

# Intelligenza Artificiale II

## Ragionamento probabilistico

## Inferenza

Marco Piastra

## Parte 2

Problemi di inferenza probabilistica

Inferenza nei modelli grafici

Eliminazione delle variabili

*Factor graphs e belief propagation*

# Modelli grafici ed inferenza

- Cosa si intende

A partire da un modello grafico completamente specificato (struttura + numeri)

Quindi da una distribuzione congiunta di probabilità

Il calcolo del valore di probabilità condizionale di alcuni nodi

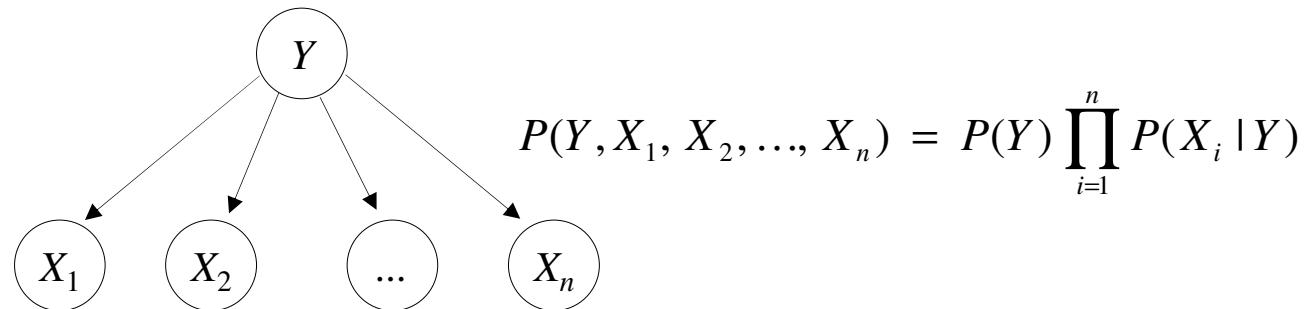
Intesi come 'risposte', dato il valore di altri nodi, intesi come 'fatti osservati'

Con eventuale marginalizzazione

Si ignora il valore di nodi non osservati e non rilevanti come risposte

## Esempio: filtro *anti-spam*

Tipicamente si usa un '*Naive (Discrete) Bayesian Classifier*'



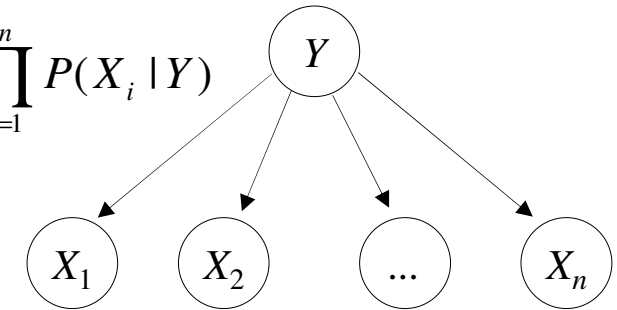
Nel caso del filtro *anti-spam*:

- Le variabili aleatorie sono tutte *binomiali* (valore 0 o 1)
- $Y$  rappresenta la classe di appartenenza di un'email: 1 *spam*, 0 *non-spam*
- Ciascuna  $X_i$  indica la presenza nel messaggio di una determinata parola

Le probabilità associate al modello grafico si assumono come date

La determinazione delle probabilità condizionali, tipicamente partendo da dati campione, è un problema di *apprendimento* (vedi oltre)

$$P(Y, X_1, X_2, \dots, X_n) = P(Y) \prod_{i=1}^n P(X_i | Y)$$



## Inferenza nel filtro *anti-spam*

Data una combinazione di parole  $\{X_k\}$ , si cerca la classificazione a maggiore probabilità

L'email è *spam* se  $\frac{P(Y=1|\{X_k\})}{P(Y=0|\{X_k\})} > \lambda$

Notare che:

$$P(Y=1|\{X_k\}) \stackrel{\text{Teorema di Bayes}}{=} \frac{P(\{X_k\}|Y=1)P(Y=1)}{\sum_Y P(\{X_k\}|Y)P(Y)} = \frac{P(Y=1) \prod_k P(X_k | Y=1)}{\sum_Y P(Y) \prod_k P(X_k | Y)}$$

Indipendenza condizionale, dal grafo

Quindi:

$$\frac{P(Y=1|\{X_k\})}{P(Y=0|\{X_k\})} = \frac{P(Y=1)}{P(Y=0)} \prod_k \frac{P(X_k | Y=1)}{P(X_k | Y=0)}$$

Per semplificare i calcoli si usa il logaritmo:

$$\log \frac{P(Y=1|\{X_k\})}{P(Y=0|\{X_k\})} = \log \frac{P(Y=1)}{P(Y=0)} + \sum_k \log \frac{P(X_k | Y=1)}{P(X_k | Y=0)}$$

# Inferenza probabilistica

- In generale

Si assume come punto di partenza una distribuzione congiunta completamente specificata

$$P(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

In un problema di inferenza probabilistica, le variabili aleatorie  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  si dividono in tre categorie:

- 1) Variabili  $\{X_e\}$  *osservate* e che quindi hanno un valore definito
- 2) Variabili  $\{X_r\}$  non rilevanti, per il problema in esame
- 3) Variabili  $\{X_f\}$  che rappresentano la risposta al problema in esame

Si tratta di trovare: 
$$P(\{X_f\}|\{X_e\}) = \sum_{\{X_r\}} P(\{X_f\}, \{X_r\}|\{X_e\})$$

- Non esiste un problema di decidibilità: il calcolo diretto è sempre fattibile (\*nel discreto)  
La distribuzione di probabilità è completamente specificata
- Esiste semmai un problema di efficienza  
La quantità di numeri da trattare cresce esponenzialmente rispetto al numero delle variabili e l'estensione del dominio di ciascuna

# Costruzione di un modello grafico

- Passo 1

Individuazione delle variabili

*T* : (*tampering*) - Manomissione del sensore

*F* : (*fire*) - Presenza di incendio

*A* : (*alarm*) - Allarme

*S* : (*smoke*) - Presenza di fumo

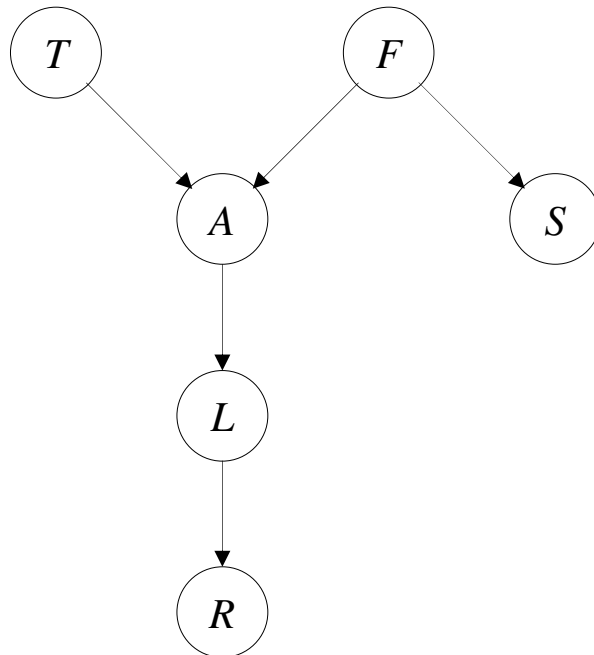
*L* : (*leaving*) - Abbandono della zona

*R* : (*report*) - Chiamata dei vigili del fuoco

# Costruzione di un modello grafico

## ▪ Passo 2

Definizione della struttura



*T* : (*tampering*) - Manomissione del sensore

*F* : (*fire*) - Presenza di incendio

*A* : (*alarm*) - Allarme

*S* : (*smoke*) - Presenza di fumo

*L* : (*leaving*) - Abbandono della zona

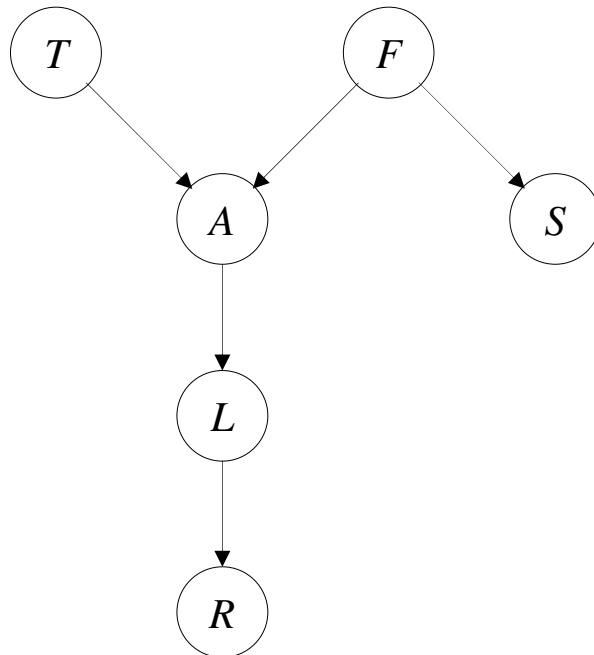
*R* : (*report*) - Chiamata dei vigili del fuoco



