Fuzzy Logics 2.0?

Andrea Pedrini

Fuzzy Logics 2.0 e modelli grafici

- L'Ispettore Enrico indaga sulla morte di Diego e scopre che:
  - *l'assassino deve essere alto*

    (cosa significa? ha senso avere un preciso valore dell'altezza?)
  - *l'assassino probabilmente era amante della vittima*

    (in che quantità l'essere amante influenza l'essere assassino?)
  - *Diego prediligeva le giovani donne adulte alte*

    (cosa significa "essere giovani adulti"?
    e quanto questo influisce sui gusti di Diego?)

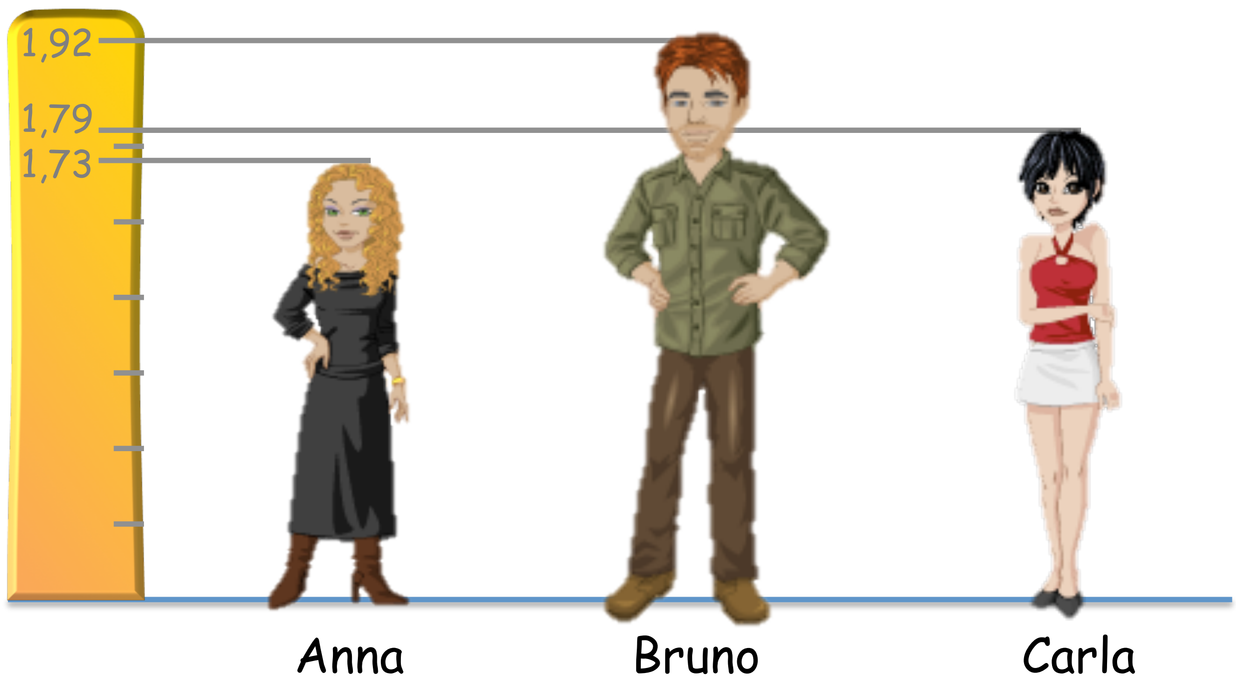
- A questo punto dell'indagine i sospettati sono:
  - Anna (42 anni, alta 1,73 m)
  - Bruno (36 anni, alto 1,92 m)
  - Carla (27 anni, alta 1,79 m)

Prima Parte

Fuzzy Logics 1.0

Insiemi fuzzy

*"L'assassino è **Alto**"*

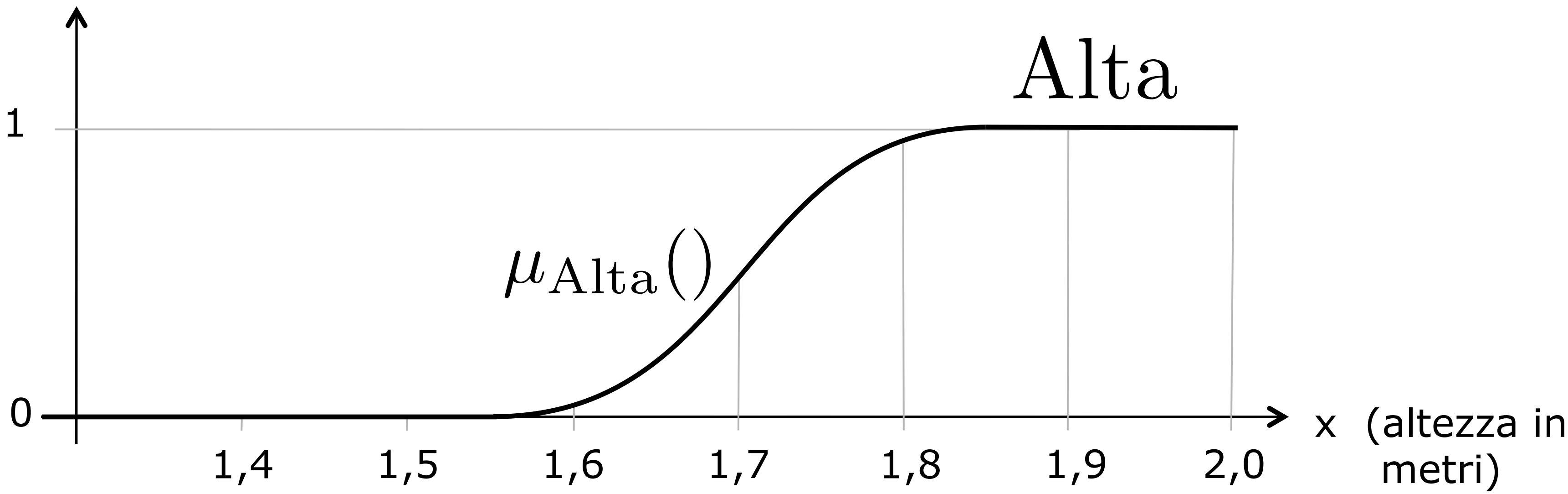


- A quale altezza qualcuno può essere definito *alto*?

  da 1,75 metri in su?

  …e chi ha un'altezza di "soli" 1,749 metri non è alto per nulla?

Insiemi fuzzy



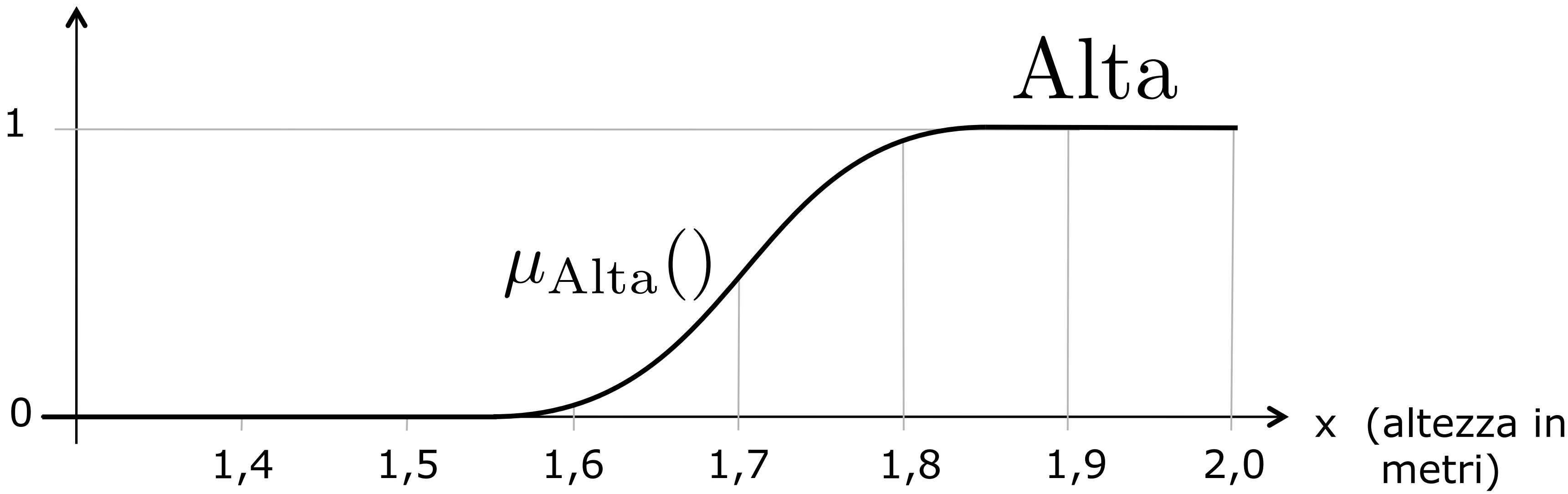
- La funzione caratteristica di un insieme classico è del tipo

$$\mu : \mathbf{U} \to \{0, 1\}$$

- La funzione caratteristica (detta funzione d'appartenenza) di un insieme fuzzy invece è del tipo

$$\mu : \mathbf{U} \to [0, 1]$$

Insiemi fuzzy



- Gli insiemi fuzzy hanno molte applicazioni pratiche (dalle lavatrici alle macchine fotografiche)

- La logica fuzzy è la teoria del ragionamento che utilizza gli insiemi fuzzy

Un po' di teoria

- L'universo di un insieme fuzzy è un insieme (classico, non fuzzy) di oggetti

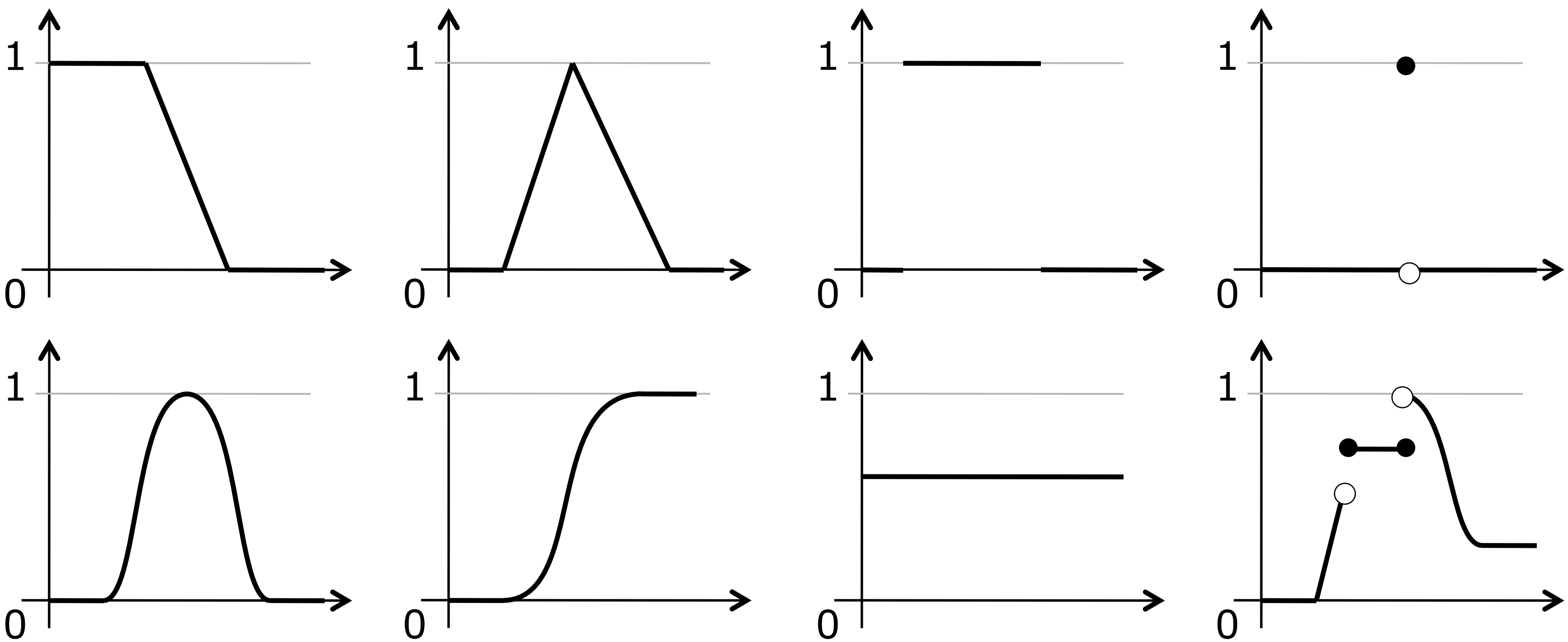
    può anche essere un intervallo di valori

    (ad esempio l'intervallo delle possibili altezze di una persona)

- Un insieme fuzzy è descritto da una funzione di appartenenza a valori nell'intervallo *continuo* [0,1] e definita su un determinato universo del discorso

$$\langle \mathbf{U}, \mu : \mathbf{U} \rightarrow [0, 1] \rangle$$

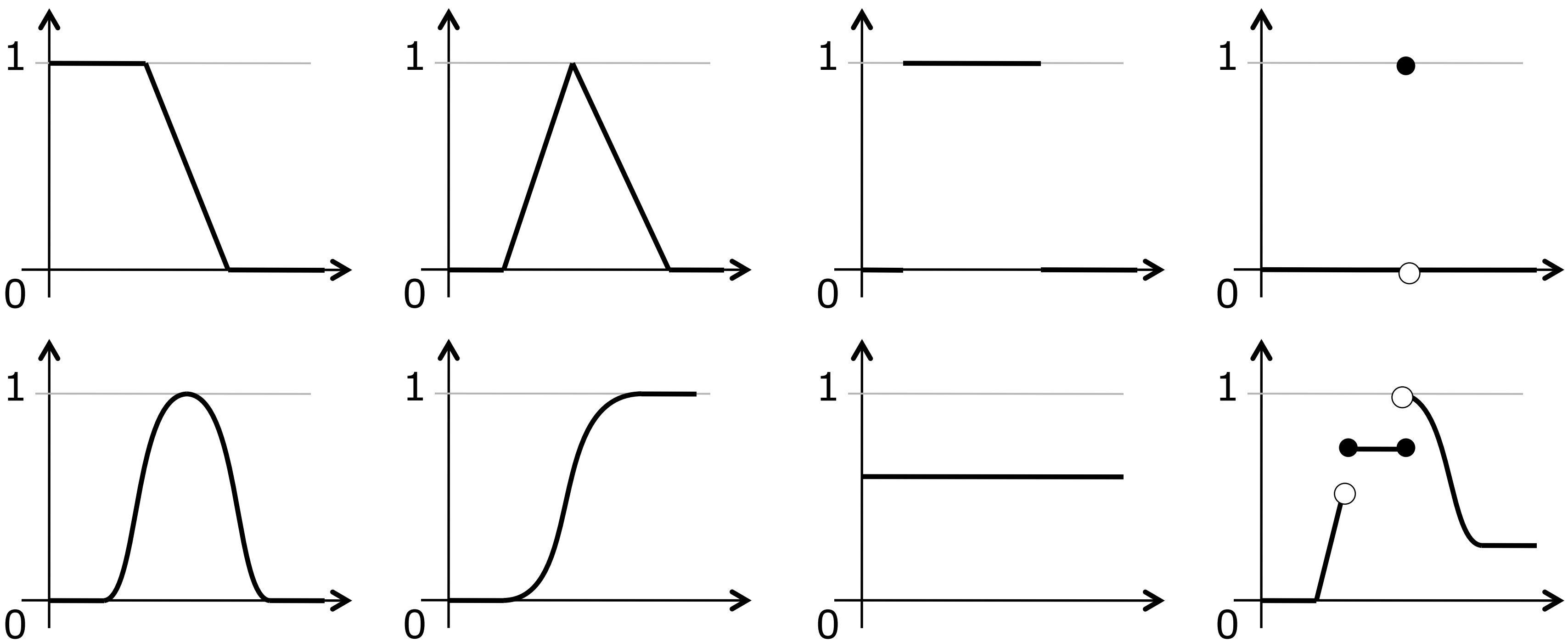
Esempi di funzioni d'appartenenza



- Gli insiemi fuzzy estendono il concetto di insieme classico

  anche le funzioni caratteristiche classiche sono funzioni d'appartenenza

Esempi di funzioni d'appartenenza



- *Attenzione:* anche se sono a valori in [0,1]

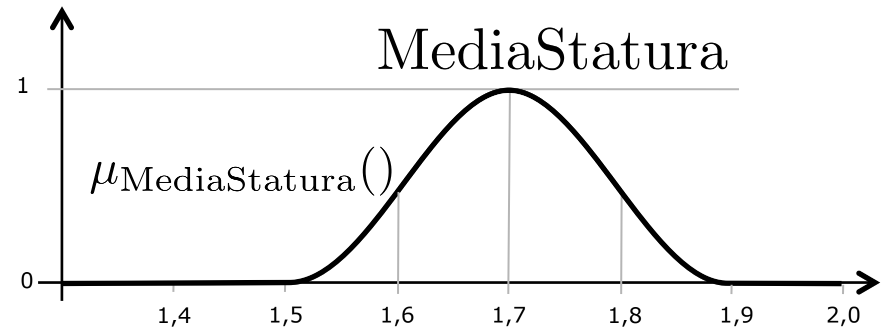
  le funzioni d'appartenenza ***non*** sono distribuzioni di probabilità

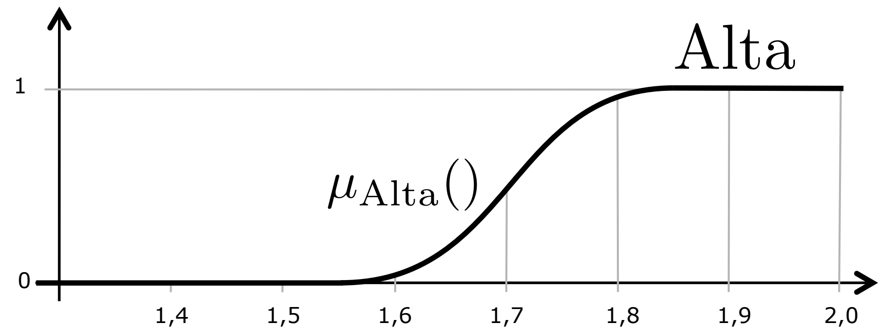
  (ad esempio: non sommano a 1)

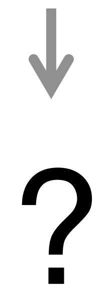
Operatori fuzzy

- Come si possono combinare tra loro gli insiemi fuzzy?

  cosa significa essere *di media statura o alti*?

