B: non arriva segnale il valore è FALSE

Gate logici nel *Game of Life*

- Gate AND

  Tre *glider gun*, tre *stopper*, un *detector*

Input A: lo stopper è chiuso il valore è FALSE

Input B: lo stopper è aperto il valore è TRUE

Generatore di segnale (costante)

Stopper: è inattivo

Output A AND B: non arriva segnale il valore è FALSE

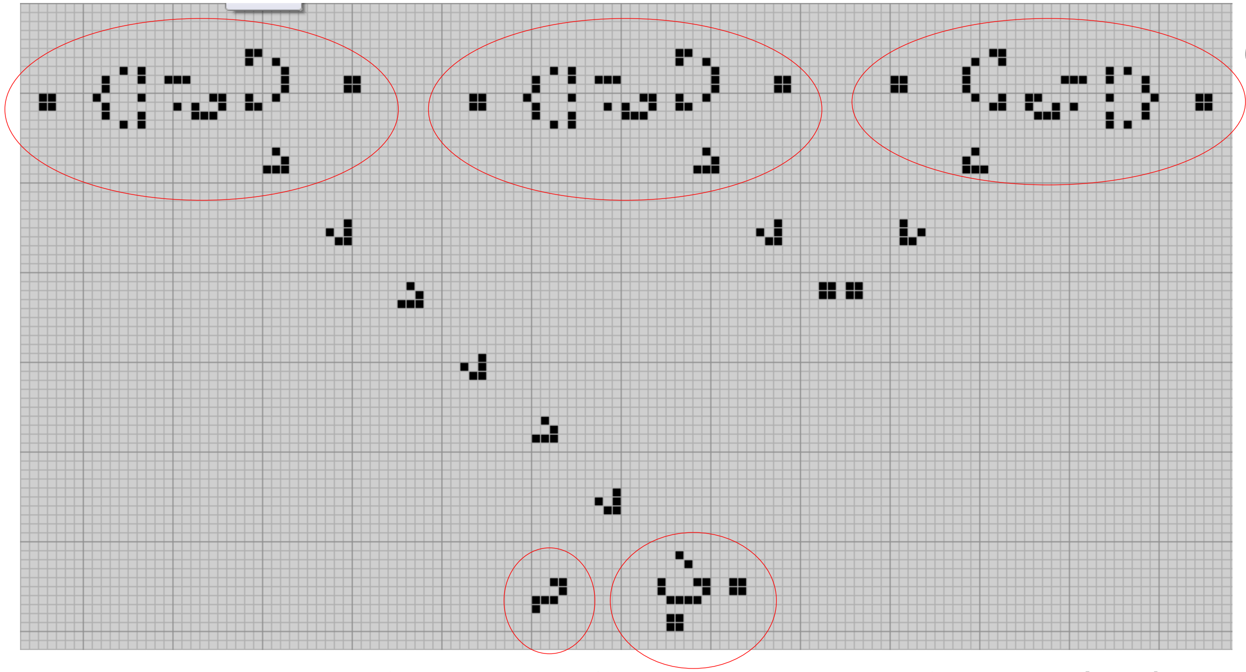
Gate logici nel *Game of Life*

- Gate AND

Tre *glider gun*, tre *stopper*, un *detector*

Input A: lo stopper è aperto il valore è TRUE

Input B: lo stopper è aperto il valore è TRUE



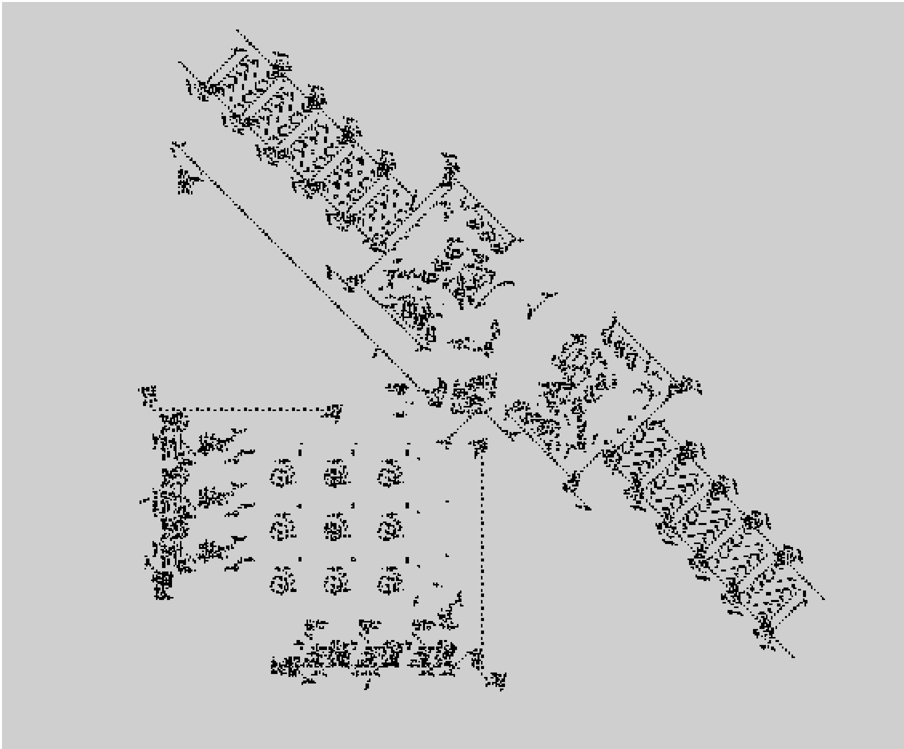
Generatore di segnale (costante)

Stopper: è inattivo

Output A AND B: arriva segnale (da A) il valore è TRUE

Gate logici nel *Game of Life*

- Macchina di Turing
  - Per combinazione di *gate*



Classi di automi cellulari (secondo Wolfram, 1984)

Classificazione basata sul comportamento, non sulla struttura o le regole

