Logiche modali del primo ordine

Andrea Pedrini

L'ispettore Enrico indaga sull'omicidio di Diego

L'Ispettore decide di regolare le proprie convinzioni attraverso una logica modale KD45

- non usa l'assioma T ($\Box\varphi \to \varphi$)

non gli basta essere convinto di qualcosa per averne le prove

$$\mathrm{K}\colon\ \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$$

$$\mathrm{D}\colon\ \Box\varphi \to \neg\Box\neg\varphi$$

$$4\colon\ \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$$

$$5\colon\ \neg\Box\neg\varphi \to \Box\neg\Box\neg\varphi$$

L'ispettore Enrico indaga sull'omicidio di Diego

L'Ispettore decide di regolare le proprie convinzioni attraverso una logica modale KD45

- *non* usa l'assioma T ($\Box\varphi \to \varphi$)

L'ispettore esclude subito il suicidio e prova di non essere lui l'assassino

$$\text{K: } \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$$

$$\text{D: } \Box\varphi \to \neg\Box\neg\varphi$$

$$\text{4: } \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$$

$$\text{5: } \neg\Box\neg\varphi \to \Box\neg\Box\neg\varphi$$

$$\neg(assassino = d) \qquad \neg(assassino = e)$$

L'ispettore Enrico indaga sull'omicidio di Diego

L'Ispettore decide di regolare le proprie convinzioni attraverso una logica modale KD45

- *non usa l'assioma T ($\Box\varphi \to \varphi$)*

L'ispettore esclude subito il suicidio e prova di non essere lui l'assassino

L'assassino si trovava nella stanza quando ha fatto fuoco.

$$\text{K: } \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$$

$$\text{D: } \Box\varphi \to \neg\Box\neg\varphi$$

$$4\text{: } \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$$

$$5\text{: } \neg\Box\neg\varphi \to \Box\neg\Box\neg\varphi$$

$$\neg(assassino = d) \qquad \neg(assassino = e)$$

$$\forall x((assassino = x) \to E(x))$$

L'ispettore Enrico indaga sull'omicidio di Diego

L'Ispettore decide di regolare le proprie convinzioni attraverso una logica modale KD45

- <u>non</u> usa l'assioma T

($\Box\varphi \to \varphi$)

$$\text{K: } \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$$

$$\text{D: } \Box\varphi \to \neg\Box\neg\varphi$$

$$4\text{: } \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$$

$$5\text{: } \neg\Box\neg\varphi \to \Box\neg\Box\neg\varphi$$

L'ispettore esclude subito il suicidio e prova di non essere lui l'assassino

$$\neg(assassino = d) \qquad \neg(assassino = e)$$

L'assassino si trovava nella stanza quando ha fatto fuoco.

$$\forall x((assassino = x) \to E(x))$$

Nella stanza c'erano sicuramente, oltre a Diego ed Enrico, anche Anna, Bruno e Carla.

$$E(a) \qquad E(b) \qquad E(c) \qquad E(d) \qquad E(e)$$

$$E(assassino)$$

L'ispettore Enrico indaga sull'omicidio di Diego

L'Ispettore decide di regolare le proprie convinzioni attraverso una logica modale KD45

- non usa l'assioma T
($\Box\varphi \to \varphi$)

$$\text{K: } \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$$

$$\text{D: } \Box\varphi \to \neg\Box\neg\varphi$$

$$\text{4: } \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$$

$$\text{5: } \neg\Box\neg\varphi \to \Box\neg\Box\neg\varphi$$

L'ispettore esclude subito il suicidio e prova di non essere lui l'assassino

$$\neg(assassino = d) \qquad \neg(assassino = e)$$

L'assassino si trovava nella stanza quando ha fatto fuoco.

$$\forall x((assassino = x) \to E(x))$$

Nella stanza c'erano sicuramente, oltre a Diego ed Enrico, anche Anna, Bruno e Carla.

$$E(a) \qquad E(b) \qquad E(c) \qquad E(d) \qquad E(e)$$

$$E(assassino)$$

L'Ispettore, è convinto che nella stanza non ci fosse nessun altro, ma non è in grado di provarlo.

$$\Box\forall x(E(x) \to ((x = a) \vee (x = b) \vee (x = c) \vee \\ \vee (x = d) \vee (x = e)))$$

L'ispettore Enrico indaga sull'omicidio di Diego

L'ispettore si convince che, chiunque sia, l'assassino era sicuramente un amante della vittima Diego.