# Costruzione di un modello grafico

## Passo 2

Definizione della struttura



In base al modello grafico:

$\langle T \perp F \rangle$  (ma diventano dipendenti se una delle di A, L, R, è noto)

$\langle A \perp S \mid F \rangle$

$\langle L \perp T \mid A \rangle$

$\langle L \perp F \mid A \rangle$

$\langle A \perp R \mid L \rangle$

*T*: (*tampering*) - Manomissione del sensore

*F*: (*fire*) - Presenza di incendio

*A*: (*alarm*) - Allarme

*S*: (*smoke*) - Presenza di fumo

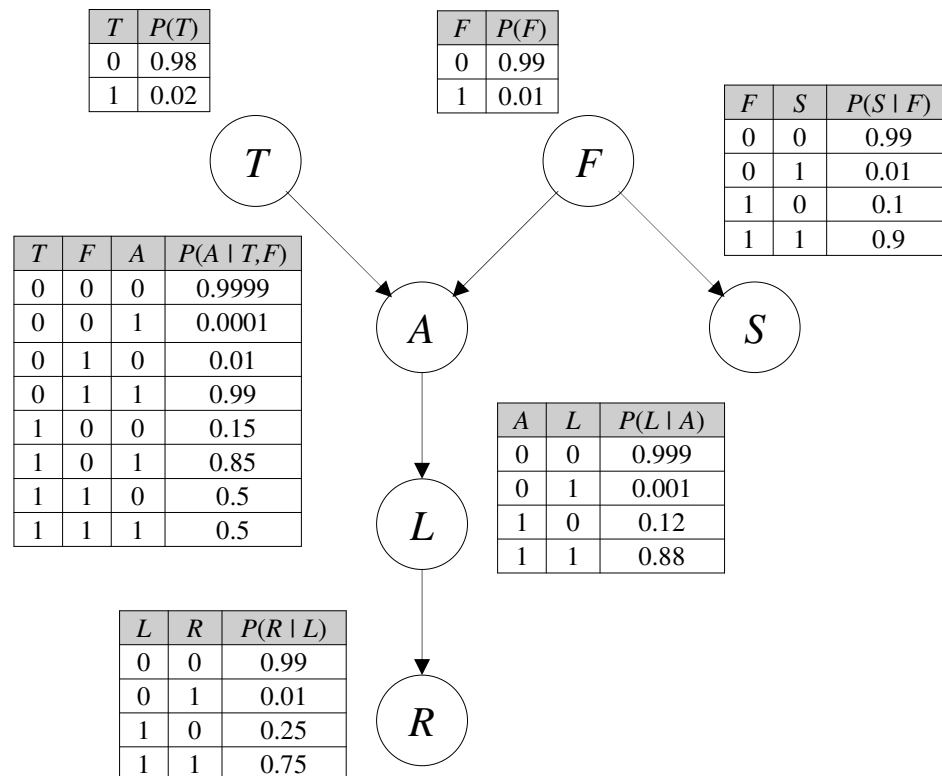
*L*: (*leaving*) - Abbandono della zona

*R*: (*report*) - Chiamata dei vigili del fuoco

# Costruzione di un modello grafico

## Passo 3

Definizione delle probabilità condizionali (*conditional probability tables - CPT*)



$T$ : (*tampering*) - Manomissione del sensore

$F$ : (*fire*) - Presenza di incendio

$A$ : (*alarm*) - Allarme

$S$ : (*smoke*) - Presenza di fumo

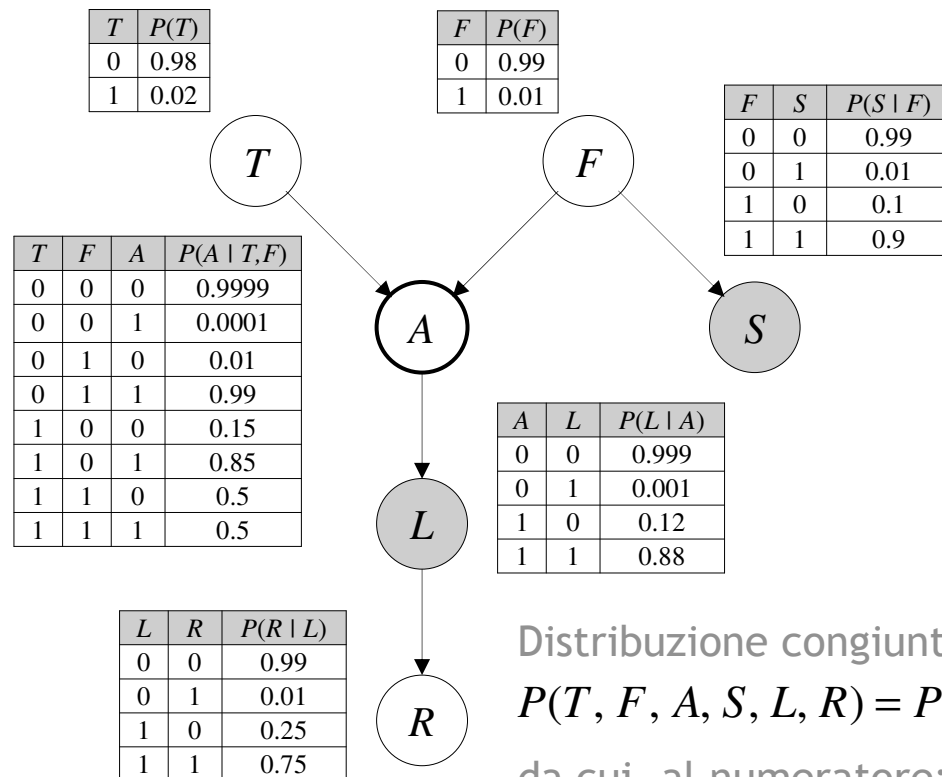
$L$ : (*leaving*) - Abbandono della zona

$R$ : (*report*) - Chiamata dei vigili del fuoco

# Inferenza probabilistica

## Passo 4

Impostazione di un problema



Ad esempio, calcolare la probabilità di  $A$  date le osservazioni  $L=1$  e  $S=0$

$$P(A|L=1, S=0) = \frac{P(A, L=1, S=0)}{P(L=1, S=0)}$$

Distribuzione congiunta, dal grafo:

$$P(T, F, A, S, L, R) = P(T)P(F)P(A|T, F)P(S|F)P(L|A)P(R|L)$$

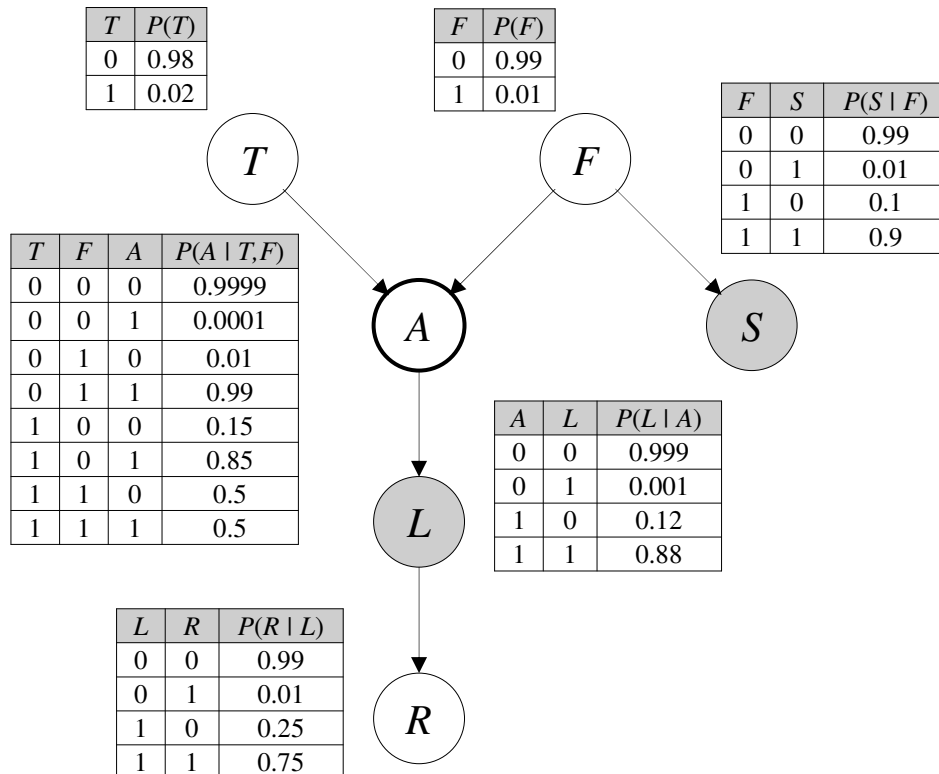
da cui, al numeratore:

$$P(A, L=1, S=0) = \sum_{T,F,R} P(T)P(F)P(A|T, F)P(S=0|F)P(L=1|A)P(R|L=1)$$

# Inferenza probabilistica

## Passo 5

### Calcolo del problema



Notare che in:

$$P(A | L=1, S=0) = \frac{P(A, L=1, S=0)}{P(L=1, S=0)}$$

Questo termine serve a normalizzare:  
può essere calcolato a partire da

$$P(A, L=1, S=0)$$

Infatti:

$$P(L=1, S=0) = \sum_A P(A, L=1, S=0)$$

Tipicamente, la parte dominante del calcolo di un problema di inferenza probabilistica è la marginalizzazione

# Inferenza probabilistica

Passo 5

Calcolo del problema

T	P(T)
0	0.98
1	0.02

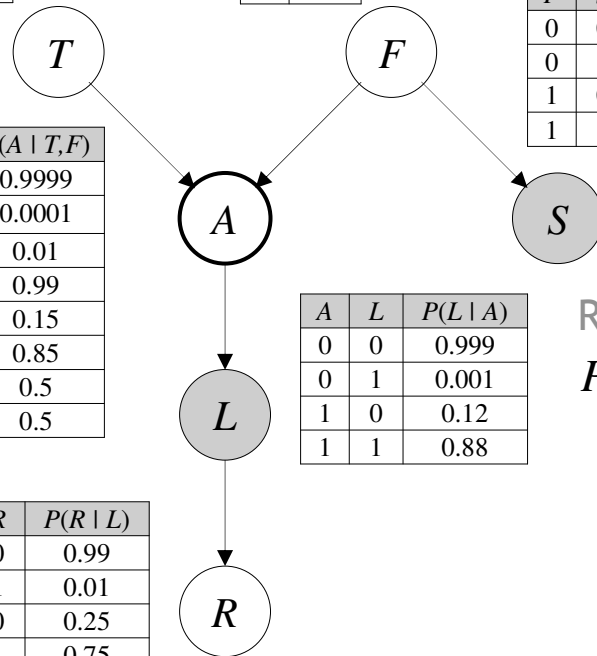
F	P(F)
0	0.99
1	0.01

F	S	P(S F)
0	0	0.99
0	1	0.01
1	0	0.1
1	1	0.9

T	F	A	P(A T,F)
0	0	0	0.9999
0	0	1	0.0001
0	1	0	0.01
0	1	1	0.99
1	0	0	0.15
1	0	1	0.85
1	1	0	0.5
1	1	1	0.5

A	L	P(L A)
0	0	0.999
0	1	0.001
1	0	0.12
1	1	0.88

L	R	P(R L)
0	0	0.99
0	1	0.01
1	0	0.25
1	1	0.75



Riscrivendo:

$$P(A, L=1, S=0)$$

$$= \sum_T \sum_F \sum_R P(L=1|A)P(A|T, F)P(T)P(F)P(S=0|F)P(R|L=1)$$

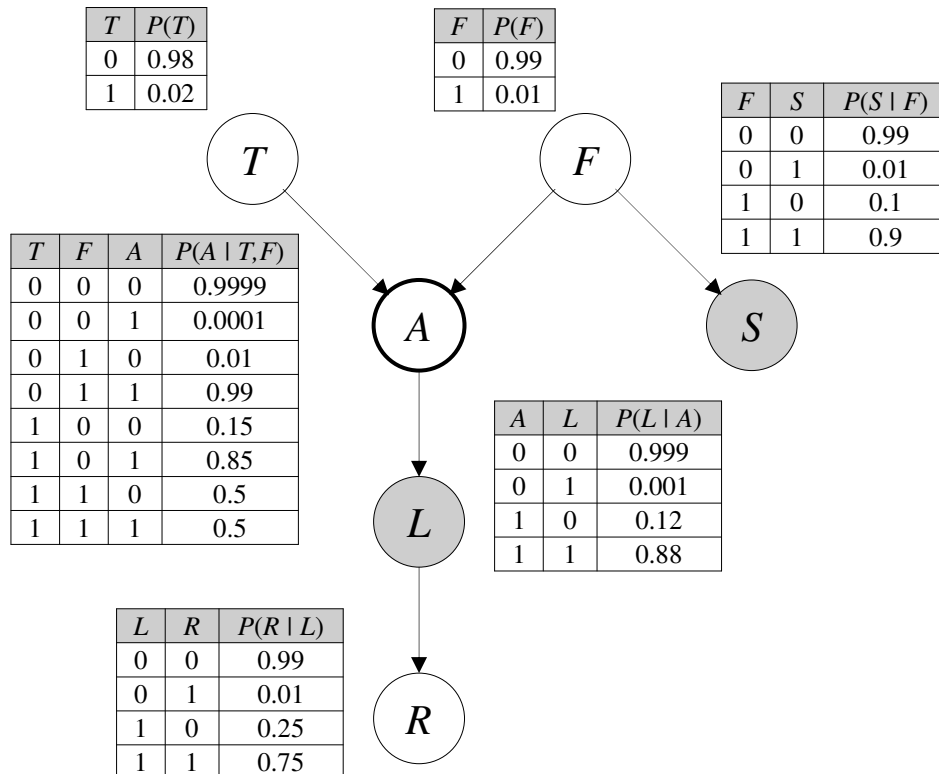
$$= P(L=1|A) \sum_T \sum_F P(A|T, F)P(T)P(F)P(S=0|F) \sum_R P(R|L=1)$$

Questa sommatoria vale 1  
C'era da aspettarselo  
in quanto  $\langle A \perp R | L \rangle$

# Inferenza probabilistica

## Passo 5

Calcolo del problema



Per convenzione, si scrive:

$$P(A, L=1, S=0) = f_{T,F,S=0}(A) f_{L=1}(A)$$

dove gli  $f$  sono i *fattori* del metodo di calcolo detto anche *eliminazione delle variabili*.