- Classe 1: *uniformi*

  Dopo un numero finito di passi, l'automa tende ad un'unica configurazione stabile, a partire da quasi tutte le configurazioni iniziali

- Classe 2: *periodici*

  L'automa produce schemi che si ripetono periodicamente, all'infinito (probabilmente equivalente alla classe degli automi a stati finiti)

- Classe 3: *caotici*

  L'automa produce schemi aperiodici e/o caotici (assomigliano a rumor bianco), che hanno proprietà statistiche quasi identiche alle configurazioni iniziali, almeno dopo un certo numero di passi (configurazioni auto-simili).

- Classe 4: *complessi*

  L'automa produce schemi periodici e comportamenti caotici nello spazio e nel tempo.

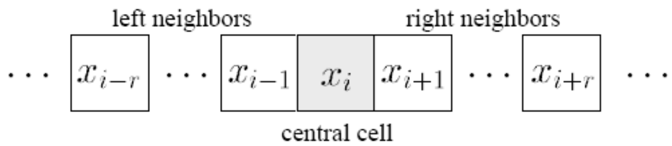
Automi unidimensionali

- Un anello di celle identiche c_i
  - Insieme (finito) di stati Σ, $k = |\Sigma|$
  - Raggio del vicinato r
  - Funzione di transizione $\varphi : \Sigma^{2k+1} \rightarrow \Sigma$