L'ispettore è convinto che Carla fosse amante di Diego e che Bruno non lo fosse. Ritiene solo possibile che lo fosse anche Anna.

$$\text{K: } \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$$

$$\text{D: } \Box\varphi \to \neg\Box\neg\varphi$$

$$\text{4: } \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$$

$$\text{5: } \neg\Box\neg\varphi \to \Box\neg\Box\neg\varphi$$

$$\neg(assassino = d) \qquad \neg(assassino = e)$$

$$\forall x((assassino = x) \to E(x))$$

$$E(a) \qquad E(b) \qquad E(c) \qquad E(d) \qquad E(e)$$

$$E(assassino)$$

$$\Box\forall x(E(x) \to ((x = a) \vee (x = b) \vee (x = c) \vee \\ \vee (x = d) \vee (x = e)))$$

$$\forall x\Box((assassino = x) \to L(x, d))$$

$$\Box L(c, d) \qquad \Diamond L(a, d) \qquad \Box\neg L(b, d)$$

L'ispettore Enrico indaga sull'omicidio di Diego

L'ispettore si convince che, chiunque sia, l'assassino era sicuramente un amante della vittima Diego.

L'ispettore è convinto che Carla fosse amante di Diego e che Bruno non lo fosse. Ritiene solo possibile che lo fosse anche Anna.

L'assassino è sicuramente alto almeno 1,75 metri.

Carla e Bruno sono alti almeno 1,75 metri, mentre Anna no.

$$\text{K: } \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$$

$$\text{D: } \Box\varphi \to \neg\Box\neg\varphi$$

$$\text{4: } \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$$

$$\text{5: } \neg\Box\neg\varphi \to \Box\neg\Box\neg\varphi$$

$$\neg(assassino = d) \qquad \neg(assassino = e)$$

$$\forall x((assassino = x) \to E(x))$$

$$E(a) \qquad E(b) \qquad E(c) \qquad E(d) \qquad E(e)$$

$$E(assassino)$$

$$\Box\forall x(E(x) \to ((x = a) \lor (x = b) \lor (x = c) \lor \\ \lor (x = d) \lor (x = e)))$$

$$\forall x\Box((assassino = x) \to L(x, d))$$

$$\Box L(c, d) \qquad \Diamond L(a, d) \qquad \Box\neg L(b, d)$$

$$\forall x((assassino = x) \to A(x))$$

$$A(c) \qquad A(b) \qquad \neg A(a)$$

Linguaggio modale del primo ordine

- L_{MPO}: Logica modale del primo ordine
  - Linguaggio di L_{PO} (costanti individuali, variabili, simboli predicativi, simboli funzionali, connettivi, quantificatori e parentesi)
  - l'operatore modale $\Box$ e il suo derivato $\Diamond$
- **Termini**: sono gli stessi di L_{PO}
  - ogni *costante individuale* è un **termine**
  - ogni *variabile* è un **termine**
  - se *f* è un *simbolo funzionale* a *n* argomenti e $t_1,...,t_n$ sono termini,
    allora anche $f(t_1,...,t_n)$ è un **termine**
  - Un termine **base** (*ground*) non contiene variabili
- **Atomi**: sono gli stessi di L_{PO}
  - se *P* è un *simbolo predicativo* a n argomenti e $t_1,...,t_n$ sono termini,
    allora $P(t_1,...,t_n)$ è un **atomo** o **formula atomica**
  - Un atomo **base** (*ground*) non contiene variabili

Linguaggio modale del primo ordine

- Regole di buona formazione:

  - Ogni *formula atomica* è una fbf

  - se $\varphi \in$ fbf(L_{MPO}), allora $(\neg\varphi) \in$ fbf(L_{MPO})

  - se $\varphi, \psi \in$ fbf(L_{MPO}), allora $(\varphi \rightarrow \psi) \in$ fbf (L_{MPO})

  - se $\varphi, \psi \in$ fbf(L_{MPO}), allora $(\varphi \wedge \psi) \in$ fbf (L_{MPO}) e $(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi)))$

  - se $\varphi, \psi \in$ fbf(L_{MPO}), allora $(\varphi \vee \psi) \in$ fbf (L_{MPO}) e $(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow ((\neg\varphi) \rightarrow \psi)$

  - se $\varphi \in$ fbf(L_{MPO}), allora $(\forall x\varphi) \in$ fbf (L_{MPO})

  - se $\varphi \in$ fbf(L_{MPO}), allora $(\exists x\varphi) \in$ fbf (L_{MPO}) e $(\exists x\varphi) \Leftrightarrow (\neg\forall x(\neg\varphi))$

  - se $\varphi \in$ fbf(L_{MPO}), allora $(\Box\varphi) \in$ fbf (L_{MPO})

  - se $\varphi \in$ fbf(L_{MPO}), allora $(\Diamond\varphi) \in$ fbf (L_{MPO}) e $(\Diamond\varphi) \Leftrightarrow (\neg\Box\neg\varphi)$