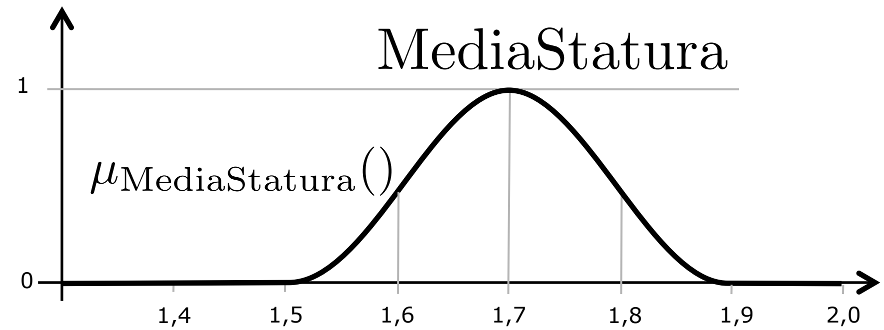


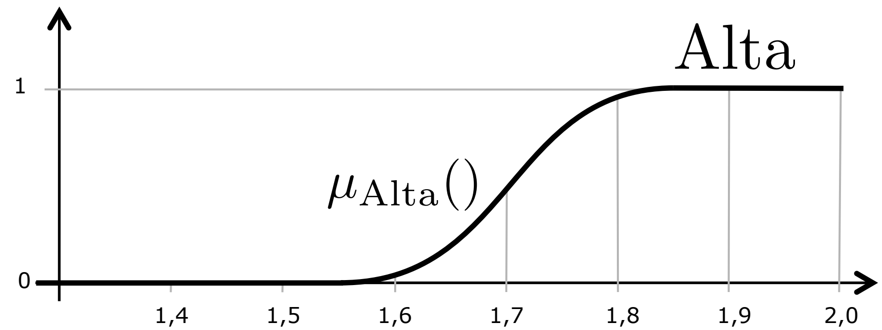


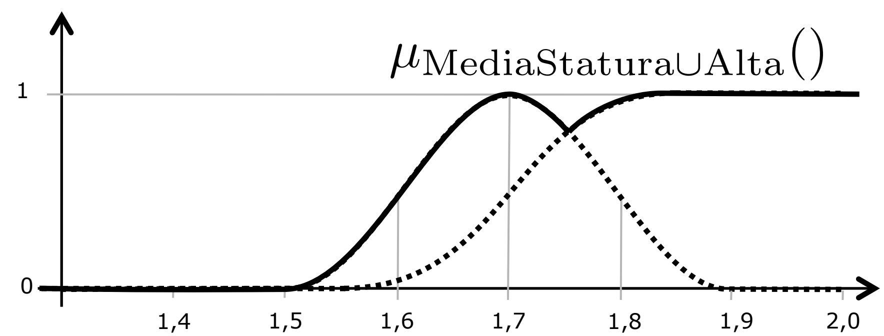


Operatori fuzzy

- Come si possono combinare tra loro gli insiemi fuzzy?
  - cosa significa essere *di media statura o alti*?
- Si definiscono gli operatori insiemistici fuzzy
  - estendono gli operatori classici
    - (per i due valori di appartenenza 0 e 1 si comportano classicamente)
  - si richiede che godano di alcune "ragionevoli" proprietà

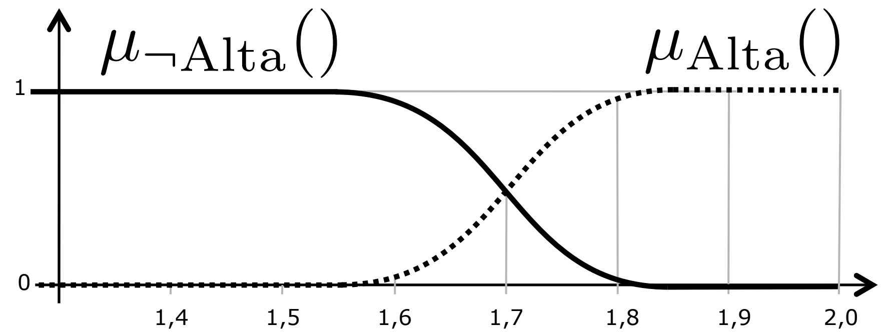






Operatori fuzzy: complemento

- Complemento (NOT)
  - bordi: N(0)=1, N(1)=0
  - non crescenza: a ≥ b ⇒ N(a) ≤ N(b)



- *Esempi:*

$$\mu_{\neg\mathrm{A}}() = 1 - \mu_{\mathrm{A}}()$$

$$\mu_{\neg\mathrm{A}}() = 1 - \mu_{\mathrm{A}}()^2$$

Operatori fuzzy: intersezione

- Intersezione (AND) – norma (t-norm)
  - bordi: T(a,0)=0, T(a,1)=a
  - commutatività: T(a,b)=T(b,a)
  - associatività: T(T(a,b),c)=T(a,T(b,c))
  - non decrescenza: a ≥ b ⇒ T(a,c) ≥ T(b,c)

- *Esempi:*

$$\mu_{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}}() = \min(\mu_{\mathrm{A}}(), \mu_{\mathrm{B}}()))$$

$$\mu_{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}}() = \mu_{\mathrm{A}}() \cdot \mu_{\mathrm{B}}()$$

$$\mu_{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}}() = \max(\mu_{\mathrm{A}}() + \mu_{\mathrm{B}}() - 1, 0)$$

Operatori fuzzy: unione

- Unione (OR) – conorma (t-conorm)
  - bordi: S(a,0)=a, S(a,1)=1
  - commutatività: S(a,b)=S(b,a)
  - associatività: S(S(a,b),c)=S(a,S(b,c))
  - non decrescenza: a ≥ b ⇒ S(a,c) ≥ S(b,c)

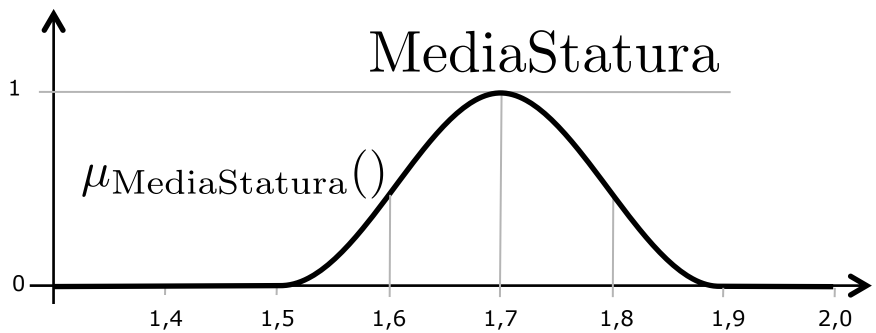
- *Esempi:*

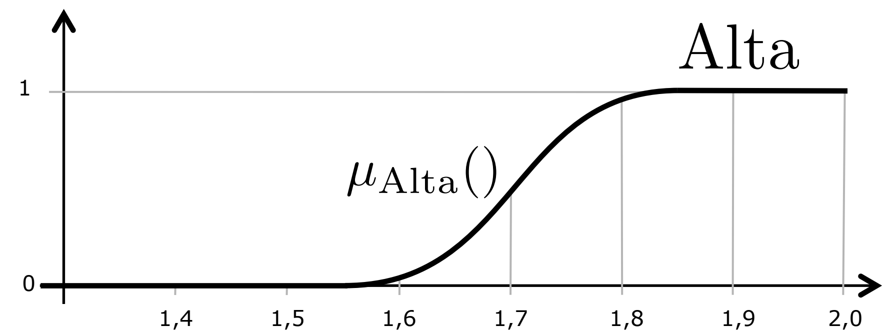
$$\mu_{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}() = \max(\mu_{\mathrm{A}}(), \mu_{\mathrm{B}}())$$

$$\mu_{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}() = \mu_{\mathrm{A}}() + \mu_{\mathrm{B}}() - \mu_{\mathrm{A}}() \cdot \mu_{\mathrm{B}}()$$

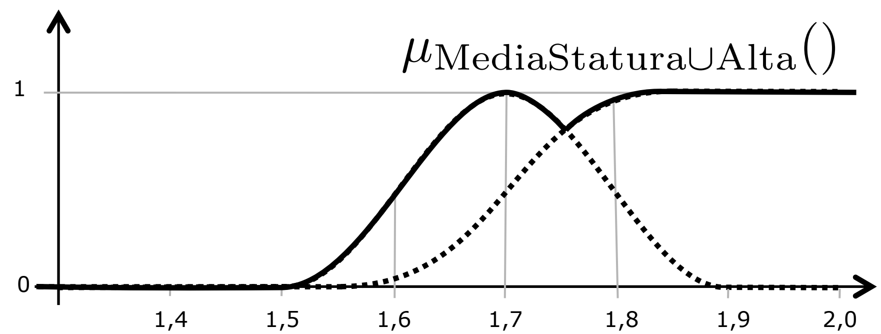
$$\mu_{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}() = \min(\mu_{\mathrm{A}}() + \mu_{\mathrm{B}}(), 1)$$ (somma troncata)

Operatori fuzzy

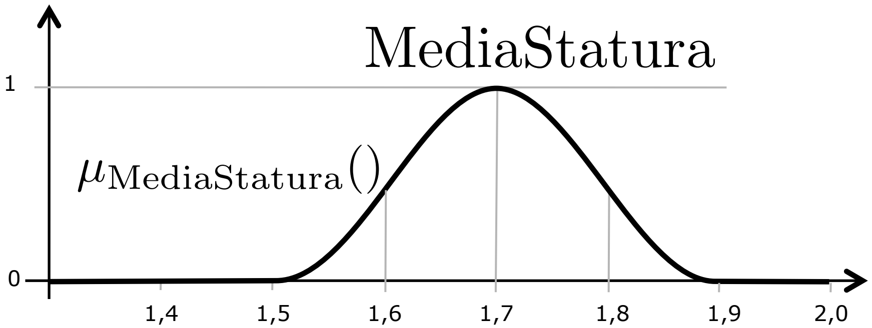


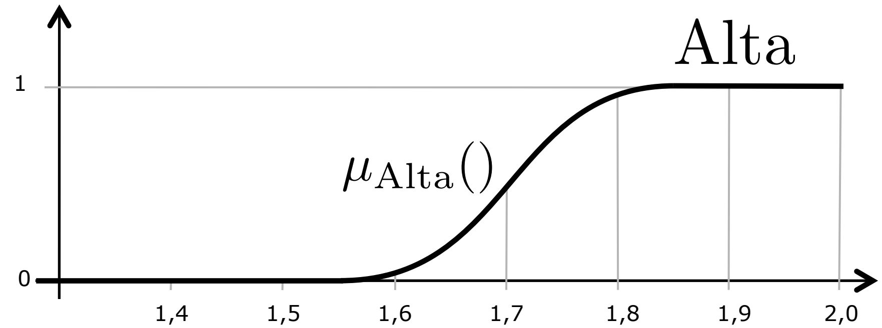


unione con il max

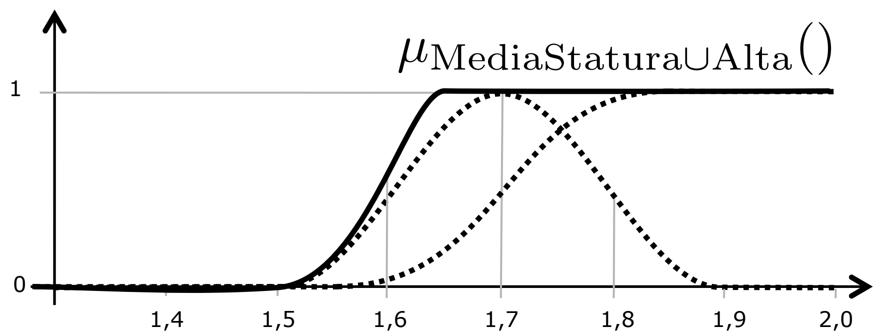


Operatori fuzzy





unione con la somma troncata



Quale usare?

Logiche fuzzy 1.0

- Anche nel caso fuzzy valgono le corrispondenze
  - complemento ⇔ negazione
  - intersezione ⇔ congiunzione
  - unione ⇔ disgiunzione
  - grado di appartenenza ⇔ valore di verità

- I sistemi formali che corrispondono al ragionamento con gli insiemi fuzzy si chiamano logiche fuzzy

  ce n'è una per ogni scelta di negazione, congiunzione e disgiunzione

  sono verofunzionali

  (i valori di verità delle formule complesse sono univocamente determinabili a partire dai soli valori di verità delle formule elementari che le costituiscono)

SecondaParte

Fuzzy Logics 2.0

Intuizione?

- Le logiche fuzzy (e tutte le logiche in generale) vogliono formalizzare il ragionamento in modo intuitivo
  - ma quale intuizione fa preferire una certa congiunzione ad un'altra?
  - e le proprietà dei connettivi sono quelle "giuste"

    (sono *necessarie*? sono *sufficienti*?)
  - perché ad ogni passo ci si deve fermare a inventare nuovi concetti e nuove proprietà?

    (esiste una struttura esterna più compatta che regoli contemporaneamente tutti gli oggetti coinvolti nel ragionamento?)

- Potrebbe essere utile un *nuovo punto di vista* che
  - migliori le proprietà formali
  - preservi l'intuizione

Fuzzy Logics 2.0

- Si cerca di costruire una struttura formale più generale
  all'interno della quale insiemi e operatori fuzzy
  emergano in modo "naturale" (rispettando l'intuizione)

- Gli ingredienti necessari sono teorie già note
  - la logica modale
  - la probabilità

Fuzzy Logics 2.0: l'idea

- Si sceglie una particolare altezza $\tilde{x}$ all'interno dell'universo delle altezze (ad esempio quella pari a 1,75 m)

- Si considera un insieme di mondi possibili

  in ciascuno di essi i soli valori di verità sono V e F

  ciascuno di essi può soddisfare o meno la formula

  $\mathrm{Alta}(\tilde{x})$ = "una persona con altezza $\tilde{x}$ è alta"

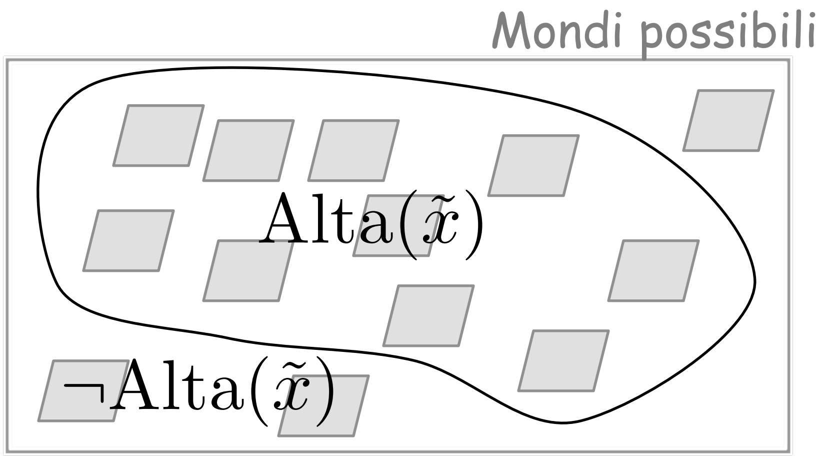
- Si costruisce una probabilità π sui mondi possibili

  si misura $W_{\mathrm{Alta}(\tilde{x})} = \{w : w \models \mathrm{Alta}(\tilde{x})\}$

  (e si ottiene, ad esempio, 0,75)