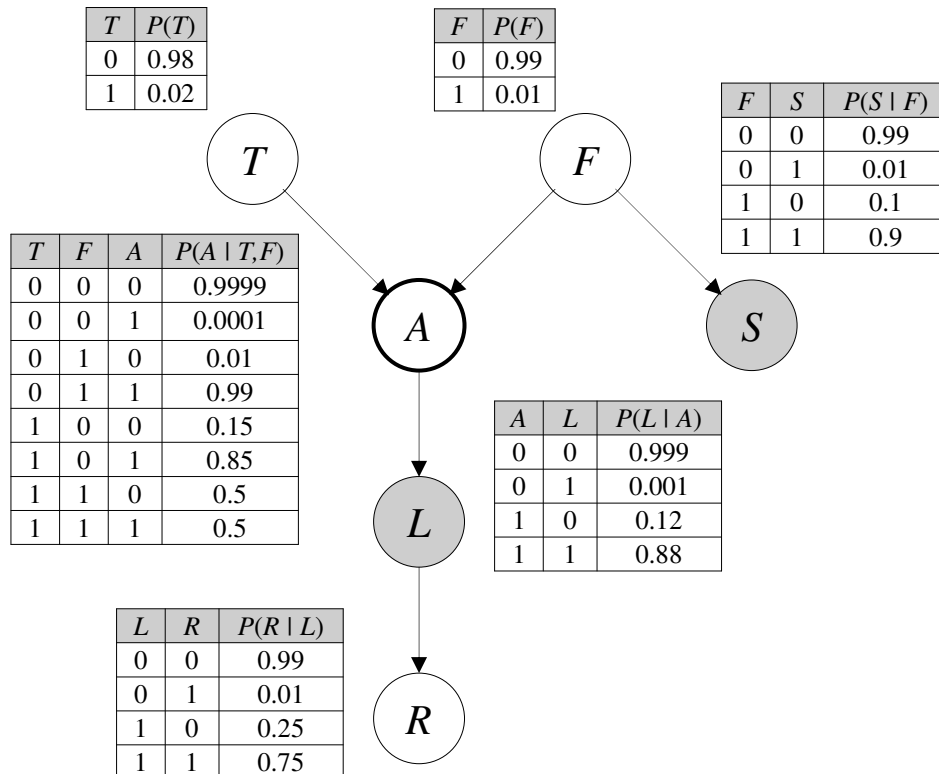
In generale i *fattori*  $f$  NON sono probabilità (non hanno somma 1). Ad esempio, non lo è:

$$f_{T,F,S=0}(A) = \sum_T \sum_F P(A|T,F) P(T) P(F) P(S=0|F)$$

# Inferenza probabilistica

## Passo 5

### Calcolo del problema



Per convenzione, si scrive:

$$P(A, L=1, S=0) = f_{T,F,S=0}(A) f_{L=1}(A)$$

dove gli  $f$  sono i *fattori* del metodo di calcolo detto anche *eliminazione delle variabili*.

In generale i *fattori*  $f$  NON sono probabilità (non hanno somma 1). Ad esempio, non lo è:

$$f_{T,F,S=0}(A) = \sum_T \sum_F P(A|T,F) P(T) P(F) P(S=0|F)$$

Motivo:

Sommando rispetto ad una variabile condizionata, si ha una probabilità marginale

$$P(A|S) = \sum_L P(A, L|S)$$

Sommando rispetto ad una variabile condizionante, si ha solo una funzione

$$f_S(A,L) = \sum_S P(A, L|S)$$

# Inferenza probabilistica

## Passo 5

Calcolo del problema

$T$	$P(T)$
0	0.98
1	0.02

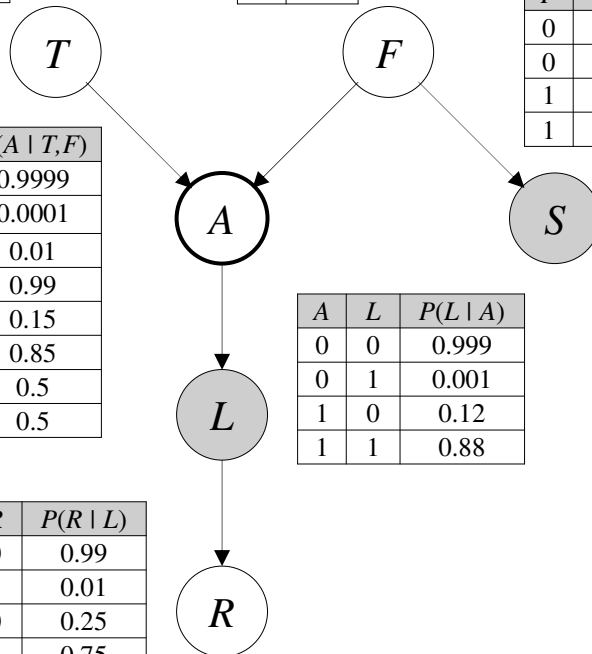
$F$	$P(F)$
0	0.99
1	0.01

$F$	$S$	$P(S F)$
0	0	0.99
0	1	0.01
1	0	0.1
1	1	0.9

$T$	$F$	$A$	$P(A T,F)$
0	0	0	0.9999
0	0	1	0.0001
0	1	0	0.01
0	1	1	0.99
1	0	0	0.15
1	0	1	0.85
1	1	0	0.5
1	1	1	0.5

$A$	$L$	$P(L A)$
0	0	0.999
0	1	0.001
1	0	0.12
1	1	0.88

$L$	$R$	$P(R L)$
0	0	0.99
0	1	0.01
1	0	0.25
1	1	0.75



Notare:

$$P(A, L=1, S=0) = f_{T,F,S=0}(A) f_{L=1}(A)$$

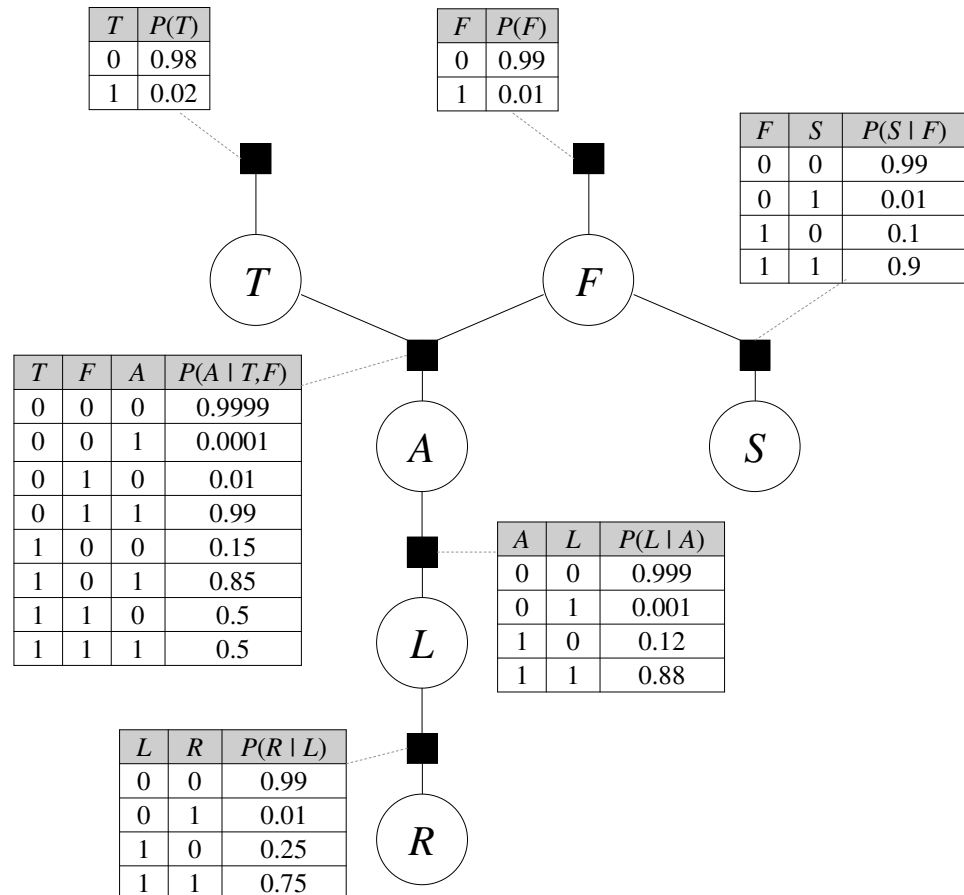
Un fattore proviene dai *parents* di  $A$

Un fattore proviene dai *descendants* di  $A$

Ciò è vero in generale, se  $A$  *d-separa* il grafo



# Factor graphs



Un metodo di calcolo distribuito per l'inferenza probabilistica

Il modello grafico viene tradotto in un *grafo bipartito*:

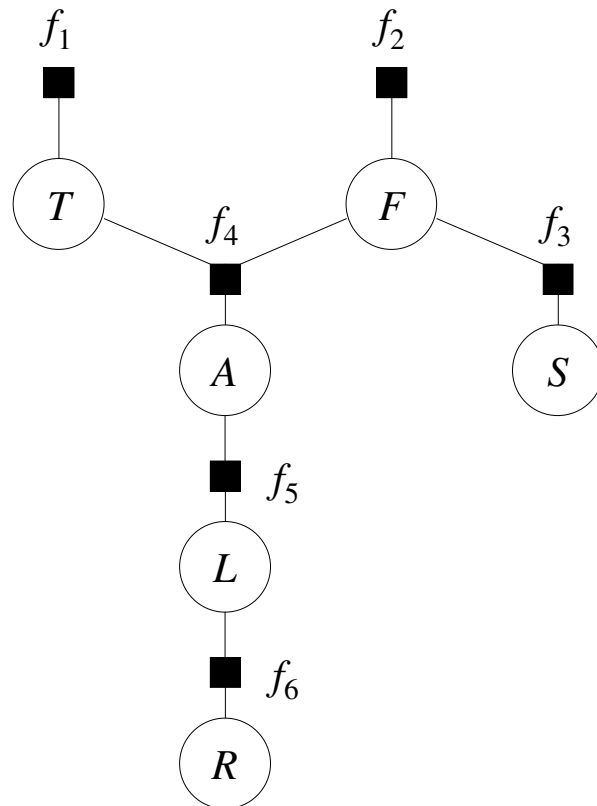
- Ai nodi che rappresentano le *variabili*
- Si aggiungono i nodi che rappresentano le *funzioni*

Il grafo risultante non è più orientato

Un *factor graph* è un altro modo per rappresentare la fattorizzazione di una funzione complessiva delle variabili

In questo caso, una distribuzione congiunta di probabilità

# Factor graphs



## Message passing (o belief propagation)

Si può immaginare che ciascun nodo di un *factor graph* sia un processore

Il calcolo delle probabilità marginali avviene tramite lo scambio di *messaggi*

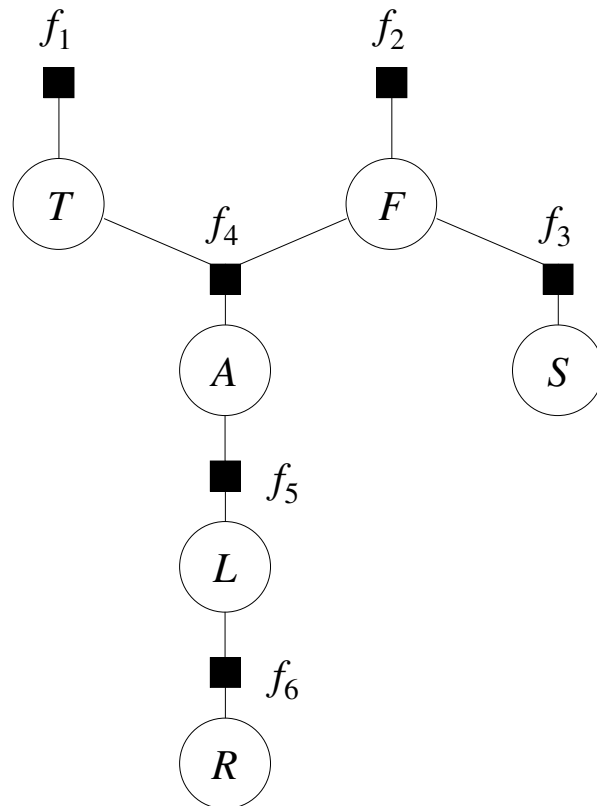
Da nodo variabile a nodo funzione:

$$\mu_{x \rightarrow f}(x) = \prod_{h \in n(x) \setminus \{f\}} \mu_{h \rightarrow x}(x)$$

Da nodo funzione a nodo variabile:

$$\mu_{f \rightarrow x}(x) = \sum_{\sim\{x\}} \left( f(\{X_i\}) \prod_{y \in n(f) \setminus \{x\}} \mu_{y \rightarrow f}(y) \right)$$

# Factor graphs



## Message passing

Si può immaginare che ciascun nodo di un *factor graph* sia un processore

Il calcolo delle probabilità marginali avviene tramite lo scambio di *messaggi*

Da nodo variabile a nodo funzione:

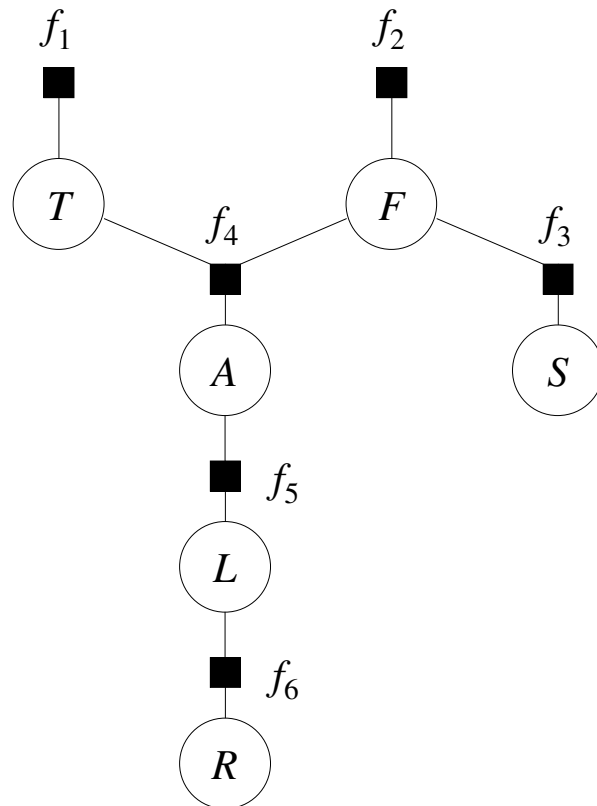
$$\mu_{x \rightarrow f}(x) = \prod_{h \in n(x) \setminus \{f\}} \mu_{h \rightarrow x}(x)$$

$n(x)$  sono i vicini di  $x$   
 $\setminus \{f\}$  ad eccezione di  $f$   
 Prodotto dei messaggi ricevuti dagli *altri* nodi funzione

Da nodo funzione a nodo variabile:

$$\mu_{f \rightarrow x}(x) = \sum_{\sim \{x\}} \left( f(\{X_i\}) \prod_{y \in n(f) \setminus \{x\}} \mu_{y \rightarrow f}(y) \right)$$

# Factor graphs



## Message passing

Si può immaginare che ciascun nodo di un *factor graph* sia un processore

Il calcolo delle probabilità marginali avviene tramite lo scambio di *messaggi*

Da nodo variabile a nodo funzione:

$$\mu_{x \rightarrow f}(x) = \prod_{h \in n(x) \setminus \{f\}} \mu_{h \rightarrow x}(x)$$

$n(x)$  sono i vicini di  $x$   
 $\setminus \{f\}$  ad eccezione di  $f$   
 Prodotto dei messaggi ricevuti dagli *altri* nodi funzione

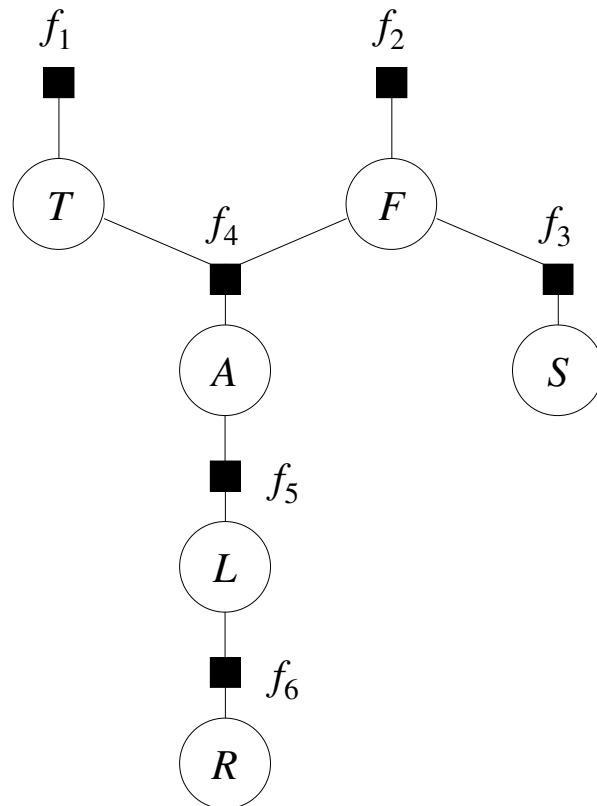
Da nodo funzione a nodo variabile:

$$\mu_{f \rightarrow x}(x) = \sum_{\sim \{x\}} \left( f(\{X_i\}) \prod_{y \in n(f) \setminus \{x\}} \mu_{y \rightarrow f}(y) \right)$$

$\{X_i\}$  sono le variabili di  $f$   
 Prodotto dei messaggi ricevuti dagli *altri* nodi variabile