I mondi secondo l'ispettore

- *Come visualizzare il pensiero dell'ispettore?*
  - *mondi possibili* ⟷ possibili situazioni della stanza al momento del delitto
  - *oggetti* esistenti nei singoli mondi ⟷ persone presenti nella stanza al momento del delitto

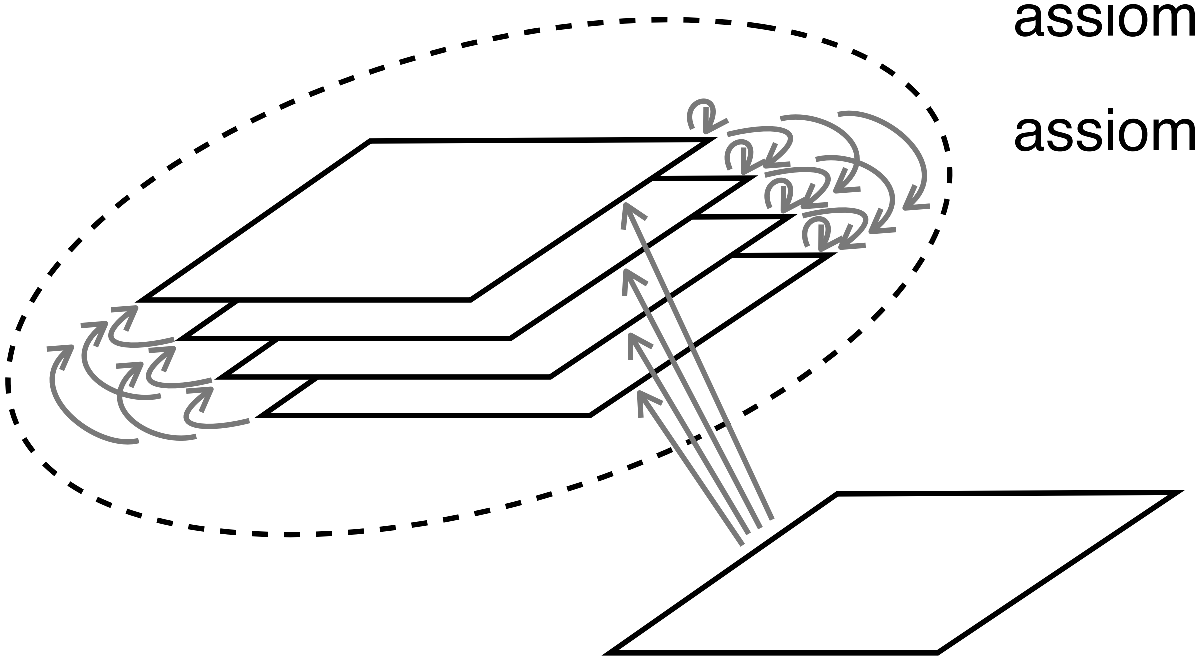
- *Com'è la relazione di accessibilità tra i mondi?*
  - la logica che l'ispettore utilizza è di tipo KD45:

assioma K ⟷ si può pensare in termini di mondi possibili

assioma D ⟷ R è seriale ($\forall w\ \exists u\ \ wRu$)

assioma 4 ⟷ R è transitiva ($wRu,\ uRz \Rightarrow wRz$)

assioma 5 ⟷ R è euclidea ($wRu,\ wRz \Rightarrow uRz$)



"Esistono mondi che l'ispettore non considera possibili"

Semantica: modelli a dominio costante...

- Una **struttura** (*frame*) <**W**,*R*>: è definita come nel caso proposizionale
  - **W** è un insieme di punti detti anche 'stati' o 'mondi possibili'
  - *R* è una relazione binaria (=sottoinsieme di $\mathbf{W}^2$) che definisce l'accessibilità tra i mondi

- Un **modello *a dominio costante*** *(constant domain model)* <**W**,D,*R*,*v*>:
  - **W** ed R come sopra
  - D è un insieme di oggetti (dominio)

  - *v* è la funzione di **interpretazione** che assegna un significato al linguaggio *in ciascun mondo*

    costante individuale ⟶ oggetto in D: $v(c,w) \in D$

    simbolo predicativo di arità n ⟶ relazione n-aria su D: $v(P/n,w) \subseteq D^n$

    simbolo di funzione a n argomenti ⟶ funzione da D^n in D: $v(f/n,w) \in D^n \longrightarrow D$

- Una **assegnazione** (*valuation*) *s* in una struttura <**W**,*R*>:
  - è una funzione che associa ad ogni variabile un oggetto di D, *indipendentemente dal mondo:*

    $s(x) \in D$

Semantica: modelli a dominio costante...