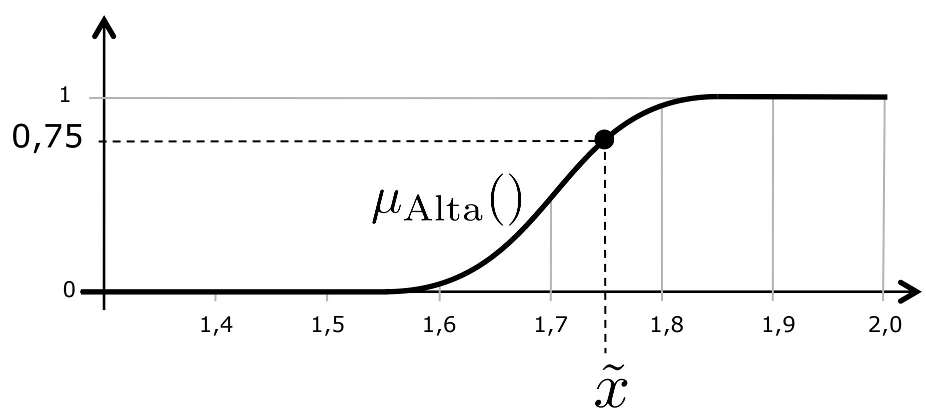
$$\mu_{\mathrm{Alta}}(\tilde{x}) := \pi(W_{\mathrm{Alta}(\tilde{x})})$$ (= 0,75)

Fuzzy Logics 2.0: l'idea



$$\mu_{\mathrm{Alta}}(\tilde{x}) := \pi(W_{\mathrm{Alta}(\tilde{x})}) = 0,75$$

- Si fa la stessa cosa per tutte le altezze possibili
  e si ottiene tutta la funzione d'appartenenza



Nozioni tecniche

l'idea intuitiva deve essere formalizzata
attraverso l'utilizzo di nozioni più tecniche

↓

- Per costruire la struttura formale servono:
  - un linguaggio
    (con il quale parlare degli insiemi fuzzy)
  - una semantica
    (in cui interpretare il linguaggio in termini di insiemi fuzzy)

Nozioni tecniche: il linguaggio

- Proprietà del linguaggio:
  - è del primo ordine
    (servono fbf del tipo $\mathrm{Alta}(x)$, con eventuali quantificazioni)
  - costanti e variabili sono di due tipi:
    (si dice che il linguaggio è two-sorted)

    1) di tipo oggetto
       (per parlare di particolari altezze, persone, pomodori)

    2) di tipo probabilistico
       (per parlare dei valori di probabilità)

Nozioni tecniche: il linguaggio

- Esempi di formule:

$$\mathrm{Alta}(x)$$

$$\mathrm{Alta}(\text{questa-altezza})$$

$$\forall p((p < 0,5) \to \exists x(\mathrm{Donna}(x) \wedge \mathbf{P}_p \mathrm{Bravoguidatore}(x)))$$

$$\forall p \forall q \ ((p = q) \to (\forall x(\Box_p A(x) \to \Box_q B(x))))$$

Nozioni tecniche: il linguaggio

- Esempi di formule:

variabile oggetto

$$\mathrm{Alta}(x)$$

predicato oggetto

costante oggetto

parentesi

$$\mathrm{Alta}(\text{questa-altezza})$$

quantificatore

costante probabilistica

$$\forall p((p < 0,5) \to \exists x(\mathrm{Donna}(x) \wedge \mathbf{P}_p \mathrm{Bravoguidatore}(x)))$$

predicato probabilistico

operatore probabilistico

$$\forall p \forall q \ ((p = q) \to (\forall x(\Box_p A(x) \to \Box_q B(x))))$$

variabile probabilistica

connettivo

Nozioni tecniche: il linguaggio

- Esempi di formule:

$$\mathrm{Alta}(x)$$

(x è alta)

$$\mathrm{Alta}(\text{questa-altezza})$$

(questa-altezza è alta)

$$\forall p((p < 0,5) \rightarrow \exists x(\mathrm{Donna}(x) \wedge \mathbf{P}_p \mathrm{Bravoguidatore}(x)))$$

(per ogni p<0,5 esiste una donna che è brava a guidare esattamente p)

$$\forall p \forall q \ ((p = q) \rightarrow (\forall x(\Box_p A(x) \rightarrow \Box_q B(x))))$$

(per ogni x, x è B almeno tanto quanto x è A)

Nozioni tecniche: il linguaggio

- Abbreviazioni

$$\forall p((p < 0,5) \to \exists x(\mathrm{Donna}(x) \wedge \mathbf{P}_p \mathrm{Bravoguidatore}(x)))$$

$$\downarrow$$

$$p < 0,5 : \exists x(\mathrm{Donna}(x) \wedge \mathbf{P}_p \mathrm{Bravoguidatore}(x))$$

$$\forall p \forall q \ ((p = q) \to (\forall x(\Box_p A(x) \to \Box_q B(x))))$$

$$\downarrow$$

$$p = q : \forall x(\Box_p A(x) \to \Box_q B(x))$$

regola generale:

relazioni algebriche sugli indici degli operatori probabilistici → $\lambda : \varphi$ ← relazioni tra gli oggetti del linguaggio

$$\underbrace{\forall \tau_{n+1} \ldots \forall \tau_m}_{\text{variabili libere in } \lambda} \ \underbrace{Q_1 \tau_1 \ldots Q_n \tau_n \ (\lambda^*}_{\text{forma normale prenessa di } \lambda} \to \varphi)$$

Nozioni tecniche: la semantica

- Le strutture che interpretano il linguaggio sono di tipo probabilistico-modale:

$$N = \langle \mathcal{D}, \mathbb{R}, W, \vartheta, \pi \rangle$$

  - $\mathcal{D}$ è il dominio degli oggetti cui la logica fa riferimento
  - $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali
  - W è l'insieme dei mondi possibili
  - ϑ è la funzione di interpretazione
  - π è la misura di probabilità sull'insieme dei mondi

Nozioni tecniche: la semantica

- Le strutture che interpretano il linguaggio
  sono di tipo probabilistico-modale:

$$N = \langle \mathcal{D}, \mathbb{R}, W, \vartheta, \pi \rangle$$

- L'interpretazione delle formule
  - mantiene rigide le componenti probabilistiche
  - è analoga al caso classico
    (esempio: $(N, w) \models (\neg\varphi)$ sse $(N, w) \not\models \varphi$)
  - regola anche gli operatori probabilistici:

$$(N, w) \models \Box_p \varphi \ \text{ sse } \ \pi(\{w' \in W \mid (N, w') \models \varphi\}) \geq p$$

$$(N, w) \models \mathbf{P}_p \varphi \ \text{ sse } \ \pi(\{w' \in W \mid (N, w') \models \varphi\}) = p$$

Come strutturare W?

- In logica modale W è accompagnato da una relazione di accessibilità R sui mondi:
  - come scegliere R in questo caso?
  - qual è la logica modale più adatta per trattare gli operatori $\Box_1$ e $\mathbf{P}_1$?

    (e ottenere un'assiomatizzazione della "certezza probabilistica"?)

- **Teorema:** $\Box_1$ e $\mathbf{P}_1$ si comportano come $\Box$ a patto che R sia una relazione
  - di accessibilità
  - seriale (∀w ∃v : (w,v)∈R)
  - transitiva (∀u∀v∀w ((u,v)∈R ∧ (v,w)∈R) → (v,w)∈R)
  - euclidea (∀u∀v∀w ((u,v)∈R ∧ (u,w)∈R) → (v,w)∈R)

Come strutturare W?

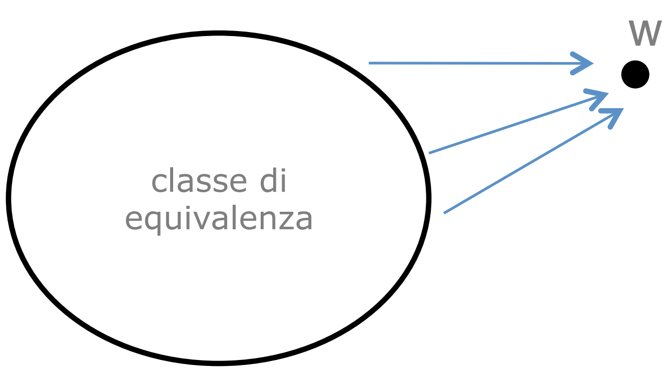
- In logica modale W è accompagnato da una relazione di accessibilità R sui mondi:
  - come scegliere R in questo caso?
  - qual è la logica modale più adatta per trattare gli operatori $\Box_1$ e $\mathbf{P}_1$?

    (e ottenere un'assiomatizzazione della "certezza probabilistica"?)

- **<u>Teorema:</u>** $\Box_1$ e $\mathbf{P}_1$ si comportano come $\Box$ a patto che R sia una relazione
  - di accessibilità $\longleftrightarrow$ K) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$
  - seriale $\longleftrightarrow$ D) $\Box\varphi \to \neg\Box\neg\varphi$
  - transitiva $\longleftrightarrow$ 4) $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$
  - euclidea $\longleftrightarrow$ 5) $\neg\Box\neg\varphi \to \Box\neg\Box\neg\varphi$

Perché proprio KD45?

- K) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$
  - serve per poter parlare di mondi possibili
- D) $\Box\varphi \to \neg\Box\neg\varphi$ (rel. seriale)
  - serve ad eliminare i mondi “pozzo”

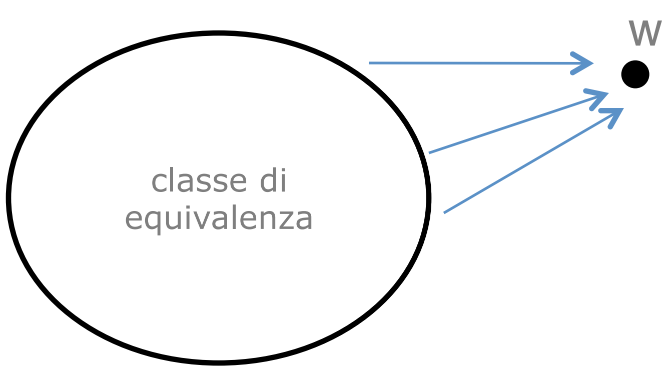


D) non è valido

Perché proprio KD45?

- K) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$
  - serve per poter parlare di mondi possibili

- D) $\Box\varphi \to \neg\Box\neg\varphi$ (rel. seriale)
  - serve ad eliminare i mondi “pozzo”



D) non è valido

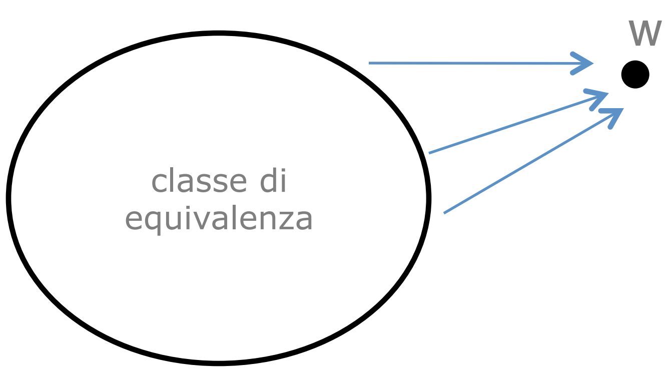
$$w \models \Box\varphi$$
$$w \models \Box\neg\varphi$$
$$\downarrow$$

$\Box$ non può essere $\mathbf{P}_1$

Perché proprio KD45?

- K) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$
  - serve per poter parlare di mondi possibili

- D) $\Box\varphi \to \neg\Box\neg\varphi$ (rel. seriale)
  - serve ad eliminare i mondi "pozzo"



D) non è valido

inoltre $\neg\Box\varphi$
non è mai una fbf valida

$\downarrow$

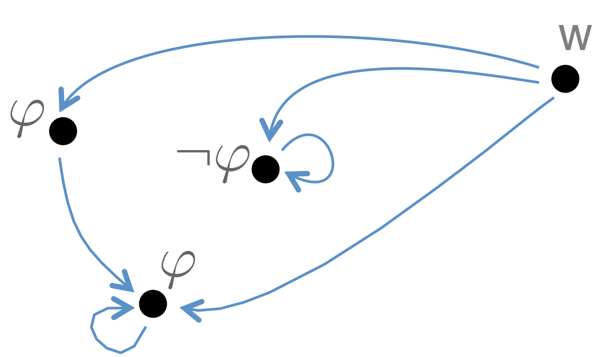
$\neg\Box(A \wedge \neg A)$
non è valida

Perché proprio KD45?

- 4) $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$ (rel. transitiva)

e

- 5) $\neg\Box\neg\varphi \rightarrow \Box\neg\Box\neg\varphi$ (rel. euclidea)
  (equivale a $\neg\Box\varphi \rightarrow \Box\neg\Box\varphi$)
  - eliminano la probabilità "del secondo ordine":



5) non è valido

i mondi accessibili da w
non costituiscono
una classe di equivalenza

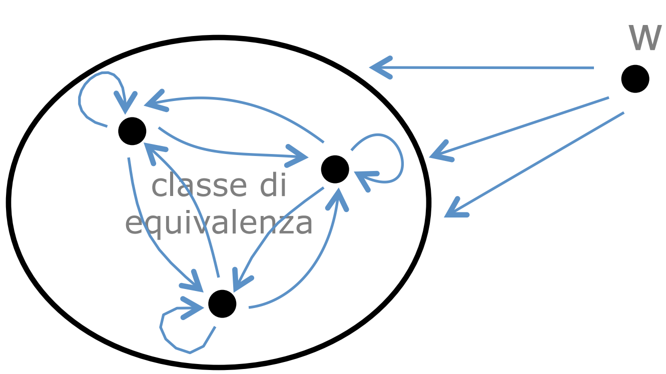
$$w \models \neg\Box\varphi$$
$$w \not\models \Box\neg\Box\varphi$$

Perché proprio KD45?

- 4) $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$ (rel. transitiva)

e

- 5) $\neg\Box\neg\varphi \rightarrow \Box\neg\Box\neg\varphi$ (rel. euclidea)
  (equivale a $\neg\Box\varphi \rightarrow \Box\neg\Box\varphi$)
  - eliminano la probabilità "del secondo ordine":



5) è valido

con 5)
tutti i mondi accessibili
da un mondo dato
formano
una classe di equivalenza

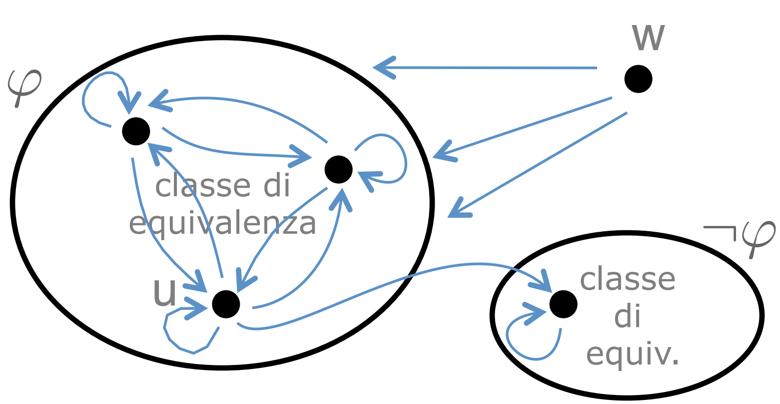
Perché proprio KD45?

- 4) $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$ (rel. transitiva)

e

- 5) $\neg\Box\neg\varphi \rightarrow \Box\neg\Box\neg\varphi$ (rel. euclidea)
  (equivale a $\neg\Box\varphi \rightarrow \Box\neg\Box\varphi$)

  - eliminano la probabilità “del secondo ordine”:



4) non è valido

w e u hanno accesso a due classi di equivalenza distinte

$$w \models \Box\varphi$$

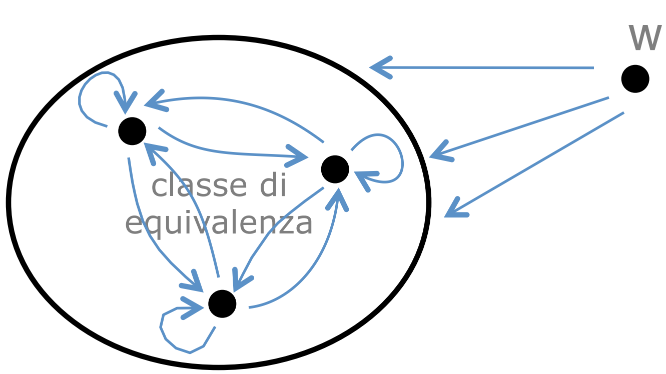
$$w \not\models \Box\Box\varphi$$

Perché proprio KD45?

- 4) $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ (rel. transitiva)

e

- 5) $\neg\Box\neg\varphi \to \Box\neg\Box\neg\varphi$ (rel. euclidea)
  (equivale a $\neg\Box\varphi \to \Box\neg\Box\varphi$)
  - eliminano la probabilità "del secondo ordine":



4) è valido

con 4)
la classe di accessibilità
è la stessa
per tutti i mondi

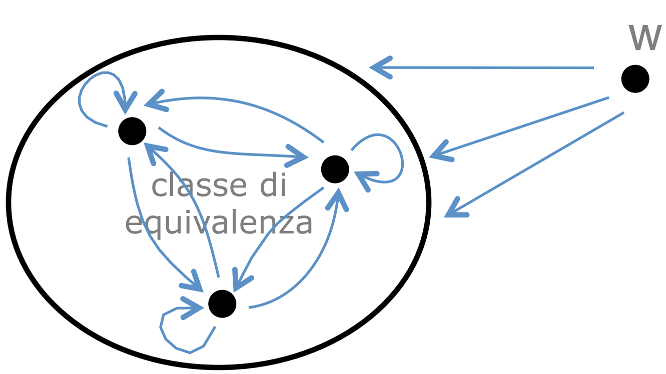
Perché proprio KD45?