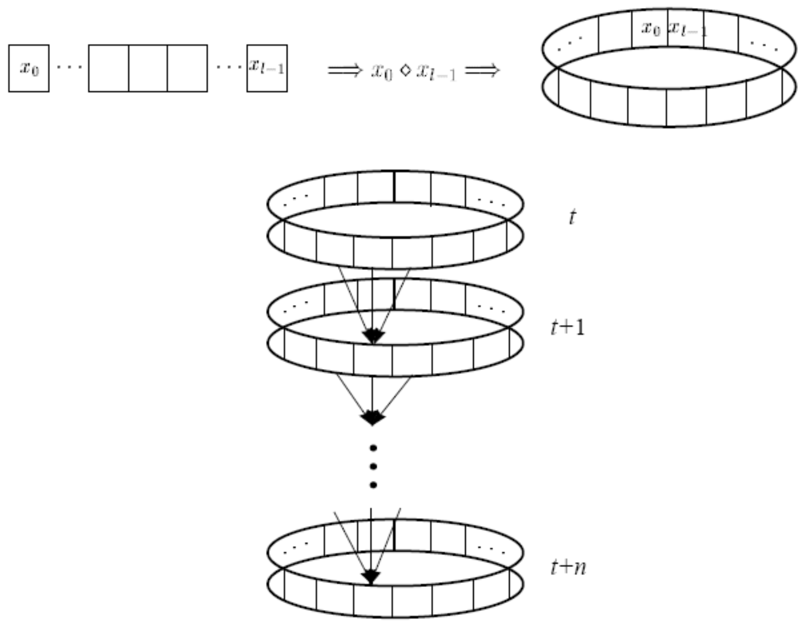
Cellular Automata of order (k,r)

$$\{\Sigma,\ r,\ \varphi,\ c_i\}$$

Neighborhood in one dimension



Dynamics in one-dimension

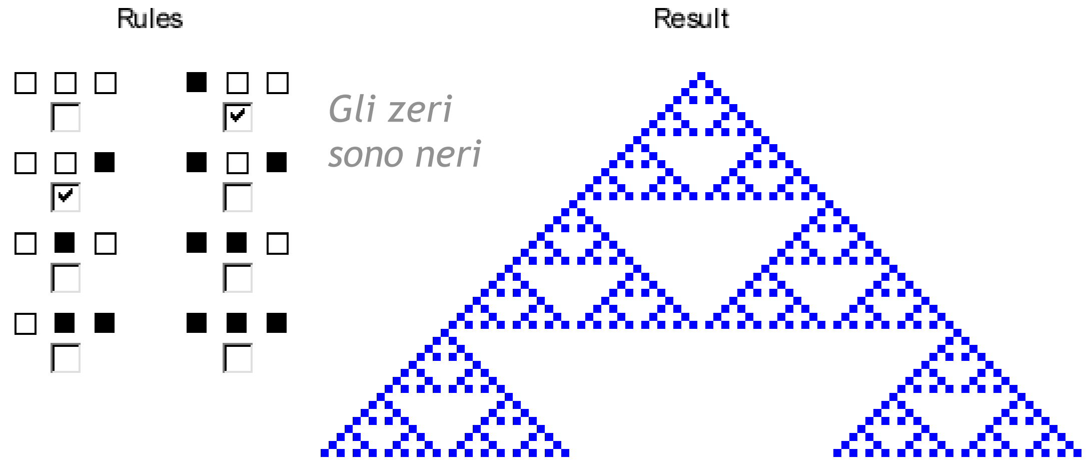


Automi unidimensionali di ordine 2,1

- Due stati, una cella di intorno per lato
  - 256 possibile funzioni di transizione φ

Stato precedente	1 1 1	1 1 0	1 0 1	1 0 0	0 1 1	0 1 0	0 0 1	0 0 0
Nuovo stato	1	0	1	1	0	1	1	1

- Assumendo un ordinamento standard, ciascuna funzione è descritta da otto bit
  - Nell'esempio è 10110111 (Regola 183)
  - Lo stato iniziale della riga è l'unico input
  - La traccia dell'esecuzione è formata dalla lista degli stati successivi della riga



(usare l'applet al link:
http://www.alesdar.org/oldSite/IS/OneDCA/OneDCA.html)