- Una **struttura** (*frame*) <**W**,*R*>: è definita come nel caso proposizionale
  - **W** è un insieme di punti detti anche 'stati' o 'mondi possibili'
  - *R* è una relazione binaria (=sottoinsieme di $\mathbf{W}^2$) che definisce l'accessibilità tra i mondi

- Un **modello *a dominio costante*** *(constant domain model)* <**W**,D,*R*,*v*>:
  - **W** ed R come sopra
  - D è un insieme di oggetti (dominio)

    (D deve necessariamente essere lo stesso per tutti i mondi?)
  - *v* è la funzione di **interpretazione** che assegna un significato al linguaggio *in ciascun mondo*

    costante individuale ⟶ oggetto in D: $v(c,w) \in D$

    simbolo predicativo di arità n ⟶ relazione n-aria su D: $v(P/n,w) \subseteq D^n$

    simbolo di funzione a n argomenti ⟶ funzione da D^n in D: $v(f/n,w) \in D^n \longrightarrow D$

    (costanti, predicati e funzioni possono avere significati diversi da mondo a mondo)

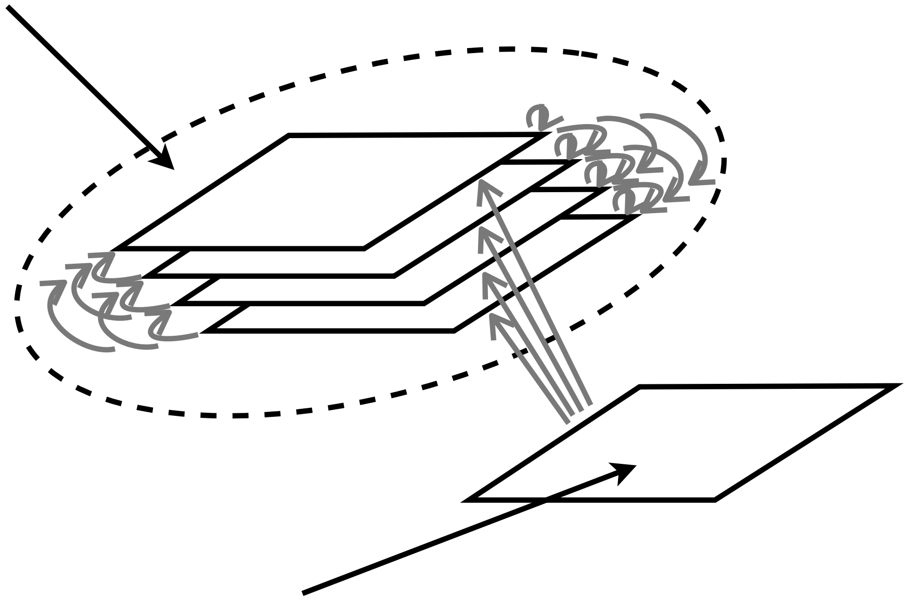
- Una **assegnazione** (*valuation*) *s* in una struttura <**W**,*R*>:
  - è una funzione che associa ad ogni variabile un oggetto di D, *indipendentemente dal mondo:*

    $s(x) \in D$

...e modelli a dominio variabile

- *E se ci fosse qualcuno nascosto nell'ombra?*
  - l'ispettore è convinto che non sia così,
    ma non ne ha le prove
  - nel modello ci sono mondi
    (che l'ispettore non considera possibili)
    in cui nella stanza erano presenti
    anche persone nascoste
    che l'ispettore non ha visto

dominio = {Anna,Bruno,Carla,Diego,Enrico}



dominio = {Anna,Bruno,Carla,Diego,Enrico,uomo nascosto}

- Anche il modello astratto può esprimere questa variabilità:
  - *il dominio degli oggetti varia da mondo a mondo*
  - ad ogni mondo w è associato il suo specifico dominio di oggetti D(w)
  - l'unione di tutti i D(w) al variare di w è il **dominio del modello**: $D(M)=\bigcup_{w \in \mathbf{W}} D(w)$

D(M) è l'insieme degli oggetti di cui *ha senso* parlare in w
(anche se non tutti esistono in w)

D(w) è l'insieme degli oggetti che *esistono attualmente* in w

...e modelli a dominio variabile

- Un **modello *a dominio variabile*** *(varying domain model)* <**W**,D,*R*,*v*>:
  - **W** ed R come nel caso a dominio costante
  - D è una *funzione* che associa ad ogni mondo w un dominio di oggetti D(w)
  - *v* è la funzione di **interpretazione** che assegna un significato al linguaggio *in ciascun mondo*

    costante individuale ⟶ oggetto in D(M): $v(c,w) \in D(M)$

    simbolo predicativo di arità n ⟶ relazione n-aria su D(M): $v(P/n,w) \subseteq (D(M))^n$

    simbolo di funzione a n argomenti ⟶ funzione da $(D(M))^n$ in D(M): $v(f/n,w) \in (D(M))^n \rightarrow D(M)$