- 4) $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$ (rel. transitiva)

e

- 5) $\neg\Box\neg\varphi \rightarrow \Box\neg\Box\neg\varphi$ (rel. euclidea)
  (equivale a $\neg\Box\varphi \rightarrow \Box\neg\Box\varphi$)

  - eliminano la probabilità "del secondo ordine":



4) e 5) sono validi

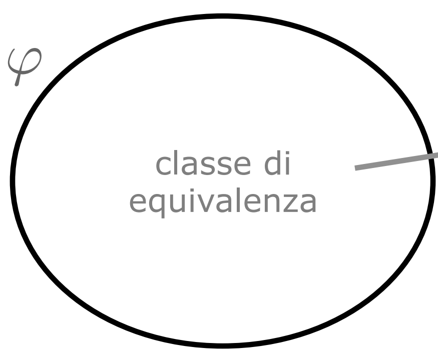
c'è una sola
classe di equivalenza
ed è l'insieme di accessibilità
di ciascun mondo

$\Box$ e $\Box\Box$ coincidono
($\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_1$ coincidono)

Perché proprio KD45?

- T) $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$ (rel. riflessiva)
  - sarebbe "troppo":

    non si potrebbe differenziare ciò che è vero da ciò che ha probabilità 1



se φ ha probabilità 1
allora
deve essere vera per forza

T) è valido

Un solo dominio

- Il linguaggio è del primo ordine
  - serve qualcosa che regoli il quantificatore

$\downarrow$

si usano le formule di Barcan:

BF) $\forall x \ (\Box\varphi) \to \Box(\forall x \ \varphi)$
BFI) $\Box(\forall x \ \varphi) \to \forall x \ (\Box\varphi)$

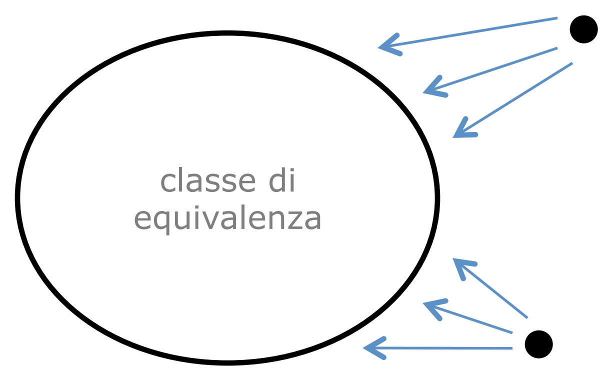
il dominio degli oggetti è lo stesso per tutti i mondi
(i mondi parlano delle medesime persone)

- KD45 + BF + BFI

$\downarrow$ assiomatizzano

$$\Box = \Box_1 = \mathbf{P}_1$$

(la certezza probabilistica)



Una misura di probabilità su W?

- Una distribuzione di probabilità π va sempre definita su una σ-algebra
  - qual è la σ-algebra in questo caso?
  - è costituita da sottoinsiemi di W, ma quali?
  - di sicuro deve contenere tutti i sottoinsieme costituiti da quei mondi che soddisfano fbf del tipo $\mathrm{Alta}(\mathrm{altezza})$

$$\downarrow$$

è la σ-algebra generata dalle fbf chiuse del linguaggio:

- per ogni formula chiusa φ si costruisce l'insieme

$$W_\varphi = \{w \in W \mid (N, w) \models \varphi\}$$

- si prende l'insieme di tutti i W_φ e lo si chiude per complementazione e unione numerabile

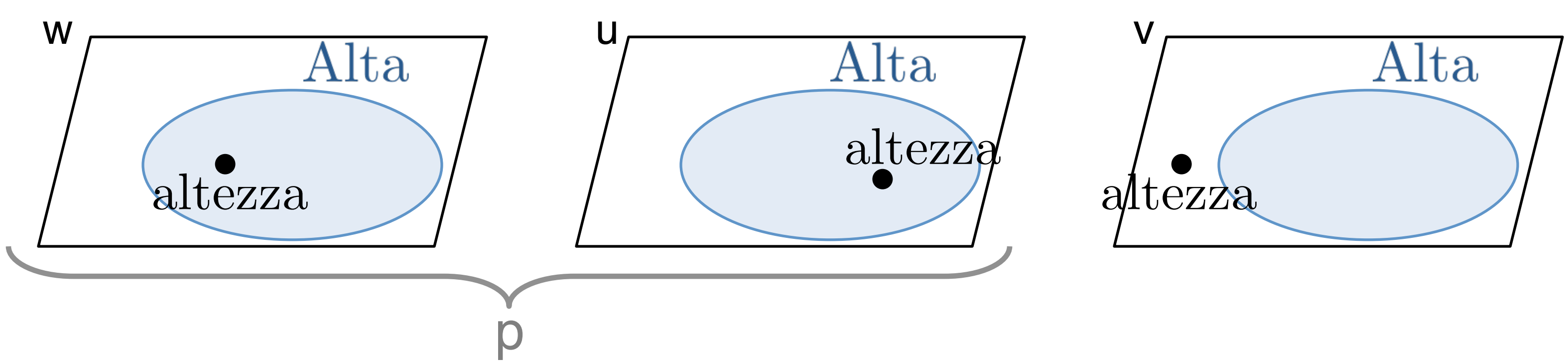
- La struttura costruita finora è una medaglia con due facce:

  1) se da mondo a mondo si tiene rigida l'interpretazione dei predicati e si fa variare quella delle costanti si ottiene la probabilità classica

il predicato è lo stesso in tutti i mondi

$$\mathbf{P}_p\mathrm{Alta}(\mathrm{altezza})$$

la costante varia da mondo a mondo



Logica modale + Probabilità

- La struttura costruita finora è una medaglia con due facce:

  1) se da mondo a mondo si tiene rigida l'interpretazione dei predicati e si fa variare quella delle costanti si ottiene la probabilità classica

il predicato è lo stesso in tutti i mondi

$$\mathbf{P}_p \mathrm{Alta}(\mathrm{altezza})$$

la costante varia da mondo a mondo

$\downarrow$

è come "pescare" una altezza a caso nel dominio
e scoprire che la probabilità che sia alta è p

Logica modale + Probabilità

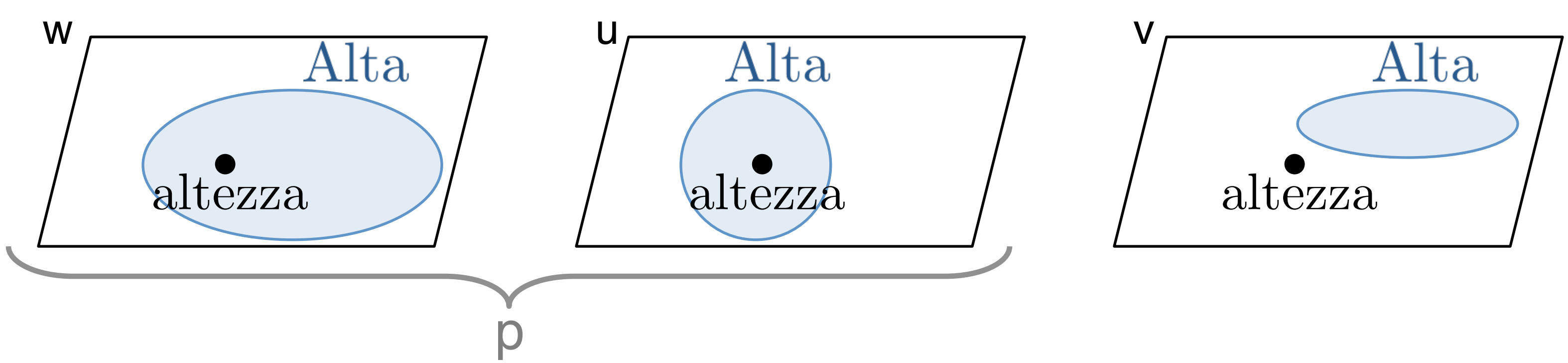
- La struttura costruita finora è una medaglia con due facce:

  2) se da mondo a mondo si tiene rigida l'interpretazione delle costanti e si fa variare quella dei predicati si ottengono gli insiemi fuzzy

il predicato varia da mondo a mondo

$$\mathbf{P}_p\mathrm{Alta}(\mathrm{altezza})$$

la costante è la stessa in tutti i mondi



Logica modale + Probabilità

- La struttura costruita finora è una medaglia con due facce:

  2) se da mondo a mondo si tiene rigida l'interpretazione delle costanti e si fa variare quella dei predicati si ottengono gli insiemi fuzzy

il predicato varia da mondo a mondo

la costante è la stessa in tutti i mondi

$$\mathbf{P}_p \mathrm{Alta}(\mathrm{altezza})$$

$$\downarrow$$

in questo caso, p è il valore della funzione d'appartenenza dell'insieme fuzzy Alta applicato nel punto $\mathrm{altezza}$

Cosa sono gli insiemi fuzzy?

- Sono particolari *fbf aperte* del tipo $\mathrm{Alta}(x), \mathrm{MediaStatura}(x), \ldots$
  - Alta e $\mathrm{MediaStatura}$ sono i predicati che individuano gli insiemi
  - x varia tra tutte le possibili altezze

$$\downarrow$$

gli insiemi fuzzy
sono oggetti del linguaggio

$$\downarrow$$

emergono “naturalmente” all’interno
della costruzione probabilistico-modale

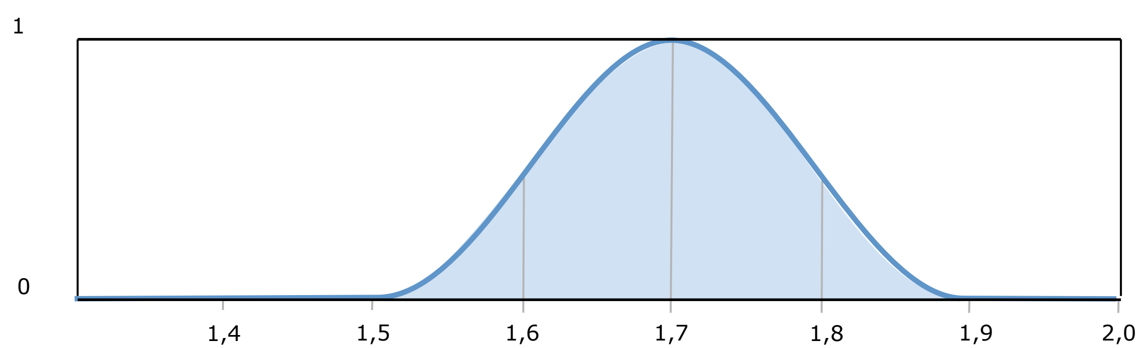
Cosa sono gli insiemi fuzzy?

- Sono particolari *fbf aperte* del tipo $\mathrm{Alta}(x), \mathrm{MediaStatura}(x), \ldots$

- Rappresentazione

insieme
dei mondi
possibili

W



$\mathcal{D}$ ← dominio degli oggetti

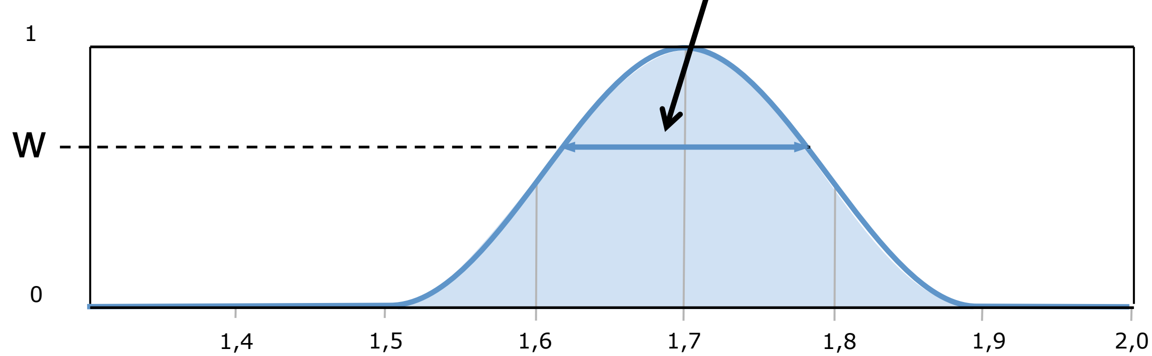
Cosa sono gli insiemi fuzzy?

- Sono particolari *fbf aperte* del tipo $\mathrm{Alta}(x), \mathrm{MediaStatura}(x), \ldots$

- Rappresentazione

$$\{d \in D : w \models \mathrm{MediaStatura}(d)\}$$

W



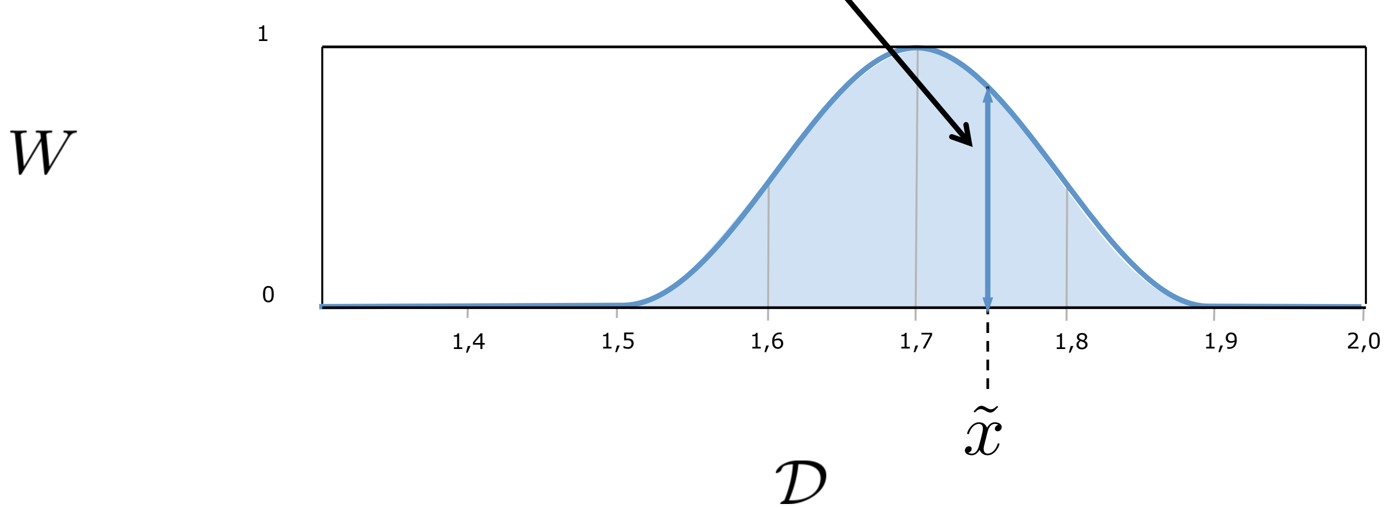
$\mathcal{D}$

Cosa sono gli insiemi fuzzy?

- Sono particolari *fbf aperte* del tipo $\mathrm{Alta}(x), \mathrm{MediaStatura}(x), \ldots$

- Rappresentazione

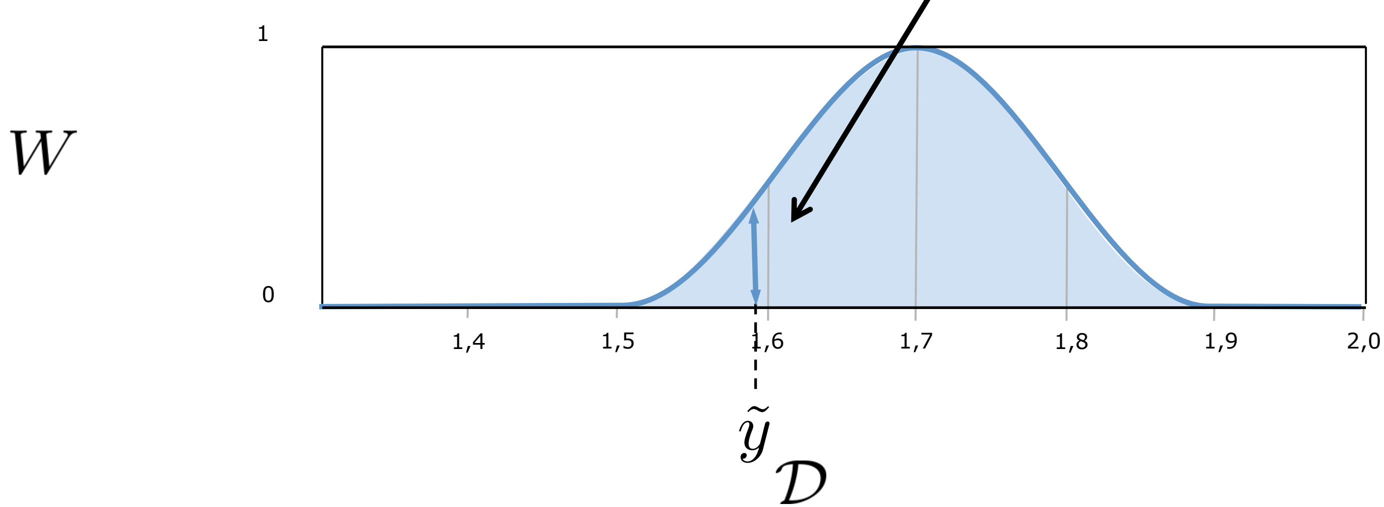
$$\pi(\{w \in W : w \models \mathrm{MediaStatura}(\tilde{x})\}) = 0,75$$



Cosa sono gli insiemi fuzzy?