Automi unidimensionali e classi

- Classe 1

  Regola 32: 00100000

  Regola 160: 10100000

- Classe 2

  Regola 33: 00100001

- Classe 3

  Regola 126: 01111110

  Regola 30: 00011110

- Classe 4

  Regola 110: 01101110

La regola 110

- *Gli automi di classe 4 sono macchine di Turing universali?*

    L'ipotesi viene formulata da S. Wolfram già negli anni 80

    Egli propone la regola 110 come candidata

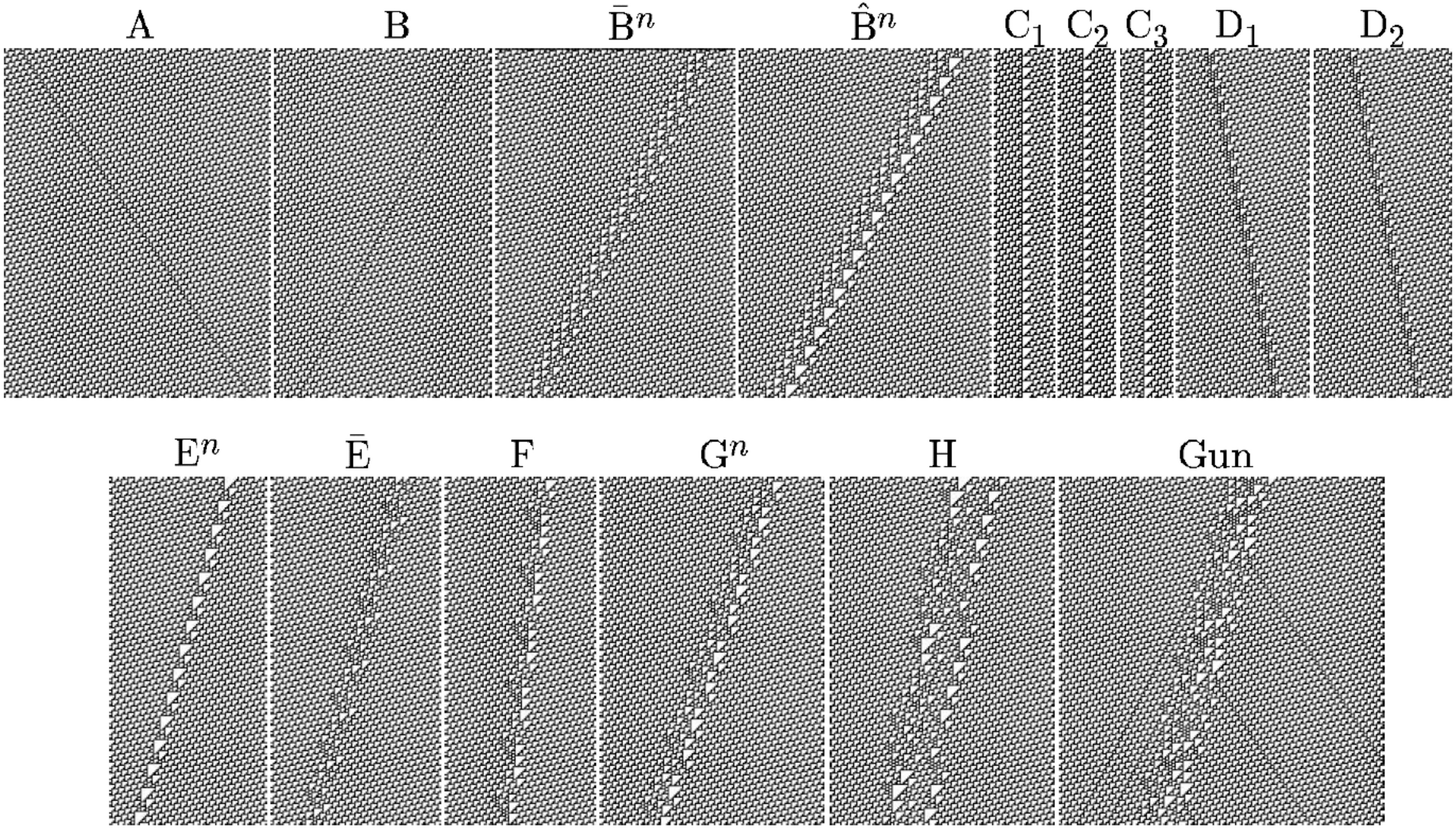
  Nel 1999 Matthew Cook dimostra che la regola 110 è in effetti universale

    Anche negli automi realizzati dalla regola 110 ci sono "*guns and gliders*"