Marginalizzazione rispetto a tutte le variabili connesse ad eccezione di  $x$

# Factor graphs



## Message passing

Dalle formule si desume che:

- Ciascun nodo può inviare un messaggio ad un'altro nodo quando ha ricevuto i messaggi provenienti da tutti gli *altri* nodi
- I messaggi sono vettori (funzioni di una variabile), non scalari

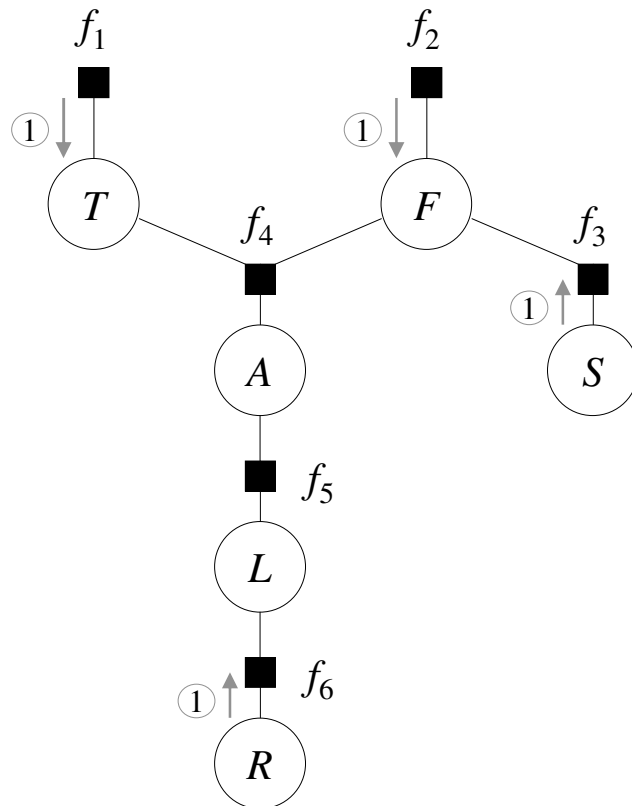
Da nodo variabile a nodo funzione:

$$\mu_{x \rightarrow f}(x) = \prod_{h \in n(x) \setminus \{f\}} \mu_{h \rightarrow x}(x)$$

Da nodo funzione a nodo variabile:

$$\mu_{f \rightarrow x}(x) = \sum_{\sim \{x\}} \left( f(\{X_i\}) \prod_{y \in n(f) \setminus \{x\}} \mu_{y \rightarrow f}(y) \right)$$

# Factor graphs



Propagazione dei messaggi

## Message passing

Dalle formule si desume che:

- Ciascun nodo può inviare un messaggio ad un'altro nodo quando ha ricevuto i messaggi provenienti da tutti gli *altri* nodi
- I messaggi sono vettori (funzioni di una variabile), non scalari

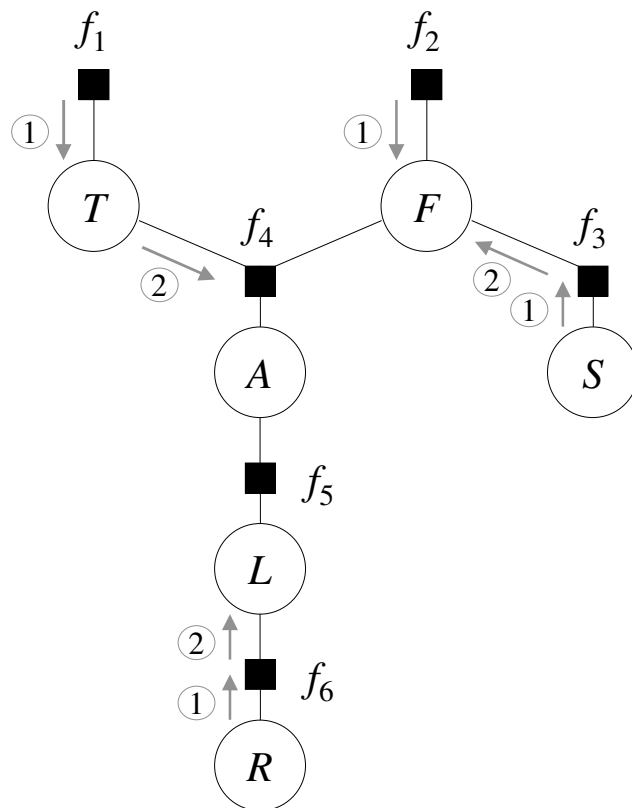
Da nodo variabile a nodo funzione:

$$\mu_{x \rightarrow f}(x) = \prod_{h \in n(x) \setminus \{f\}} \mu_{h \rightarrow x}(x)$$

Da nodo funzione a nodo variabile:

$$\mu_{f \rightarrow x}(x) = \sum_{\sim \{x\}} \left( f(\{X_i\}) \prod_{y \in n(f) \setminus \{x\}} \mu_{y \rightarrow f}(y) \right)$$

# Factor graphs



Propagazione dei messaggi

## Message passing

Dalle formule si desume che:

- Ciascun nodo può inviare un messaggio ad un'altro nodo quando ha ricevuto i messaggi provenienti da tutti gli *altri* nodi
- I messaggi sono vettori (funzioni di una variabile), non scalari

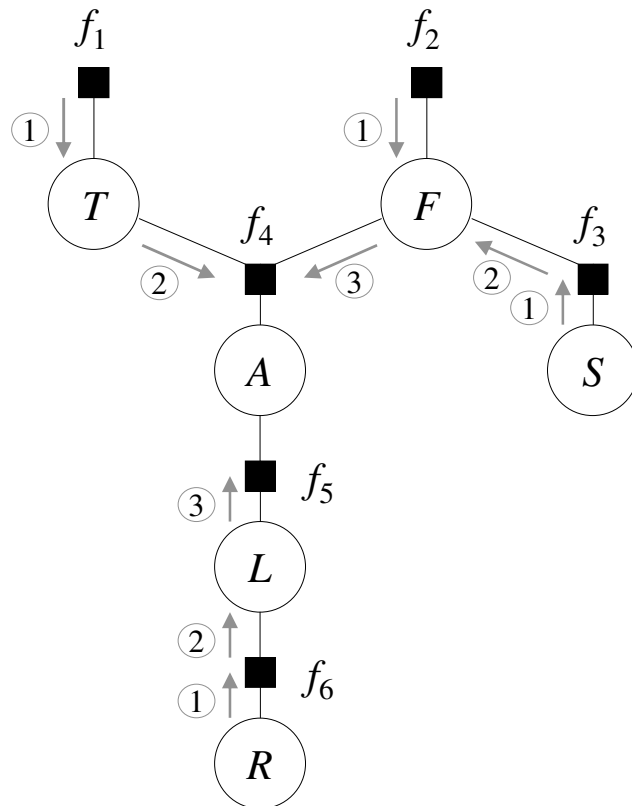
Da nodo variabile a nodo funzione:

$$\mu_{x \rightarrow f}(x) = \prod_{h \in n(x) \setminus \{f\}} \mu_{h \rightarrow x}(x)$$

Da nodo funzione a nodo variabile:

$$\mu_{f \rightarrow x}(x) = \sum_{\sim \{x\}} \left( f(\{X_i\}) \prod_{y \in n(f) \setminus \{x\}} \mu_{y \rightarrow f}(y) \right)$$

# Factor graphs



Propagazione dei messaggi

## Message passing

Dalle formule si desume che:

- Ciascun nodo può inviare un messaggio ad un'altro nodo quando ha ricevuto i messaggi provenienti da tutti gli *altri* nodi
- I messaggi sono vettori (funzioni di una variabile), non scalari

Da nodo variabile a nodo funzione:

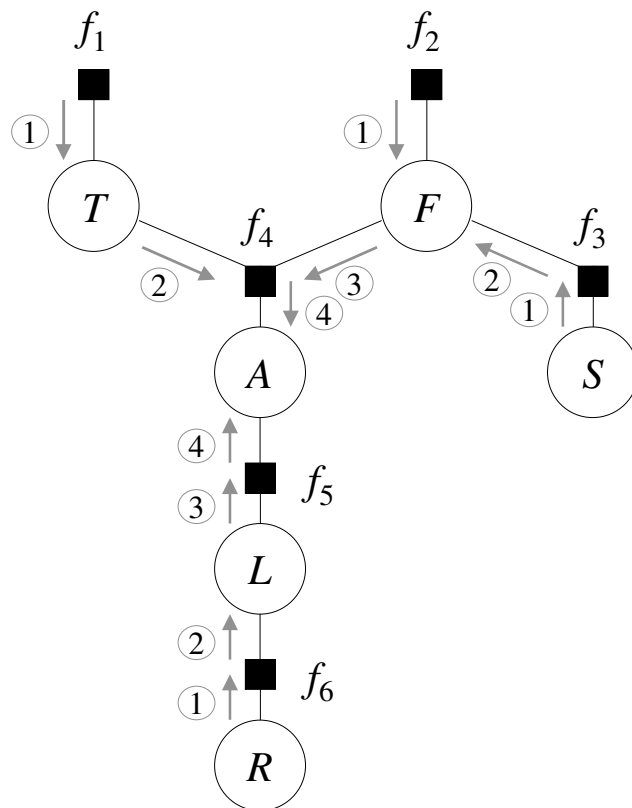
$$\mu_{x \rightarrow f}(x) = \prod_{h \in n(x) \setminus \{f\}} \mu_{h \rightarrow x}(x)$$

Da nodo funzione a nodo variabile:

$$\mu_{f \rightarrow x}(x) = \sum_{\sim \{x\}} \left( f(\{X_i\}) \prod_{y \in n(f) \setminus \{x\}} \mu_{y \rightarrow f}(y) \right)$$



# Factor graphs



Propagazione dei messaggi

## Message passing

Dalle formule si desume che:

- Ciascun nodo può inviare un messaggio ad un'altro nodo quando ha ricevuto i messaggi provenienti da tutti gli *altri* nodi
- I messaggi sono vettori (funzioni di una variabile), non scalari

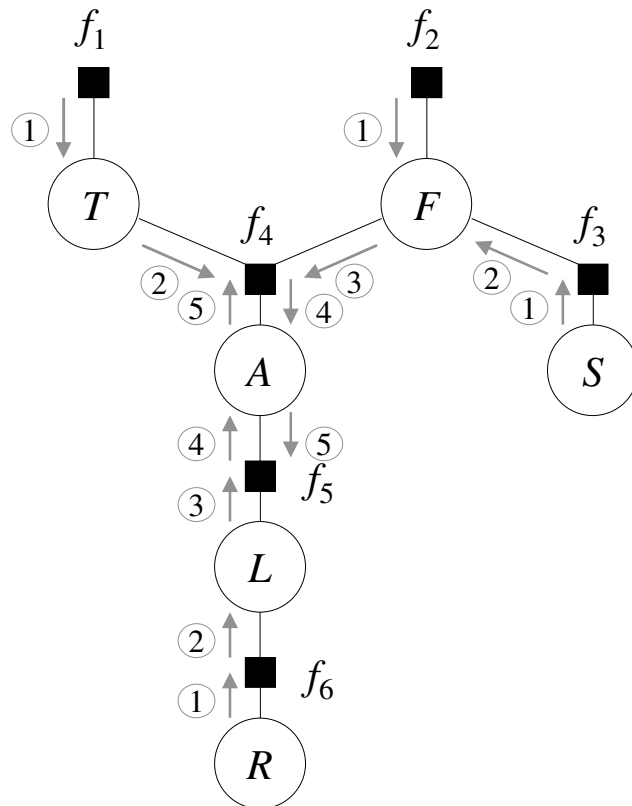
Da nodo variabile a nodo funzione:

$$\mu_{x \rightarrow f}(x) = \prod_{h \in n(x) \setminus \{f\}} \mu_{h \rightarrow x}(x)$$

Da nodo funzione a nodo variabile:

$$\mu_{f \rightarrow x}(x) = \sum_{\sim \{x\}} \left( f(\{X_i\}) \prod_{y \in n(f) \setminus \{x\}} \mu_{y \rightarrow f}(y) \right)$$

# Factor graphs



Propagazione dei messaggi

## Message passing

Dalle formule si desume che:

- Ciascun nodo può inviare un messaggio ad un'altro nodo quando ha ricevuto i messaggi provenienti da tutti gli *altri* nodi
- I messaggi sono vettori (funzioni di una variabile), non scalari

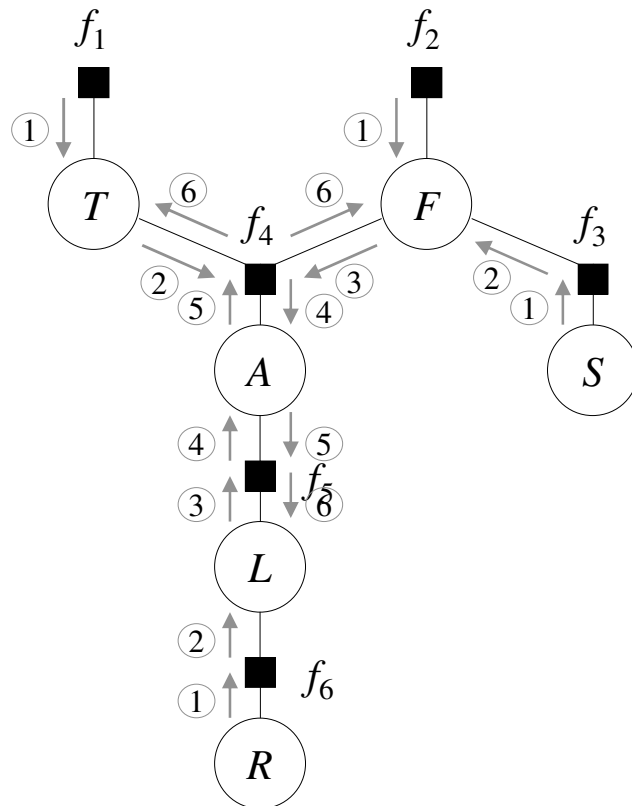
Da nodo variabile a nodo funzione:

$$\mu_{x \rightarrow f}(x) = \prod_{h \in n(x) \setminus \{f\}} \mu_{h \rightarrow x}(x)$$

Da nodo funzione a nodo variabile:

$$\mu_{f \rightarrow x}(x) = \sum_{\sim \{x\}} \left( f(\{X_i\}) \prod_{y \in n(f) \setminus \{x\}} \mu_{y \rightarrow f}(y) \right)$$

# Factor graphs



Propagazione dei messaggi

## Message passing

Dalle formule si desume che:

- Ciascun nodo può inviare un messaggio ad un'altro nodo quando ha ricevuto i messaggi provenienti da tutti gli *altri* nodi
- I messaggi sono vettori (funzioni di una variabile), non scalari

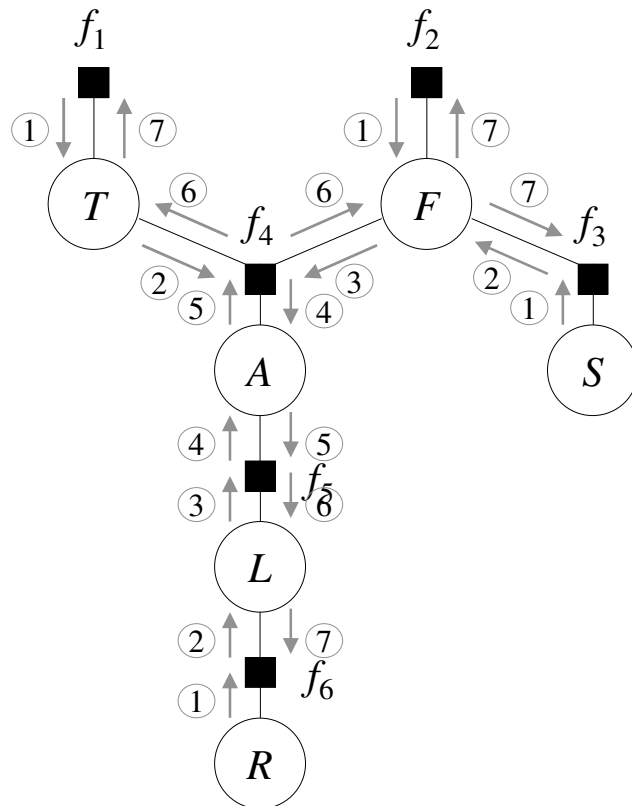
Da nodo variabile a nodo funzione:

$$\mu_{x \rightarrow f}(x) = \prod_{h \in n(x) \setminus \{f\}} \mu_{h \rightarrow x}(x)$$