- Sono particolari *fbf aperte* del tipo $\mathrm{Alta}(x), \mathrm{MediaStatura}(x), \ldots$
- Rappresentazione

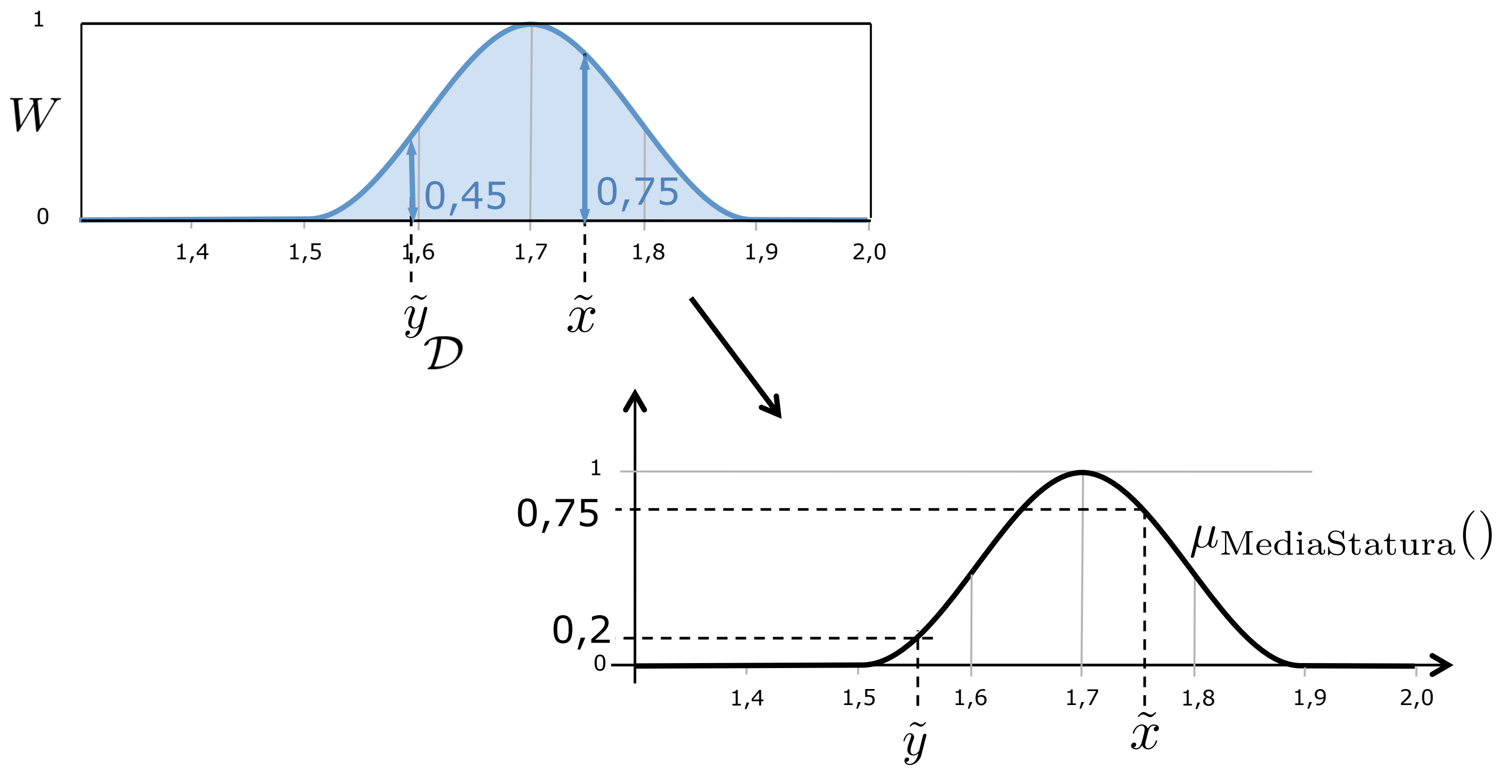
$$\pi(\{w \in W : w \models \mathrm{MediaStatura}(\tilde{y})\}) = 0,45$$



Cosa sono gli insiemi fuzzy?

- Sono particolari *fbf aperte* del tipo $\mathrm{Alta}(x), \mathrm{MediaStatura}(x), \ldots$

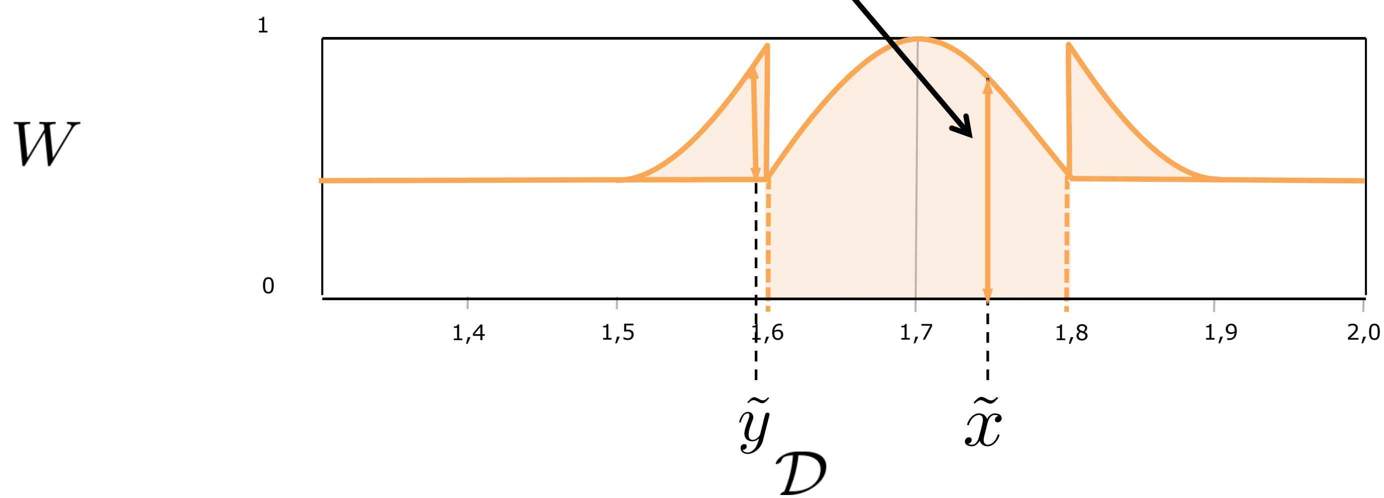
- Funzione d'appartenenza:



Cosa succede agli insiemi fuzzy?

- La funzione di appartenenza non è più sufficiente per caratterizzarli completamente:

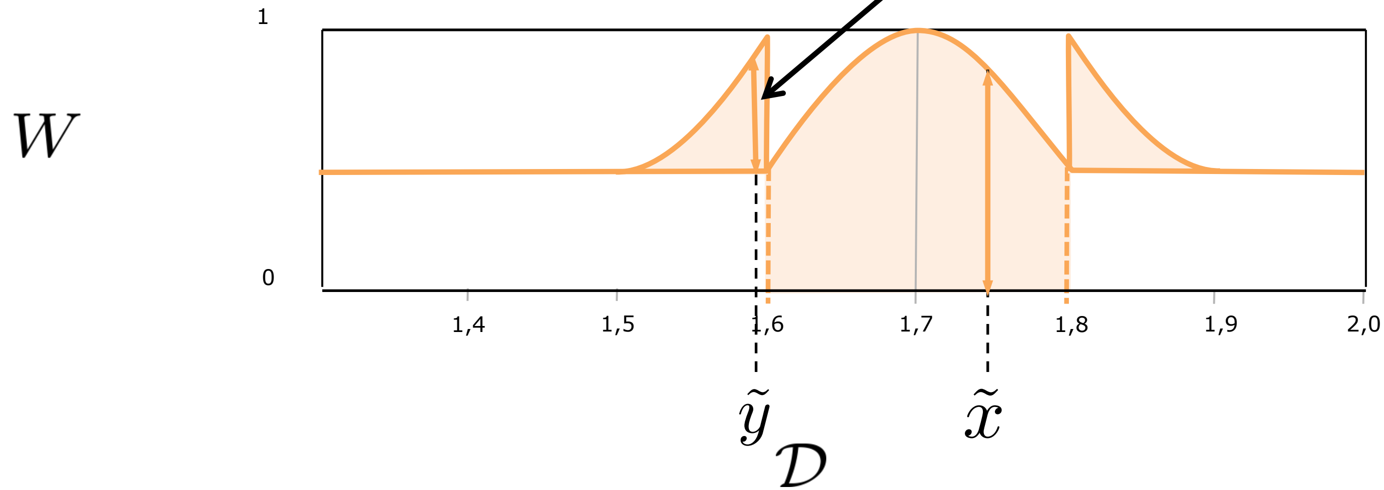
$$\pi(\{w \in W : w \models \mathrm{MediaStatura}(\tilde{x})\}) = 0,75$$



Cosa succede agli insiemi fuzzy?

- La funzione di appartenenza non è più sufficiente per caratterizzarli completamente:

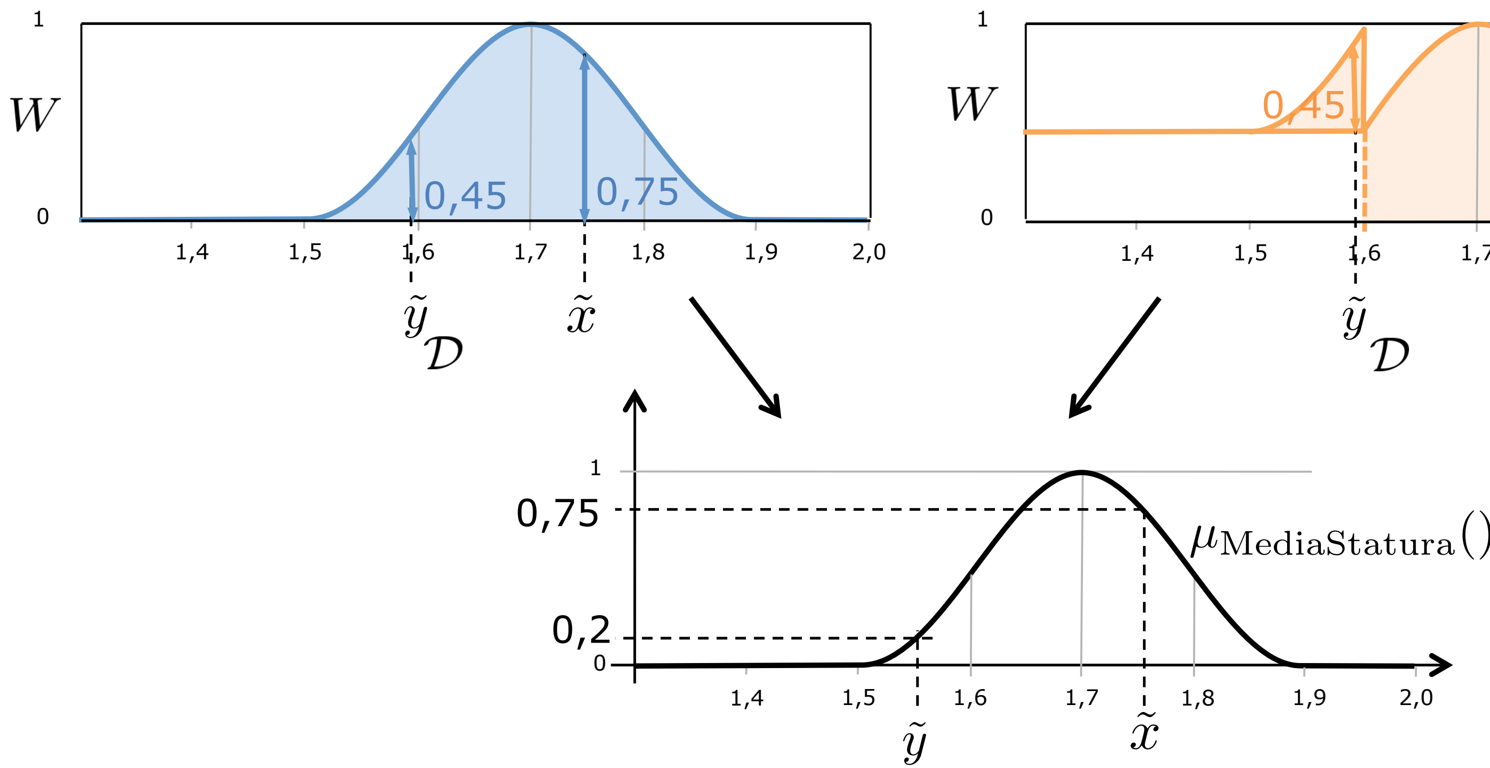
$$\pi(\{w \in W : w \models \mathrm{MediaStatura}(\tilde{y})\}) = 0,45$$



Cosa succede agli insiemi fuzzy?

- La funzione di appartenenza non è più sufficiente per caratterizzarli completamente:

  (esistono strutture in cui insiemi fuzzy differenti che hanno al medesima funzione di appartenenza)

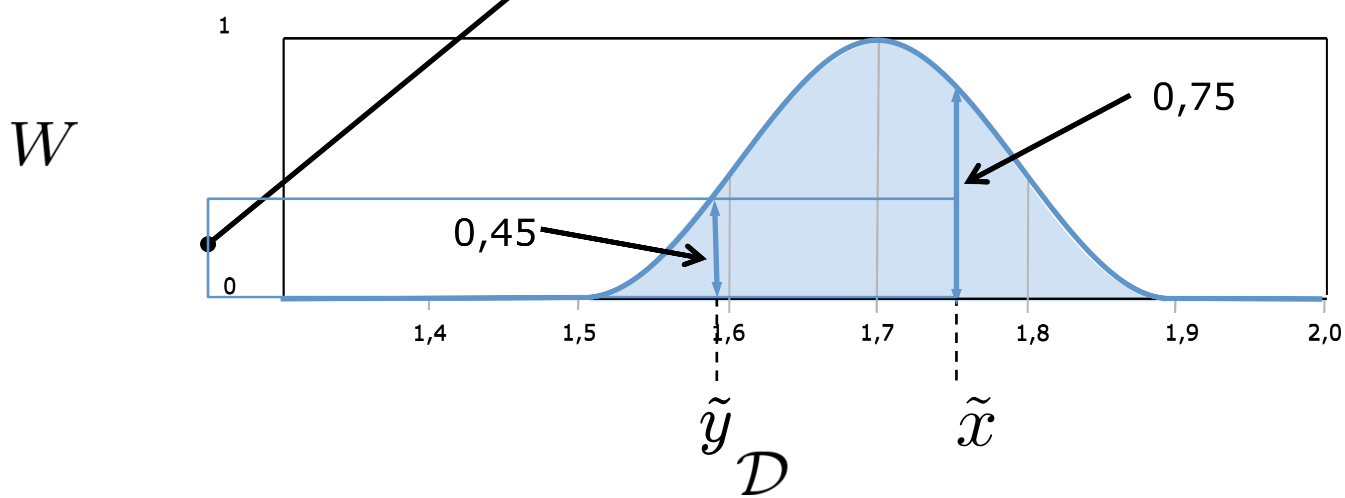


Cosa succede agli insiemi fuzzy?