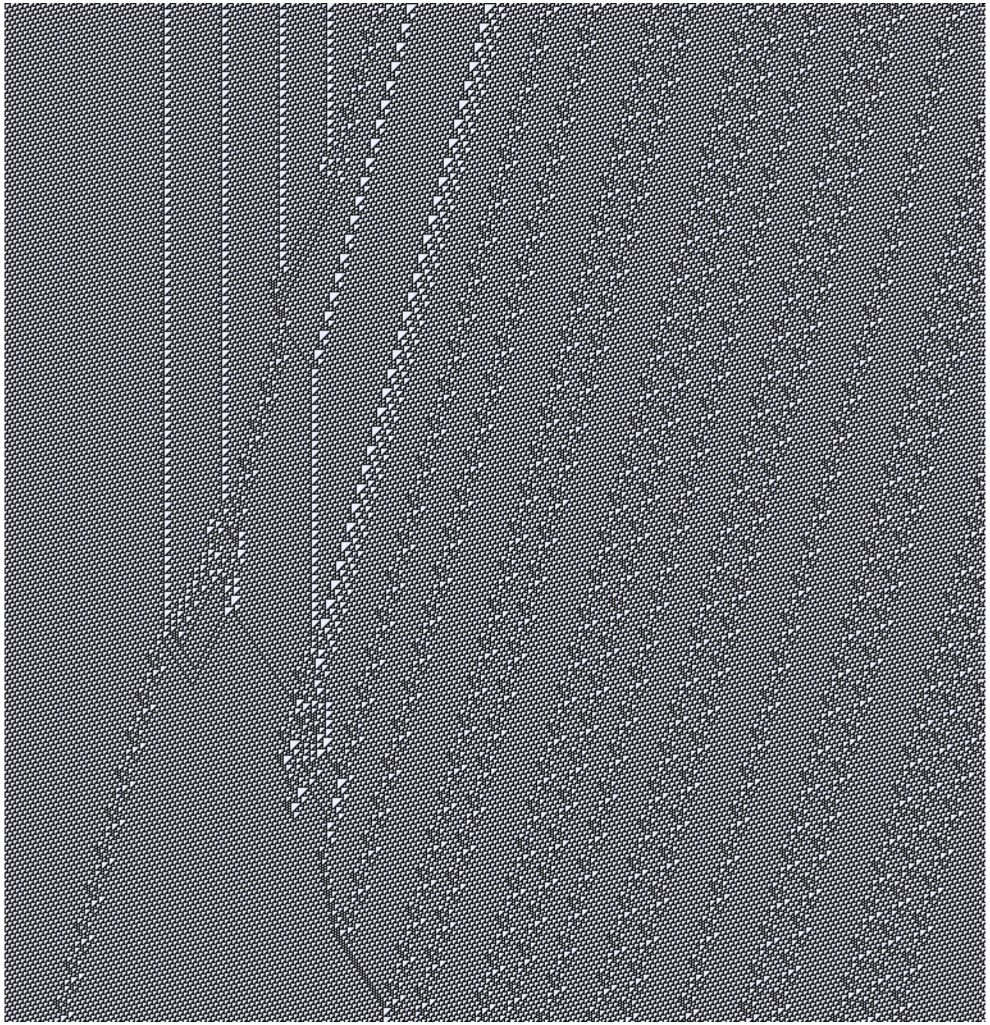
    Sfruttando le tipologie di collisioni tra *gliders* si può emulare un sistema di calcolo universale (un *Cyclic Tag System*)