- D(M) è il **dominio del modello**:
  - è l'unione di tutti i domini associati ai vari mondi: $D(M)=\cup_{w \in \mathbf{W}} D(w)$

- Una **assegnazione** (*valuation*) *s* in una struttura <**W**,*R*>:
  - è una funzione che associa ad ogni variabile un oggetto di D(M), *indipendentemente dal mondo:* $s(x) \in D(M)$

- I modelli a dominio costante sono un caso particolare di modelli a domini variabili
  - sono quelli in cui la funzione D è costante

Soddisfacimento

- Dati un modello (a dominio variabile) $<\mathbf{W},D,R,v>$, una assegnazione s e un mondo $w \in \mathbf{W}$
  - se φ è una fbf atomica del tipo $P(t_1,...,t_n)$

    $<\mathbf{W},D,R,v>[s],w \models \varphi$ sse $<v(t_1,w)[s],...,v(t_n,w)[s]> \in v(P,w)[s]$

  - se φ e ψ sono fbf qualsiasi

    $<\mathbf{W},D,R,v>[s],w \models \neg\varphi$ sse $<\mathbf{W},D,R,v>[s],w \not\models \varphi$

    $<\mathbf{W},D,R,v>[s],w \models \varphi \wedge \psi$ sse $<\mathbf{W},D,R,v>[s],w \models \varphi$ e $<\mathbf{W},D,R,v>[s],w \models \psi$

    $<\mathbf{W},D,R,v>[s],w \models \varphi \vee \psi$ sse $<\mathbf{W},D,R,v>[s],w \models \varphi$ o $<\mathbf{W},D,R,v>[s],w \models \psi$

    $<\mathbf{W},D,R,v>[s],w \models \varphi \rightarrow \psi$ allora non $<\mathbf{W},D,R,v>[s],w \models \varphi$ e $<\mathbf{W},D,R,v>[s],w \not\models \psi$

  - formule con quantificatori

    $<\mathbf{W},D,R,v>[s],w \models \forall x \varphi$ sse per ogni $\underline{d} \in D(w)$ si ha $<\mathbf{W},D,R,v>[s](x:\underline{d}),w \models \varphi$

    $<\mathbf{W},D,R,v>[s],w \models \exists x \varphi$ sse esiste un $\underline{d} \in D(w)$ per cui si ha $<\mathbf{W},D,R,v>[s](x:\underline{d}),w \models \varphi$

  - formule modali

    $<\mathbf{W},D,R,v>[s],w \models \Box\varphi$ sse per ogni $w' \in \mathbf{W}$ tale che wRw' $<\mathbf{W},D,R,v>[s],w' \models \varphi$

    $<\mathbf{W},D,R,v>[s],w \models \Diamond\varphi$ sse esiste un $w' \in \mathbf{W}$ tale che wRw' e $<\mathbf{W},D,R,v>[s],w' \models \varphi$

Formule valide

- **Validità in un modello** (*model*):
  - una fbf $\varphi \in L_{MPO}$ che è soddisfatta in tutti i mondi w del modello <**W**,D,*R*,*v*>

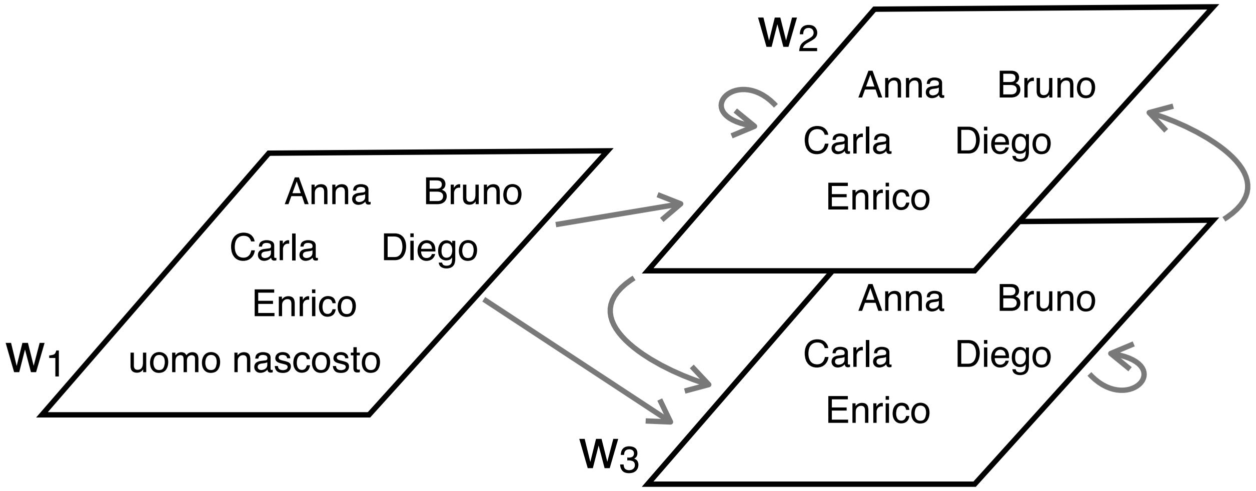
- **Validità in una struttura** (*frame*):
  - una fbf $\varphi \in L_{MPO}$ che è valida in tutti i modelli <**W**,D,*R*,*v*> costruiti a partire dalla medesima struttura <**W**,*R*>