- I connettivi dipendono dalla struttura interna degli insiemi fuzzy cui sono applicati
  (non possono essere scelti arbitrariamente)

$$\pi(\mathrm{MediaStatura}(\tilde{x}) \wedge \mathrm{MediaStatura}(\tilde{y})) = 0,45$$

è il minimo tra 0,75 e 0,45

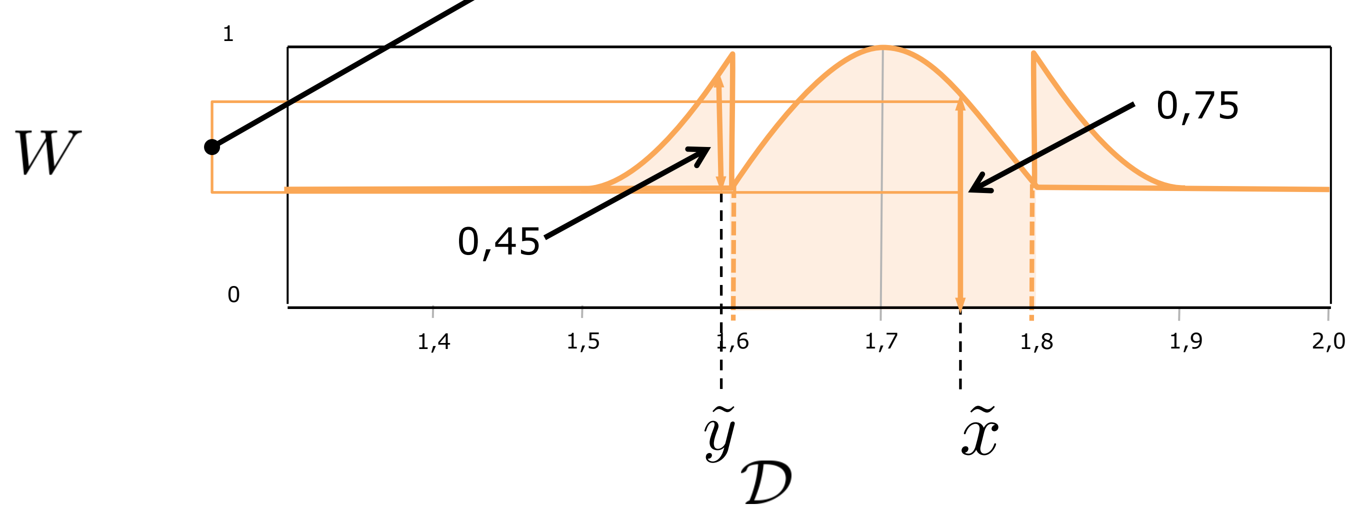


- I connettivi dipendono dalla struttura interna degli insiemi fuzzy cui sono applicati

  (non possono essere scelti arbitrariamente)

$$\pi(\mathrm{MediaStatura}(\tilde{x}) \wedge \mathrm{MediaStatura}(\tilde{y})) = 0,35$$

non è il minimo tra 0,75 e 0,45

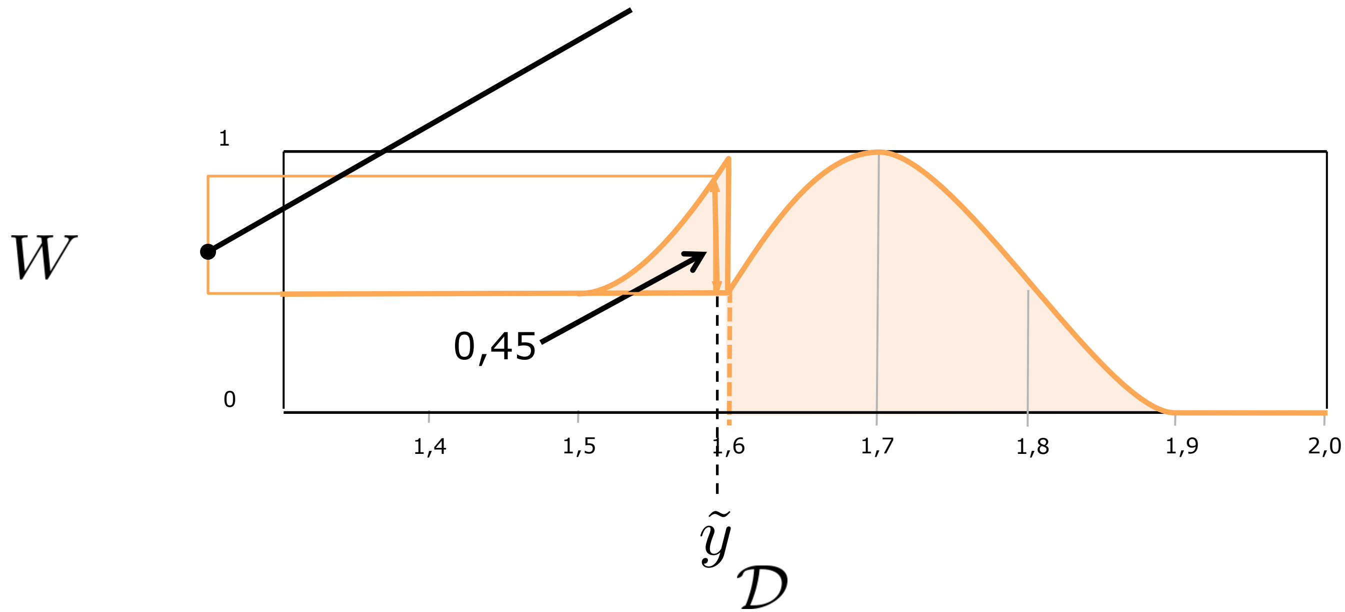


Cosa succede agli insiemi fuzzy?

- Non è garantita la verofunzionalità

$$\pi(\text{MediaStatura}(\tilde{y})) = 0,45$$

$$\pi(\text{MediaStatura}(\tilde{y}) \wedge \text{MediaStatura}(\tilde{y})) = 0,45$$



Cosa succede agli insiemi fuzzy?

- Non è garantita la verofunzionalità

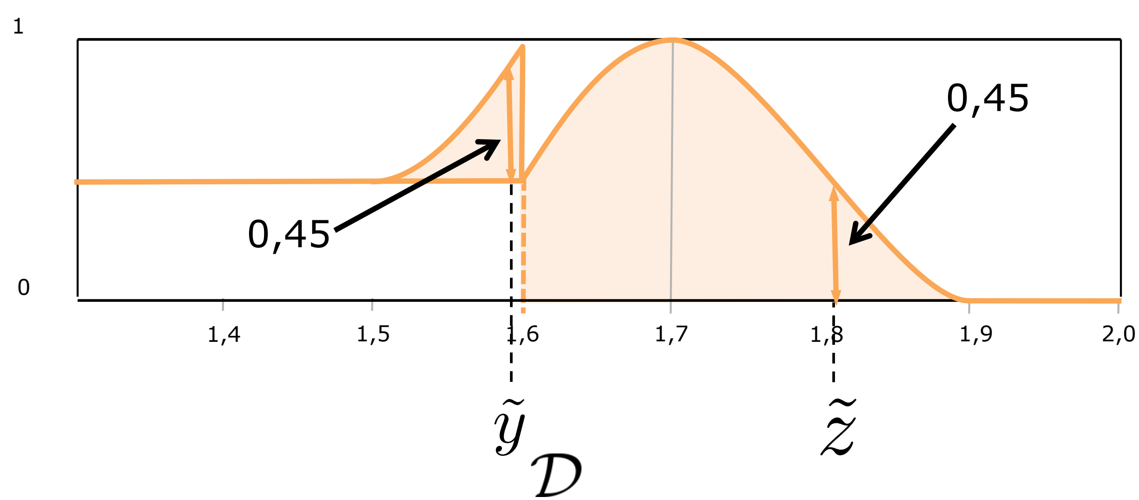
$$\pi(\text{MediaStatura}(\tilde{y})) = 0,45 \quad \text{e} \quad \pi(\text{MediaStatura}(\tilde{z})) = 0,45$$

<u>*ma*</u>

$$\pi(\text{MediaStatura}(\tilde{y}) \wedge \text{MediaStatura}(\tilde{y})) = 0,45$$

$$\pi(\text{MediaStatura}(\tilde{y}) \wedge \text{MediaStatura}(\tilde{z})) = 0$$

W



Alcuni risultati

- **Teorema:** dati gli insiemi fuzzy $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ sono equivalenti

1) $\forall x \forall y \, (\Box(\varphi(x) \to \psi(y)) \vee \Box(\psi(y) \to \varphi(x)))$;

2) $p = \max(q, r)$:
$\forall x \forall y \, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \vee \psi(y)))$;

3) $p = \min(q, r)$:
$\forall x \forall y \, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \wedge \psi(y)))$;

4) $p = \min(1 - q + r, 1)$:
$\forall x \forall y \, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \to \psi(y)))$.

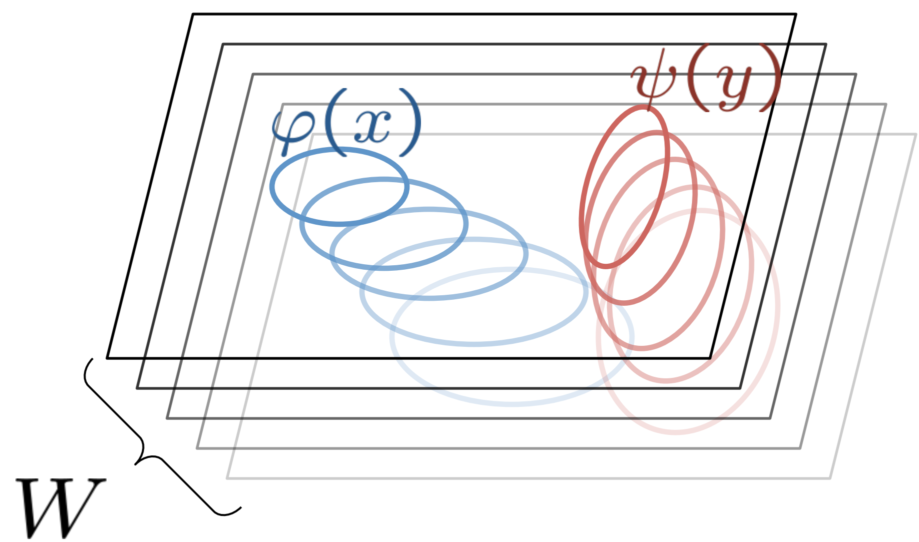
Alcuni risultati

- **<u>Teorema:</u>** dati gli insiemi fuzzy $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ sono equivalenti

1) $\forall x \forall y\, (\Box(\varphi(x) \to \psi(y)) \vee \Box(\psi(y) \to \varphi(x)))$;

(descrive la forma degli insiemi coinvolti)

Ad esempio:

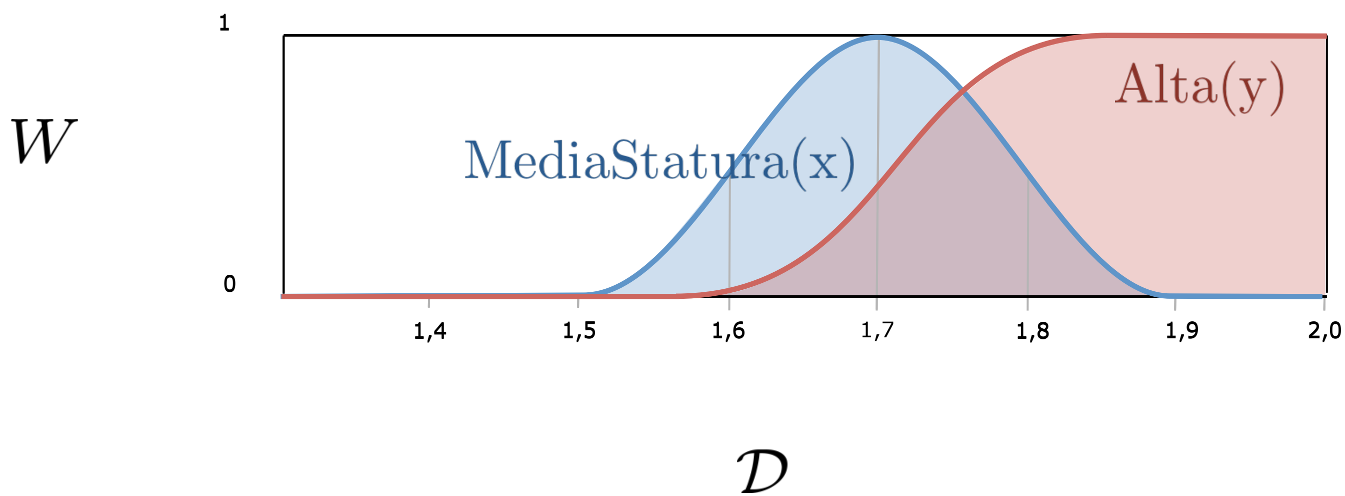


Alcuni risultati

- **<u>Teorema:</u>** dati gli insiemi fuzzy $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ sono equivalenti

  1) $\forall x \forall y \, (\Box(\varphi(x) \to \psi(y)) \vee \Box(\psi(y) \to \varphi(x)))$;

  (descrive la forma degli insiemi coinvolti)



Alcuni risultati

- **Teorema:** dati gli insiemi fuzzy $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ sono equivalenti

1) $\forall x \forall y \, (\Box(\varphi(x) \to \psi(y)) \vee \Box(\psi(y) \to \varphi(x)));$

2) $p = \boxed{\max(q, r)}$:
$\forall x \forall y \, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \vee \psi(y)));$

Alcuni risultati

- **Teorema:** dati gli insiemi fuzzy $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ sono equivalenti

1) $\forall x \forall y\, (\Box(\varphi(x) \to \psi(y)) \vee \Box(\psi(y) \to \varphi(x)))$;

2) $p = \boxed{\mathsf{max}(q,r)}$:
$\forall x \forall y\, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \vee \psi(y)))$;

3) $p = \boxed{\mathsf{min}(q,r)}$:
$\forall x \forall y\, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \wedge \psi(y)))$;

4) $p = \boxed{\mathsf{min}(1-q+r,1)}$:
$\forall x \forall y\, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \to \psi(y)))$.

la forma degli insiemi fuzzy (1) obbliga ad utilizzare una certa disgiunzione (2), una certa congiunzione (3) e una certa implicazione (4)

Alcuni risultati

- **Teorema:** dati gli insiemi fuzzy $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ sono equivalenti

1) $\forall x \forall y \, (\Box(\varphi(x) \to \neg\psi(y)) \vee \Box(\neg\psi(y) \to \varphi(x)))$;

2) $p = \mathsf{min}(q + r, 1)$:
$\forall x \forall y \, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \vee \psi(y)))$;

3) $p = \mathsf{max}(q + r - 1, 0)$:
$\forall x \forall y \, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \wedge \psi(y)))$;

4) $p = \mathsf{max}(1 - q, r)$:
$\forall x \forall y \, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \to \psi(y)))$.

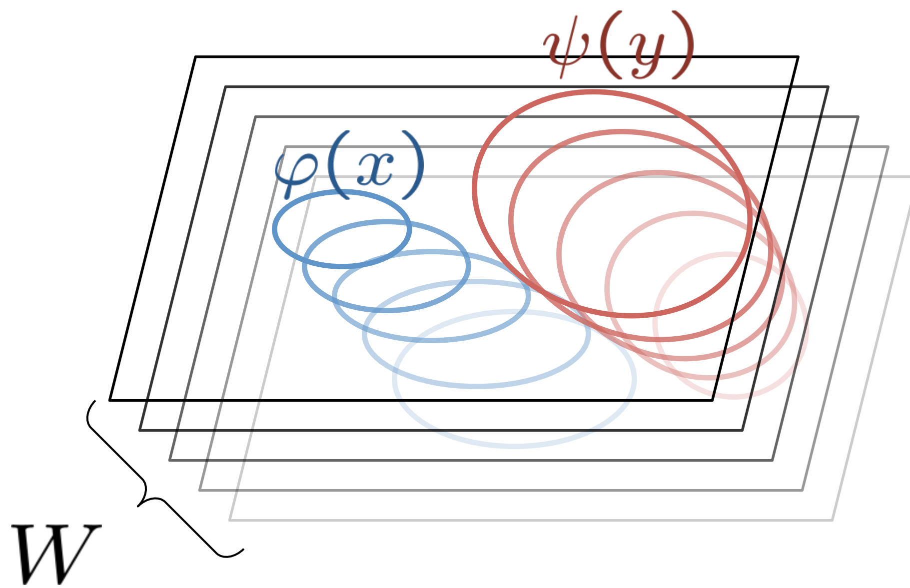
Alcuni risultati

- **Teorema:** dati gli insiemi fuzzy $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ sono equivalenti

1) $\forall x \forall y\, (\Box(\varphi(x) \to \neg\psi(y)) \vee \Box(\neg\psi(y) \to \varphi(x)))$;

(descrive la forma degli insiemi coinvolti)

Ad esempio:



Alcuni risultati

- **<u>Teorema:</u>** dati gli insiemi fuzzy $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ sono equivalenti

1) $\forall x \forall y\, (\Box(\varphi(x) \to \neg\psi(y)) \vee \Box(\neg\psi(y) \to \varphi(x)));$

2) $p = \boxed{\mathrm{min}(q + r, 1)}$:
$\forall x \forall y\, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \vee \psi(y)));$

3) $p = \boxed{\mathrm{max}(q + r - 1, 0)}$:
$\forall x \forall y\, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \wedge \psi(y)));$

4) $p = \boxed{\mathrm{max}(1 - q, r)}$:
$\forall x \forall y\, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \to \psi(y))).$

la forma degli insiemi fuzzy (1) obbliga ad utilizzare una certa disgiunzione (2), una certa congiunzione (3) e una certa implicazione (4)

Alcuni risultati

- **Teorema:** dati gli insiemi fuzzy $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ sono equivalenti

1) $\forall x \forall y\, (\varphi(x) \perp \psi(y))$; (gli insiemi hanno forme “indipendenti”)

2) $p = \boxed{q + r - (q \cdot r)}$:
$\forall x \forall y\, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \vee \psi(y)))$;

3) $p = \boxed{q \cdot r}$:
$\forall x \forall y\, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \wedge \psi(y)))$;

4) $p = \boxed{1 - (1 - r) \cdot q}$:
$\forall x \forall y\, ((\mathbf{P}_q \varphi(x) \wedge \mathbf{P}_r \psi(y)) \to \mathbf{P}_p(\varphi(x) \to \psi(y)))$.

la forma degli insiemi fuzzy (1) obbliga ad utilizzare una certa disgiunzione (2), una certa congiunzione (3) e una certa implicazione (4)