Da nodo funzione a nodo variabile:

$$\mu_{f \rightarrow x}(x) = \sum_{\sim \{x\}} \left( f(\{X_i\}) \prod_{y \in n(f) \setminus \{x\}} \mu_{y \rightarrow f}(y) \right)$$

# Factor graphs



Propagazione dei messaggi

## Message passing

Dalle formule si desume che:

- Ciascun nodo può inviare un messaggio ad un'altro nodo quando ha ricevuto i messaggi provenienti da tutti gli *altri* nodi
- I messaggi sono vettori (funzioni di una variabile), non scalari

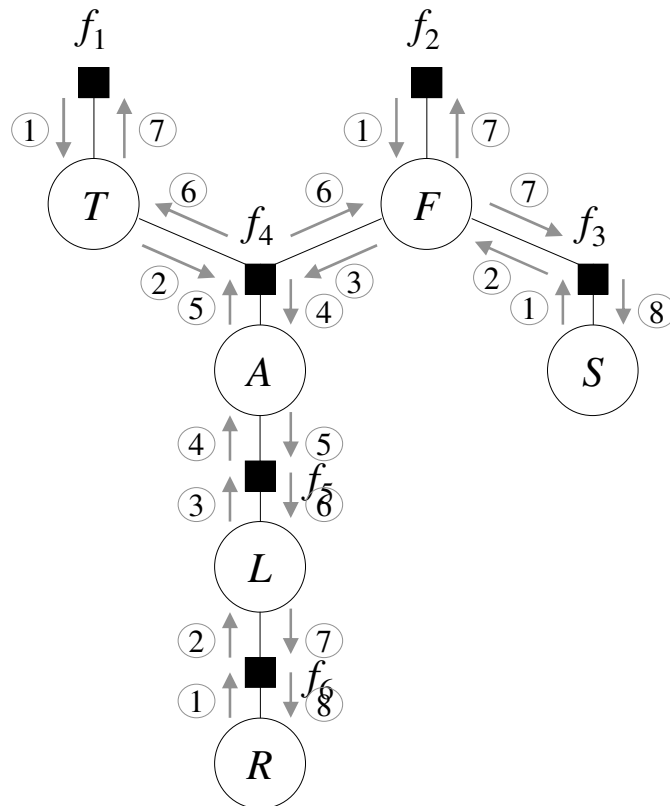
Da nodo variabile a nodo funzione:

$$\mu_{x \rightarrow f}(x) = \prod_{h \in n(x) \setminus \{f\}} \mu_{h \rightarrow x}(x)$$

Da nodo funzione a nodo variabile:

$$\mu_{f \rightarrow x}(x) = \sum_{\sim \{x\}} \left( f(\{X_i\}) \prod_{y \in n(f) \setminus \{x\}} \mu_{y \rightarrow f}(y) \right)$$

# Factor graphs



## Message passing

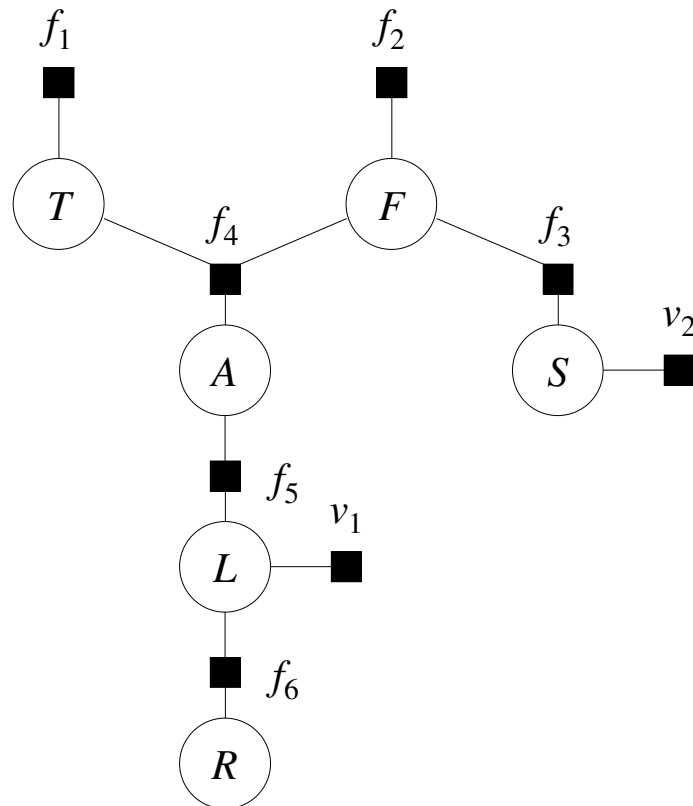
In un grafo aciclico, ad un certo punto, lo scambio di messaggi si arresta

Le probabilità marginali associate a ciascun nodo variabile sono il prodotto dei messaggi ricevuti

$$P(x) = \prod_{f \in n(x)} \mu_{f \rightarrow x}(x)$$

Lo *scheduling* dei messaggi può essere diverso.  
In questo caso: *flooding schedule*

# Factor graphs



## Message passing

In un grafo aciclico, ad un certo punto, lo scambio di messaggi si arresta

Le probabilità marginali associate a ciascun nodo variabile sono il prodotto dei messaggi ricevuti

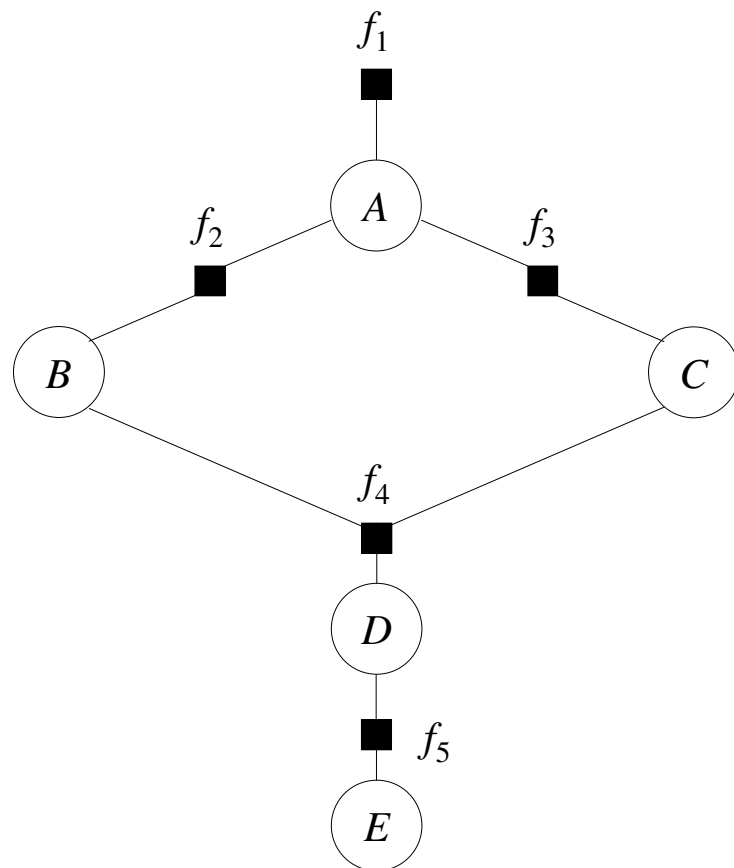
$$P(x) = \prod_{f \in n(x)} \mu_{f \rightarrow x}(x)$$

Le osservazioni si rappresentano introducendo nuovi nodi funzione, che esprimono un vincolo:  $v(x) = 1$  per il valore osservato e  $0$  altrimenti

Il metodo deve essere nuovamente eseguito

I valori ottenuti per i nodi variabile devono essere normalizzati, per ottenere le probabilità marginali condizionali

# Factor graphs con cicli



## Message passing

In un grafo ciclico, in generale, lo scambio di messaggi non si arresta mai  
In alcuni casi non esiste nemmeno un punto di partenza

### Variante del metodo

- Inizialmente, ciascun nodo invia un messaggio con un vettore di valori 1
- L'invio dei messaggi è ripetuto, al cambiare di uno dei messaggi ricevuti

Non c'è garanzia di convergenza, il metodo può continuare all'infinito

In molti casi pratici, tuttavia, ciò avviene: dopo un certo tempo, lo scambio si stabilizza e i messaggi non cambiano più