- **Validità**:
  - una fbf $\varphi \in L_{MPO}$ che è valida in qualsiasi modello <**W**,D,*R*,*v*>

Formule di Barcan e formule di Barcan inverse

- *L'ispettore è convinto di avere visto tutti coloro che si trovavano nella stanza al momento del delitto, ma non ne ha le prove*
  - afferma $\Box\forall x V(x)$
  - *non* può affermare $\forall x V(x)$
  - *non* può affermare neppure $\forall x \Box V(x)$
  - e quindi *neanche* $\Box\forall x V(x) \rightarrow \forall x \Box V(x)$
  - può però affermare $\forall x \Box V(x) \rightarrow \Box\forall x V(x)$

v(V,w_1)= v(V,w_2)= v(V,w_3)= {Anna,Bruno,Carla,Diego,Enrico}



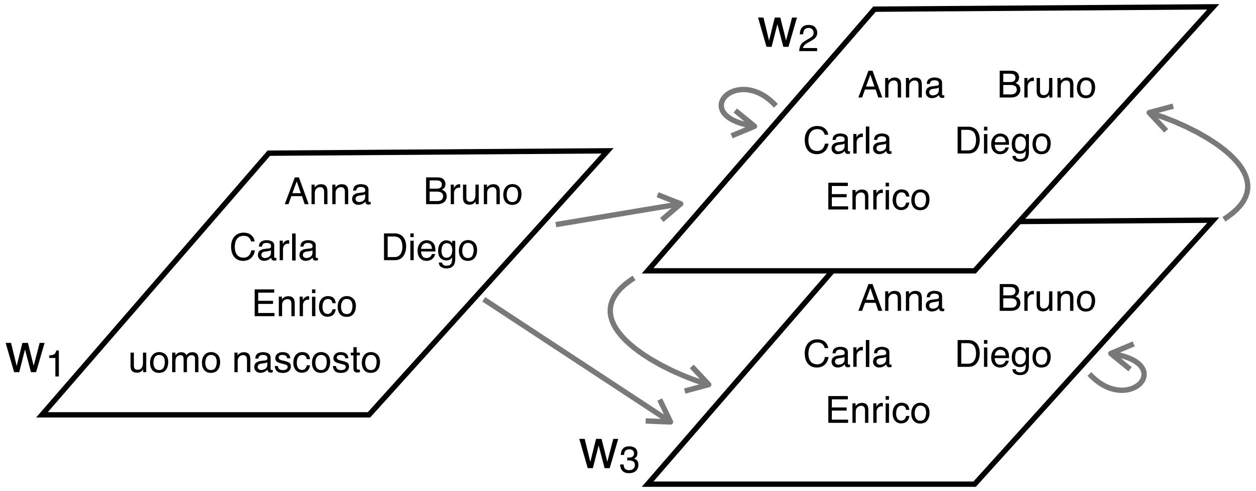
Formule di Barcan e formule di Barcan inverse

- *L'ispettore è convinto di avere visto tutti coloro che si trovavano nella stanza al momento del delitto, ma non ne ha le prove*
  - afferma $\Box\forall x V(x)$
  - *non* può affermare $\forall x V(x)$
  - *non* può affermare neppure $\forall x \Box V(x)$
  - e quindi *neanche* $\Box\forall x V(x) \rightarrow \forall x \Box V(x)$
  - può però affermare $\forall x \Box V(x) \rightarrow \Box\forall x V(x)$