Fuzzy Logics 2.0 e modelli grafici

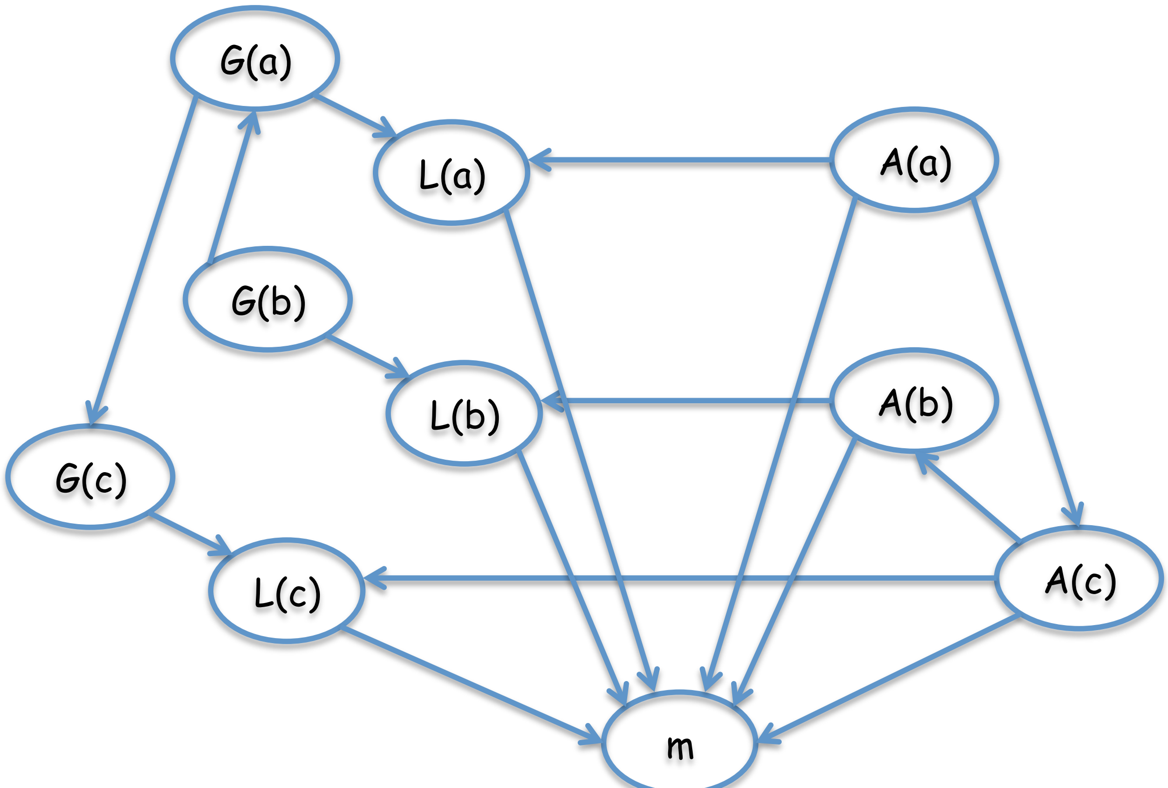
- L'Ispettore Enrico indaga sulla morte di Diego e scopre che:
  - *l'assassino deve essere alto*
  - *l'assassino probabilmente era amante della vittima*
  - *Diego prediligeva le giovani donne adulte alte*

- A questo punto dell'indagine i sospettati sono:
  - Anna (42 anni, alta 1,73 m)
  - Bruno (36 anni, alto 1,92 m)
  - Carla (27 anni, alta 1,79 m)

- Enrico decide di usare un modello grafico e ragionare probabilisticamente

  Lo può fare restando all'interno delle Fuzzy Logics 2.0?

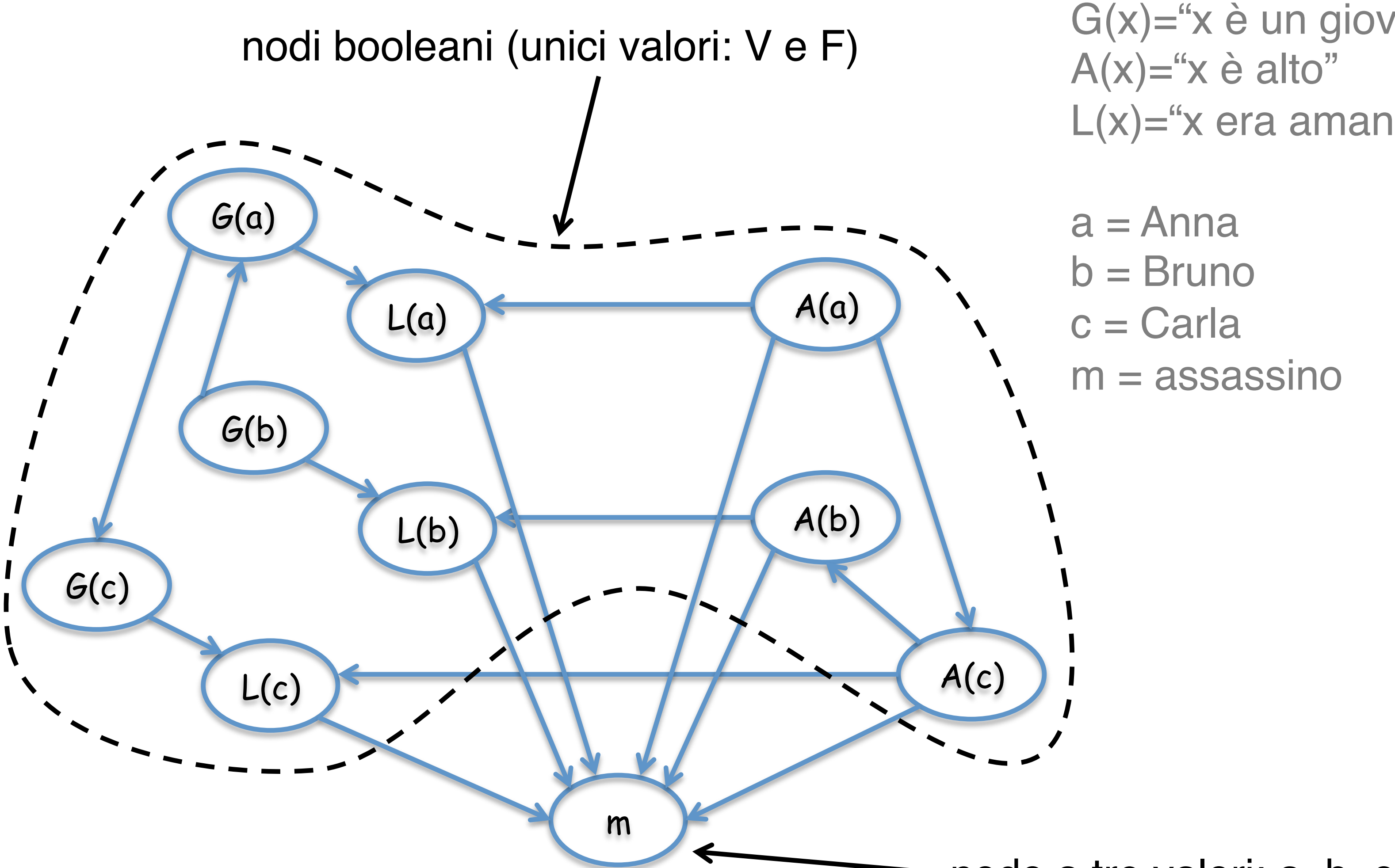
Fuzzy Logics 2.0 e modelli grafici



G(x)="x è un giovane adulto"
A(x)="x è alto"
L(x)="x era amante di Diego"

a = Anna
b = Bruno
c = Carla
m = assassino

Fuzzy Logics 2.0 e modelli grafici



G(x)="x è un giovane adulto"
A(x)="x è alto"
L(x)="x era amante di Diego"

a = Anna
b = Bruno
c = Carla
m = assassino

Fuzzy Logics 2.0 e modelli grafici

- Dati relativi all'altezza:
  - *Anna è alta 1,73 m* h(a)=1,73
  - *Bruno è alto 1,92 m* h(b)=1,92
  - *Carla è alta 1,79 m* h(c)=1,79

h è una funzione rigida
(esprime l'altezza
di ciascuna persona)

L'altezza di Anna è inferiore a quella di Carla

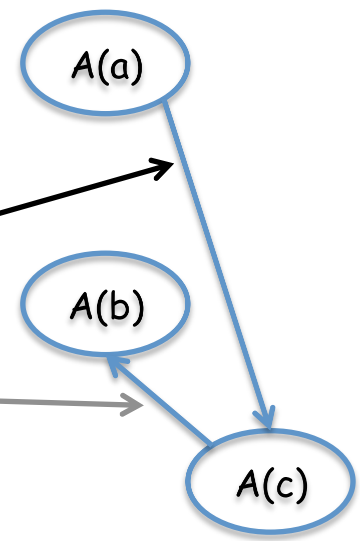
↓

se Anna è alta, è ragionevole che anche Carla sia alta

↓

c'è dipendenza tra A(c) e A(a)

(e analogamente tra A(b) e A(c))



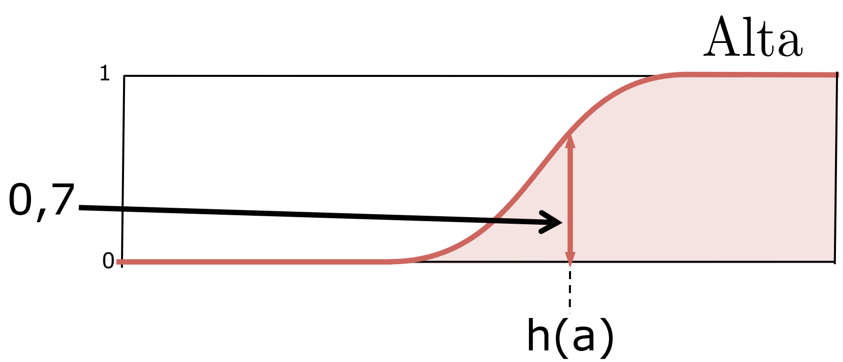
Fuzzy Logics 2.0 e modelli grafici

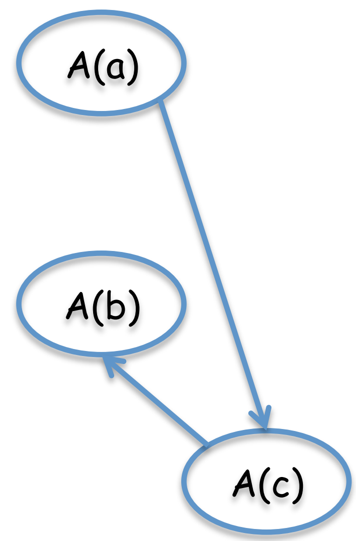
- Dati relativi all'altezza:
  - *Anna è alta 1,73 m* h(a)=1,73
  - *Bruno è alto 1,92 m* h(b)=1,92
  - *Carla è alta 1,79 m* h(c)=1,79

h è una funzione rigida (esprime l'altezza di ciascuna persona)

- Come assegnare le probabilità nel modello grafico?
  - si possono usare i fuzzy sets:

$$\mathrm{Prob}(A(a)) = \mu_{\mathrm{Alta}}(h(a)) = 0,7$$





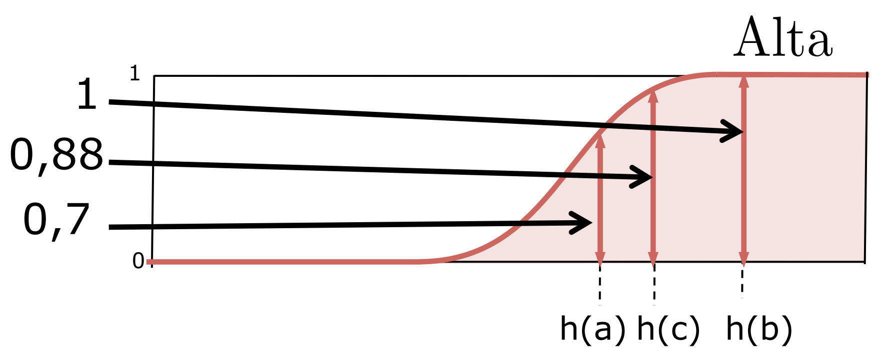
Fuzzy Logics 2.0 e modelli grafici

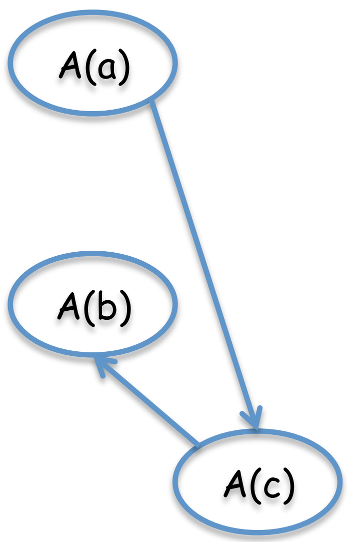
- Dati relativi all'altezza:
  - *Anna è alta 1,73 m* h(a)=1,73
  - *Bruno è alto 1,92 m* h(b)=1,92
  - *Carla è alta 1,79 m* h(c)=1,79

h è una funzione rigida (esprime l'altezza di ciascuna persona)

- Come assegnare le probabilità nel modello grafico?
  - si possono usare i fuzzy sets:

$$\mathbf{P}_{0,7}A(a), \quad \mathbf{P}_{1}A(b), \quad \mathbf{P}_{0,88}A(c)$$





Fuzzy Logics 2.0 e modelli grafici

- Dati relativi all'altezza:
  - *Anna è alta 1,73 m* h(a)=1,73
  - *Bruno è alto 1,92 m* h(b)=1,92
  - *Carla è alta 1,79 m* h(c)=1,79

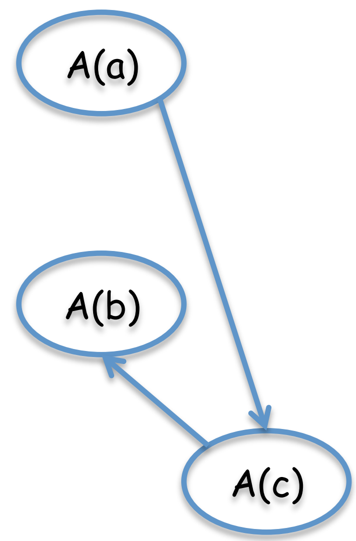
h è una funzione rigida (esprime l'altezza di ciascuna persona)

- Come assegnare le probabilità nel modello grafico?
  - si possono usare i fuzzy sets:

$$\mathrm{Prob}(A(c)|A(a)) = \frac{\mathrm{Prob}(A(c) \wedge A(a))}{\mathrm{Prob}(A(a))}$$

$$\mathrm{Prob}(A(c)|\neg A(a)) = \frac{\mathrm{Prob}(A(c) \wedge \neg A(a))}{\mathrm{Prob}(\neg A(a))}$$

come calcolare la probabilità congiunta?



Fuzzy Logics 2.0 e modelli grafici

- Dati relativi all'altezza:
  - *Anna è alta 1,73 m* h(a)=1,73
  - *Bruno è alto 1,92 m* h(b)=1,92
  - *Carla è alta 1,79 m* h(c)=1,79

h è una funzione rigida (esprime l'altezza di ciascuna persona)

- Come assegnare le probabilità nel modello grafico?
  - si suppone che il concetto di *alto* sia ragionevole:

$$\forall x \forall y ((h(x) \leq h(y)) \rightarrow (A(x) \rightarrow A(y)))$$

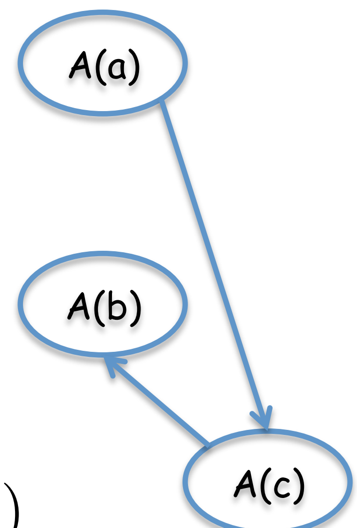
(se x ha altezza inferiore a y e x è alto, allora anche y è alto)

$$\downarrow$$

$$\forall x \forall y (\Box (A(x) \rightarrow A(y)) \vee \Box (A(y) \rightarrow A(x)))$$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{Prob}(A(x) \wedge A(y)) = \min(\mathrm{Prob}(A(x)), \mathrm{Prob}(A(y)))$$



Fuzzy Logics 2.0 e modelli grafici

- Dati relativi all'altezza:
  - *Anna è alta 1,73 m* h(a)=1,73
  - *Bruno è alto 1,92 m* h(b)=1,92
  - *Carla è alta 1,79 m* h(c)=1,79

h è una funzione rigida (esprime l'altezza di ciascuna persona)

- Come assegnare le probabilità nel modello grafico?
  - si suppone che il concetto di *alto* sia ragionevole:

$$\forall x \forall y ((h(x) \leq h(y)) \rightarrow (A(x) \rightarrow A(y)))$$

(se x ha altezza inferiore a y e x è alto, allora anche y è alto)

$$\downarrow$$

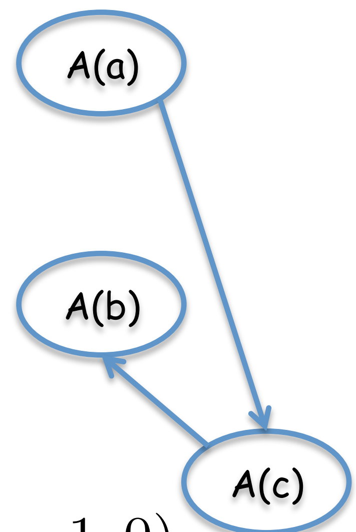
$$\forall x \forall y (\Box(A(x) \rightarrow A(y)) \vee \Box(A(y) \rightarrow A(x)))$$

$$\downarrow$$

$$\forall x \forall y (\Box(A(x) \rightarrow \neg(\neg A(y))) \vee \Box(\neg(\neg A(y)) \rightarrow A(x)))$$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{Prob}(A(x) \wedge \neg A(y)) = \max(\mathrm{Prob}(A(x)) + \mathrm{Prob}(A(y)) - 1, 0)$$