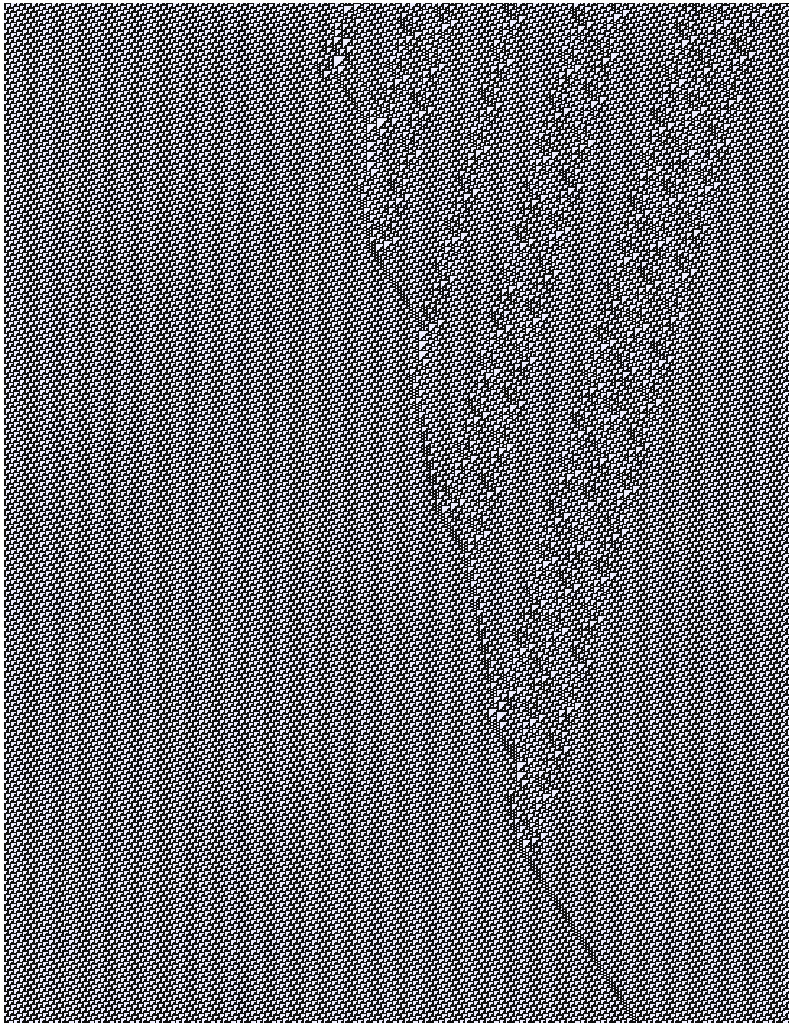
    (*Un'altra candidata notevole è la regola 54 – non si conosce la risposta*)

Guns & Gliders nella regola 110 (Cook, 1999)



Collisioni nella regola 110





Automi cellulari in generale

- Un spazio di celle identiche $\{c_i\}$, dove $i \subseteq Z^d$
    - Dove d è la dimensione dello spazio
- Insieme (finito) di *stati* Σ, $k = |\Sigma|$
    - Talvolta uno degli stati è definito come *quiescente*
- Una *configurazione* c dello spazio delle celle è una funzione $c : Z^d \to \Sigma$
    - Associa celle a stati
    - Una configurazione costante (tutte le celle nello stesso stato) è anche detta *omogenea*
- Funzione *locale* di transizione $\varphi : \Sigma^r \to \Sigma$
    - Dove r è la dimensione dell'*intorno* della cella
    - La definizione di φ dipende anche dalla definizione della topologia dell'*intorno* delle celle
- Funzione *globale* di transizione $G : C \to C$
    - Dove C è lo spazio di tutte le possibili configurazioni di $\{c_i\}$