$v(V,w_1) = v(V,w_2) = v(V,w_3) =$ {Anna,Bruno,Carla,Diego,Enrico}

$w_1 \not\models V(u)$

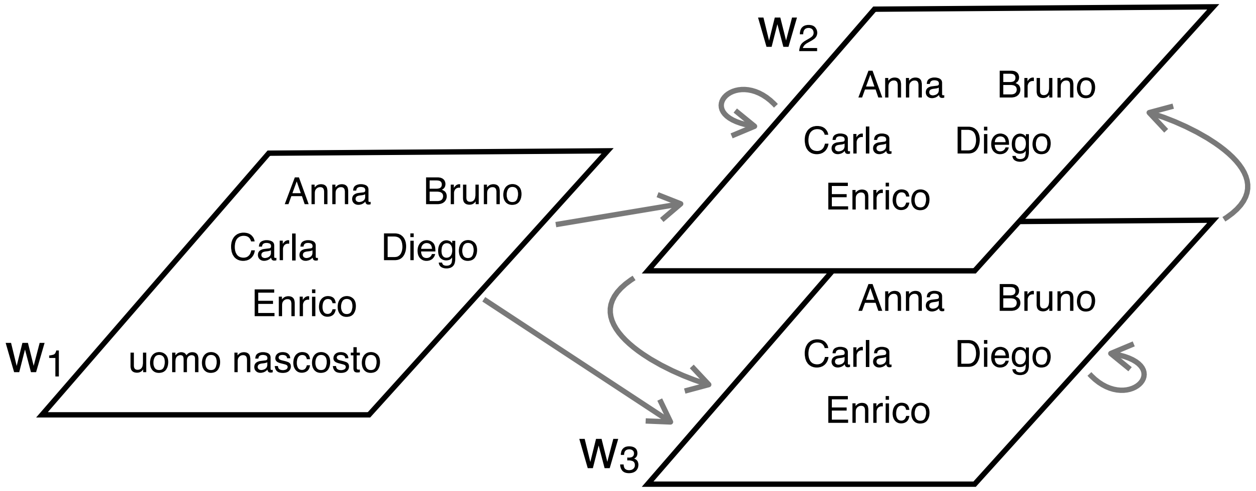
$w_1 \not\models \forall x V(x)$



Formule di Barcan e formule di Barcan inverse

- *L'ispettore è convinto di avere visto tutti coloro che si trovavano nella stanza al momento del delitto, ma non ne ha le prove*
  - afferma $\Box\forall x V(x)$
  - *non* può affermare $\forall x V(x)$
  - *non* può affermare neppure $\forall x \Box V(x)$
  - e quindi *neanche* $\Box\forall x V(x) \rightarrow \forall x \Box V(x)$
  - può però affermare $\forall x \Box V(x) \rightarrow \Box\forall x V(x)$

$v(V,w_1) = v(V,w_2) = v(V,w_3) = \{\text{Anna},\text{Bruno},\text{Carla},\text{Diego},\text{Enrico}\}$



$w_1 \not\models V(u)$

$w_1 \not\models \forall x V(x)$

$w_2 \models \forall x V(x)$

$w_3 \models \forall x V(x)$

Formule di Barcan e formule di Barcan inverse

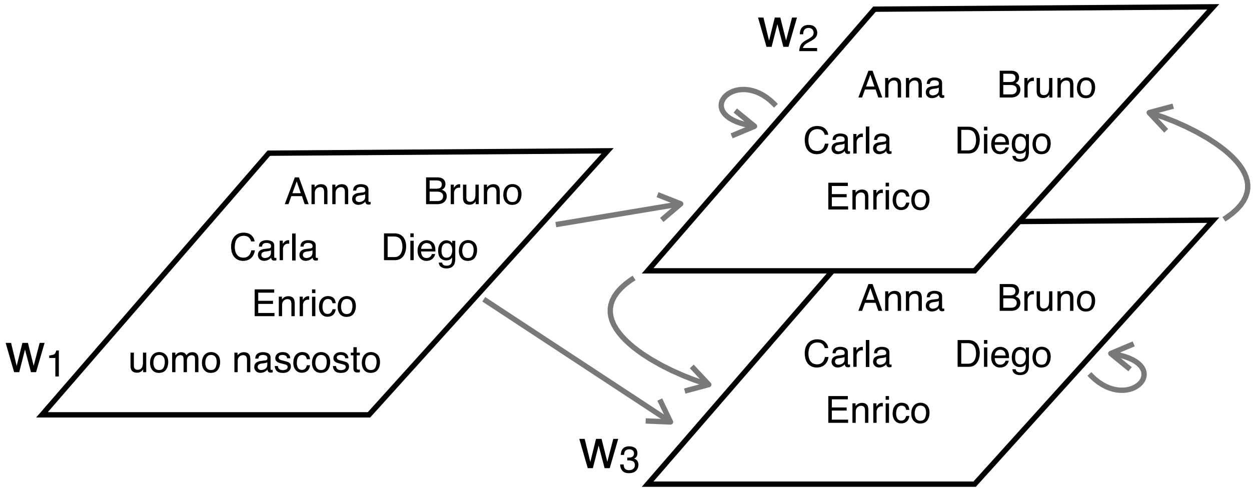
- *L'ispettore è convinto di avere visto tutti coloro che si trovavano nella stanza al momento del delitto, ma non ne ha le prove*
  - afferma $\Box\forall x V(x)$
  - *non* può affermare $\forall x V(x)$
  - *non* può affermare neppure $\forall x \Box V(x)$
  - e quindi *neanche* $\Box\forall x V(x) \rightarrow \forall x \Box V(x)$
  - può però affermare $\forall x \Box V(x) \rightarrow \Box\forall x V(x)$