Fuzzy Logics 2.0 e modelli grafici

- Dati relativi all'altezza:
  - *Anna è alta 1,73 m* h(a)=1,73
  - *Bruno è alto 1,92 m* h(b)=1,92
  - *Carla è alta 1,79 m* h(c)=1,79

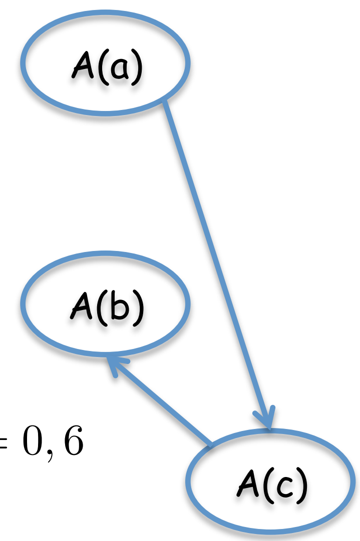
h è una funzione rigida (esprime l'altezza di ciascuna persona)

- Come assegnare le probabilità nel modello grafico?
  - si possono usare i fuzzy sets:

$$\mathbf{P}_{0,7}A(a), \quad \mathbf{P}_{0,88}A(c) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{P}_{0,3}\neg A(a)$$

$$\mathrm{Prob}(A(c) \mid A(a)) = \frac{\mathrm{Prob}(A(a) \wedge A(c))}{\mathrm{Prob}(A(a)))} = \frac{\min(0,7\ ,\ 0,88)}{0,7} = 1$$

$$\mathrm{Prob}(A(c) \mid \neg A(a)) = \frac{\mathrm{Prob}(\neg A(a) \wedge A(c))}{\mathrm{Prob}(\neg A(a)))} = \frac{\max(0,3 + 0,88 - 1, 0)}{0,3} = 0,6$$



(per A(b) si procede in modo analogo)

Fuzzy Logics 2.0 e modelli grafici

- Dati relativi all'età:
  - *Anna ha 42 anni* e(a)=42
  - *Bruno ha 36 anni* e(b)=36
  - *Carla ha 27 anni* e(c)=27

e è una funzione rigida (esprime l'età di ciascuna persona)

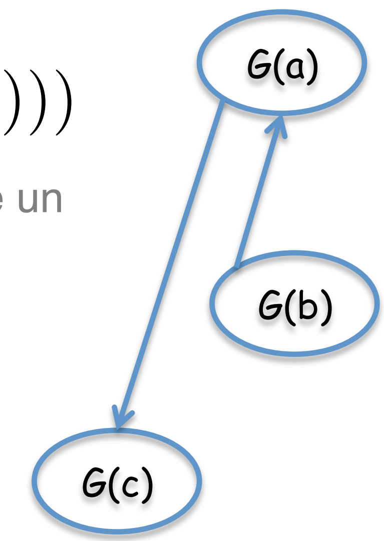
- Per i nodi G(x) il discorso è simile a quello per i nodi A(x)
  - la condizione sul fuzzy set è leggermente diversa:

$$\forall x \forall y ((18 \leq e(x) \leq e(y))) \rightarrow (G(y) \rightarrow G(x)))$$

(se x è maggiorenne ed ha età inferiore a quella di y, allora se y è un giovane adulto deve esserlo anche x)

$$\forall x \; ((e(x) < 18) \rightarrow \neg G(x))$$

(i minorenni non sono giovani adulti)

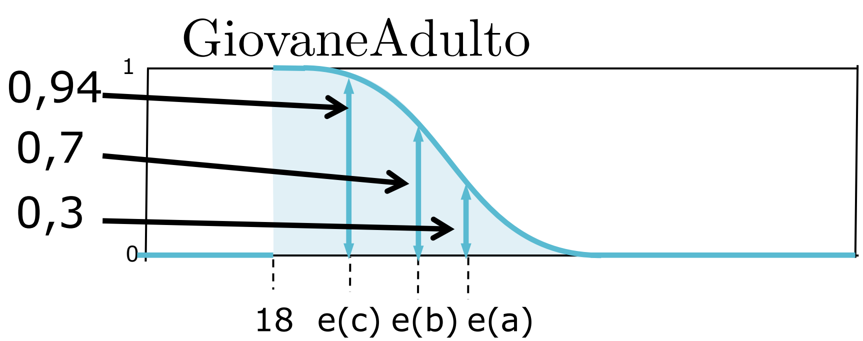


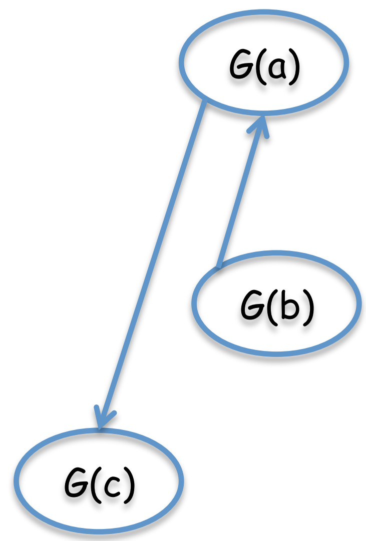
- Dati relativi all'età:
  - *Anna ha 42 anni* e(a)=42
  - *Bruno ha 36 anni* e(b)=36
  - *Carla ha 27 anni* e(c)=27

e è una funzione rigida
(esprime l'età
di ciascuna persona)

- Per i nodi G(x) il discorso è simile a quello per i nodi A(x)

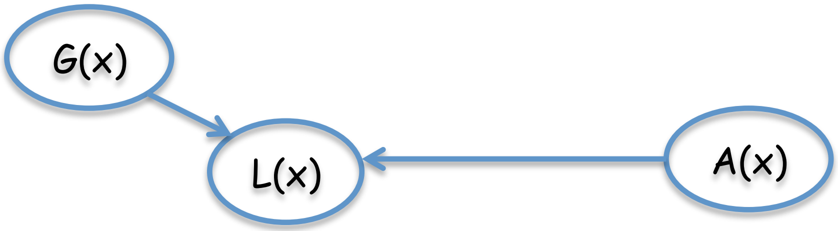
$$\mathbf{P}_{0,4}G(a), \quad \mathbf{P}_{0,7}G(b), \quad \mathbf{P}_{0,94}G(c)$$





(e si possono calcolare le probabilità condizionali come per A)

- Diego prediligeva le giovani donne adulte alte
  - L è dipendente sia da A sia da G



  - invece di utilizzare il fuzzy set L(x) (difficile da ottenere), si può imporre direttamente quando L(x) dipenda da A(x) e da G(x)

la dipendenza di L(x) da A(x) e da G(x) non è però influenzata dal particolare x scelto *(L(a) dipende da A(a) e G(a) nella stessa misura in cui L(b) dipende da A(b) e G(b) e così via)*

$$\forall x \ \mathbf{P}_{0,75}(L(x) \mid A(x) \wedge G(x)) \qquad \forall x \ \mathbf{P}_{0,25}(L(x) \mid \neg A(x) \wedge \neg G(x))$$

$$\forall x \ \mathbf{P}_{0,5}(L(x) \mid A(x) \wedge \neg G(x)) \qquad \forall x \ \mathbf{P}_{0,5}(L(x) \mid \neg A(x) \wedge G(x))$$

dove la formula $\mathbf{P}_p(\varphi \mid \psi)$ è un'estensione del linguaggio regolata da

$$(p = 0 \wedge r = 0) \vee (p > 0 \ \wedge \ q = r \cdot p) \ : \ (\mathbf{P}_p(\varphi) \wedge \mathbf{P}_q(\varphi \wedge \psi)) \rightarrow \mathbf{P}_r(\psi \mid \varphi)$$

(indica proprio la probabilità condizionata di ψ da φ)

Fuzzy Logics 2.0 e modelli grafici

- Gli unici sospettati sono Anna, Bruno e Carla:

$$\forall x\ ((m = x) \to ((x = a) \vee (x = b) \vee (x = c)))$$

- Come descrivere la dipendenza del nodo m (l'assassino) dai nodi L(x) e da quelli A(x)?
  - si potrebbero imporre ad uno ad uno tutti i valori delle probabilità condizionate necessarie (come si è fatto per L), ma sarebbe un procedimento molto lungo e dispendioso
  - sicuramente si deve avere $\forall x((m = x) \to A(x))$

    (Enrico può provare che l'assassino è alto)
  - inoltre dovrebbero valere uguaglianze del tipo ("principio di indifferenza")

$$Prob(m = a \mid A(a) \wedge L(a) \wedge A(b) \wedge L(b) \wedge A(c) \wedge \neg L(c)) =$$

$$Prob(m = a \mid A(a) \wedge L(a) \wedge A(b) \wedge \neg L(b) \wedge A(c) \wedge L(c)) =$$

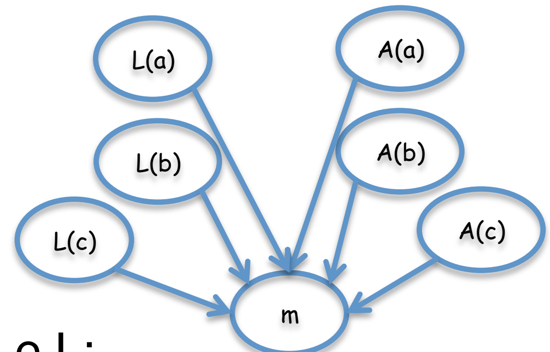
$$Prob(m = b \mid A(a) \wedge L(a) \wedge A(b) \wedge L(b) \wedge A(c) \wedge \neg L(c))$$

Come imporre queste condizioni in modo compatto?

Fuzzy Logics 2.0 e modelli grafici

- Come descrivere la dipendenza del nodo m (l'assassino) dai nodi L(x) e da quelli A(x)?
  - si definisce un predicato (rigido) speciale $\pi_m(x)$ che individua le costanti interessate dai nodi che sono *parents* del nodo m:

$$\forall x(\pi_m(x) \leftrightarrow ((x = a) \vee (x = b) \vee (x = c)))$$



  - si definisce un insieme di predicati $\{\Pi_m(x)\}$ ognuno dei quali coincide con un valore di appartenenza positivo o negativo di x ai predicati A e L:

$$\forall x \ (\pi_m(x) \rightarrow$$
$$((\Pi_m(x) \leftrightarrow (A(x) \wedge L(x))) \vee (\Pi_m(x) \leftrightarrow (A(x) \wedge \neg L(x))) \vee$$
$$(\Pi_m(x) \leftrightarrow (\neg A(x) \wedge L(x))) \vee (\Pi_m(x) \leftrightarrow (\neg A(x) \wedge \neg L(x))))$$

  e per i quali tutti gli altri oggetti sono irrilevanti:

$$\forall x(\neg \pi_m(x) \rightarrow \neg \Pi_m(x))$$

Fuzzy Logics 2.0 e modelli grafici

- Come descrivere la dipendenza del nodo m (l'assassino) dai nodi L(x) e da quelli A(x)?
  - le formule del tipo

$$\forall y \ (\pi(y) \to \Pi_m(y))$$

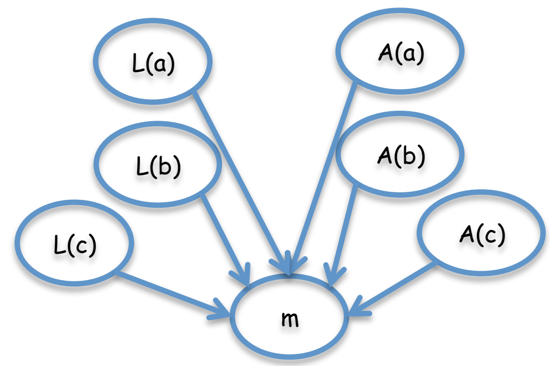
equivalgono a quelle del tipo

$$A(a) \wedge L(a) \wedge \neg A(b) \wedge L(b) \wedge A(c) \wedge \neg L(c)$$

o

$$A(a) \wedge \neg L(a) \wedge A(b) \wedge L(b) \wedge A(c) \wedge L(c)$$

(e simili)



$$\downarrow$$

le probabilità condizionali necessarie si definiscono tramite formule del tipo

$$\mathbf{P}_p(m = x \mid \forall y \ (\pi(y) \to \Pi_m(y)))$$

Fuzzy Logics 2.0 e modelli grafici

- Come descrivere la dipendenza del nodo m (l'assassino) dai nodi L(x) e da quelli A(x)?
  - da $\forall x((m = x) \to A(x))$ si deriva la condizione

$$\forall x\ (\pi_m(x) \to \mathbf{P}_0(m = x \mid \forall y\ (\pi(y) \to \Pi_m(y)) \wedge \neg A(x)))$$

  - il "principio di indifferenza" è conseguenza delle due condizioni

$$\exists p\ :\ \forall x\ (\pi_m(x) \to \mathbf{P}_p(m = x \mid \forall y\ (\pi(y) \to \Pi_m(y)) \wedge A(x) \wedge L(x)))$$

e

$$\exists p\ :\ \forall x \forall y\ ((\pi_m(x) \wedge \pi_m(z)) \to$$
$$(\mathbf{P}_p(m = x \mid \forall y\ (\pi(y) \to \Pi_m(y)) \wedge A(x) \wedge L(x)) \wedge$$
$$\mathbf{P}_{0,66p}(m = z \mid \forall y\ (\pi(y) \to \Pi_m(y)) \wedge A(z) \wedge \neg L(z)))$$

(esprime lo sbilanciamento della probabilità condizionata in favore della verità o della falsità di L)

$\downarrow$

queste condizioni sono sufficienti a determinare tutte le probabilità condizionali

Fuzzy Logics 2.0 e modelli grafici

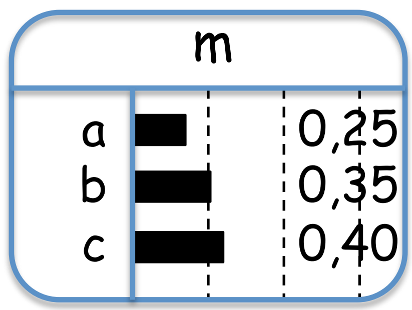
- Enrico ha costruito il suo modello, ora completa il ragionamento con alcune osservazioni:
  - sicuramente Bruno non era amante di Diego

$$\mathbf{P}_0 L(b)$$

  - Carla era certamente amante di Diego

$$\mathbf{P}_1 L(c)$$

- Ecco la distribuzione di probabilità marginale relativa al nodo m:



FL2.0 è in grado di descrivere il modello grafico e il ragionamento probabilistico usati da Enrico

Conclusioni

- **<u>Presente:</u>** ora si ha una potente struttura che abbraccia sia la probabilità sia gli insiemi fuzzy e nella quale
  - si preserva l'intuizione, senza perdere il rigore formale
  - i connettivi sono verofunzionali solo a certe condizioni
  - la struttura interna degli insiemi fuzzy influenza l'utilizzo dei connettivi
  - regole specifiche normano la relazione tra insiemi fuzzy e connettivi
  - si può "ragionare probabilisticamente" utilizzando i modelli grafici e le relative probabilità condizionali

- **<u>Futuro:</u>** il lavoro da fare è indirizzato ad esplorare la nuova struttura per
  - trovare nuove relazioni tra insiemi e connettivi
  - "fondere" probabilità e insiemi fuzzy

    (cosa succede se è variabile l'interpretazione sia dei predicati sia delle costanti?)
  - studiare le possibili applicazioni pratiche

Bibliografia

- **Fuzzy Logics 1.0:**
  - Dubois, D. e Prade, H. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. Academic Press, Inc. 1980 (qualcosa di tecnico)
  - Hájek, J. Y. *Metamathematics of Fuzzy Logics*. Kluwer. 1998 (qualcosa di formale)
  - Cammarata, S. *Sistemi a Logica Fuzzy*. Etas Libri. 1997 (qualche applicazione)
  - Kosko, B. Il Fuzzy-pensiero. *Teoria e Applicazioni della Logica Fuzzy*. Baldini e Castoldi. 1995 (un po' di storia)
- **Fuzzy Logics 2.0:**
  - Piastra, M. What's in a fuzzy set? In *Proceedings of the Sixteenth National Conference on Artificial Intelligence and the Eleventh Annual Conference on Innovative Applications of Artificial Intelligence (Orlando, Florida, United States, July 18-22, 1999*). American Association for Artificial Intelligence, Menlo Park, CA, 200-207. 1999. (l'idea)
  - Fitting, M. E Mendelsohn, R. L. *First-Order Modal Logic*. Kluwer Academic Publishers. 1998. (la componente modale)
  - Bacchus, F. *Representing and Reasoning with Probabilistic Knowledge – A Logical Approach to Probabilities*. The MIT Press, Cambridge, MA. 1990. (KD45 e probabilità)
  - Abadi, M. E Halpern, J. Y. Decidability and expressiveness for first-order logics of probability. *30th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (sfcs 1989)*, 148-153. 1989. (logica e probabilità)
  - Halpern, J. Y. An analysis of first-order logics of probability. *Artificial Intelligence, 46*, 311-350. 1990 (logica e probabilità)