Automi cellulari: definizioni

- Configurazione spazialmente periodica

  E' invariante rispetto ad una determinata traslazione nello spazio

  $$c(c_i) = c(c_i + T)$$

  Dove T è una specifica traslazione nello spazio

- Configurazione temporalmente periodica

  E' invariante rispetto ad una determinata traslazione nello spazio

  $$G(c) = G^p(c)$$

  La funzione globale di transizione 'si ripete' con periodo p

- *Nilpotenza*

  Se esiste una configurazione c ed un numero n tali per cui

  $$G^n(e) = c$$

  Per qualsiasi configurazione di partenza e

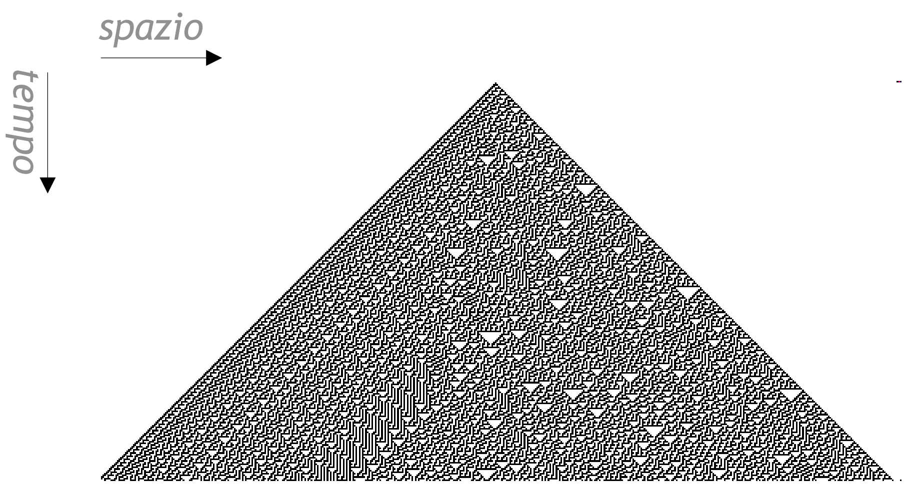
Automi cellulari: definizioni

- *Space-Time diagrams*

Un diagramma spazio-tempo di un automa G è formato dalla sequenza

$$c, G(c), G^2(c), G^3(c) \ldots$$

Diagramma spazio-tempo di un CA unidimensionale



Automi cellulari: proprietà

- Reversibilità

  Se la funzione di transizione globale ammette una funzione inversa

  (i.e. che sia definibile nei termini di una funzione di transizione locale)

  $$\mathrm{G}_1(c) \circ \mathrm{G}_2(c) = I$$

  Dove I è la transizione identica

  G_1 è detto l'automa *inverso* di G_2

- Iniettività

  Se la funzione G è iniettiva

  Se configurazioni di partenza sono diverse, quelle di arrivo sono pure diverse

- Suriettività

  Se la funzione G è suriettiva

  Non esiste una configurazione che non abbia un possibile predecessore

- *Garden of Eden*

  Se la funzione G non è suriettiva, esiste almeno una configurazione che non è 'raggiungibile' (può comparire solo come configurazione iniziale)

Automi cellulari: risultati

- Garden-of-Eden Theorem (Moore & Myhill, 1962)

  La funzione G è suriettiva sse è iniettiva

  Corollario: le seguenti proprietà di G sono equivalenti
  - Iniettività
  - Suriettività
  - Bijettività
  - Reversibilità
- Reversibilità di automi uni-dimensionali

  La reversibilità di automi uni-dimensionali è decidibile (Amoroso & Patt, 1972)
- Reversibilità di automi in generale

  La reversibilità di automi di dimensione ≥ 2 non è decidibile (Kari, 1994)

Automi cellulari: risultati

- Simulabilità (Toffoli, 1977)

  Simulazione: un automa G simula un automa G' se, a meno di cambiamenti di scala, l'insieme dei diagrammi spazio-tempo di G include l'insieme dei diagrammi di G'

  Qualsiasi automa a d dimensioni G
  può essere simulato da un automa reversibile G' a $d + 1$ dimensioni

  Una macchina di Turing può essere vista come un automa celluare a 1 dimensione

  Quindi esiste un automa che è in grado di simulare la macchina di Turing in ogni dimensione

- Universalità della regola 110

  La regola 110 è computazionalmente universale (Cook & Wolfram, 1999)

- Universalità intrinseca

  Un automa G a d dimensioni è *intrinsecamente* universale
  se è in grado di simulare qualsiasi altro automa di pari dimensione

  Sono noti automi unidimensionali, a 6 stati, che sono intrinsecamente universali

  La regola 110 è intrinsecamente universale?

  Non si sa.

Automi cellulari: risultati

"It seems that computational universality
is a very common property in cellular automata,
a rule rather than an exception"
[Wolfram, 2002]