$v(V,w_1) = v(V,w_2) = v(V,w_3) = \{Anna, Bruno, Carla, Diego, Enrico\}$

$w_1 \not\models V(u)$

$w_1 \not\models \forall x V(x)$

$w_1 \models \Box\forall x V(x)$



$w_2 \models \forall x V(x)$

$w_2 \models \Box\forall x V(x)$

$w_3 \models \forall x V(x)$

$w_3 \models \Box\forall x V(x)$

Formule di Barcan e formule di Barcan inverse

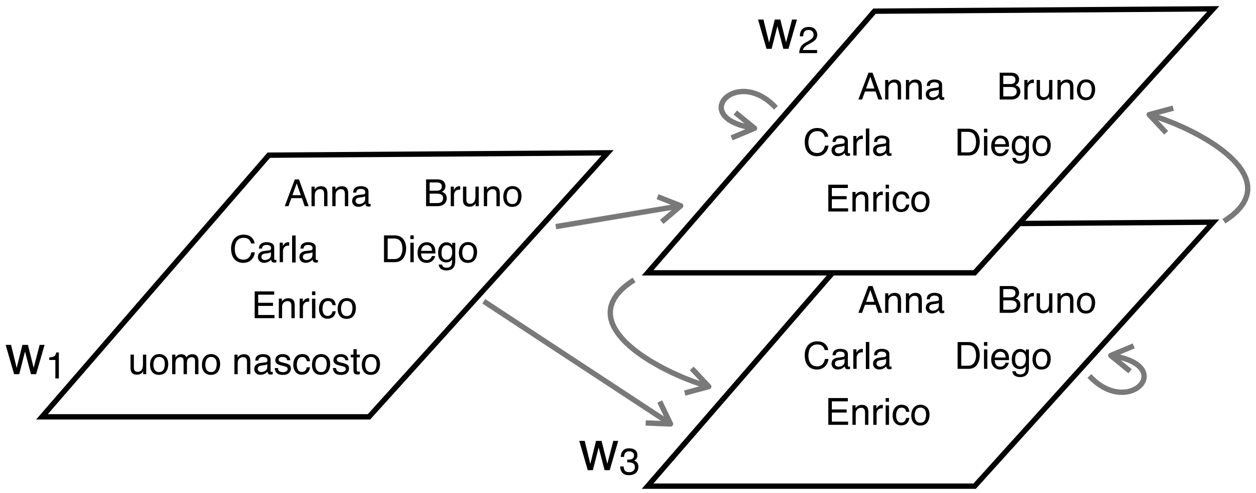
- *L'ispettore è convinto di avere visto tutti coloro che si trovavano nella stanza al momento del delitto, ma non ne ha le prove*
  - afferma $\Box \forall x V(x)$
  - *non* può affermare $\forall x V(x)$
  - *non* può affermare neppure $\forall x \Box V(x)$
  - e quindi *neanche* $\Box \forall x V(x) \rightarrow \forall x \Box V(x)$
  - può però affermare $\forall x \Box V(x) \rightarrow \Box \forall x V(x)$

$v(V,w_1) = v(V,w_2) = v(V,w_3) = \{Anna, Bruno, Carla, Diego, Enrico\}$

$w_1 \not\models V(u)$

$w_1 \not\models \forall x V(x)$

$w_1 \models \Box \forall x V(x)$



$w_2 \models \forall x V(x)$

$w_2 \models \Box \forall x V(x)$

$w_2 \not\models V(u)$

$w_3 \models \forall x V(x)$

$w_3 \models \Box \forall x V(x)$

$w_3 \not\models V(u)$

Formule di Barcan e formule di Barcan inverse

- *L'ispettore è convinto di avere visto tutti coloro che si trovavano nella stanza al momento del delitto, ma non ne ha le prove*
  - afferma $\Box\forall x V(x)$
  - *non* può affermare $\forall x V(x)$
  - *non* può affermare neppure $\forall x \Box V(x)$
  - e quindi *neanche* $\Box\forall x V(x) \rightarrow \forall x \Box V(x)$
  - può però affermare $\forall x \Box V(x) \rightarrow \Box\forall x V(x)$

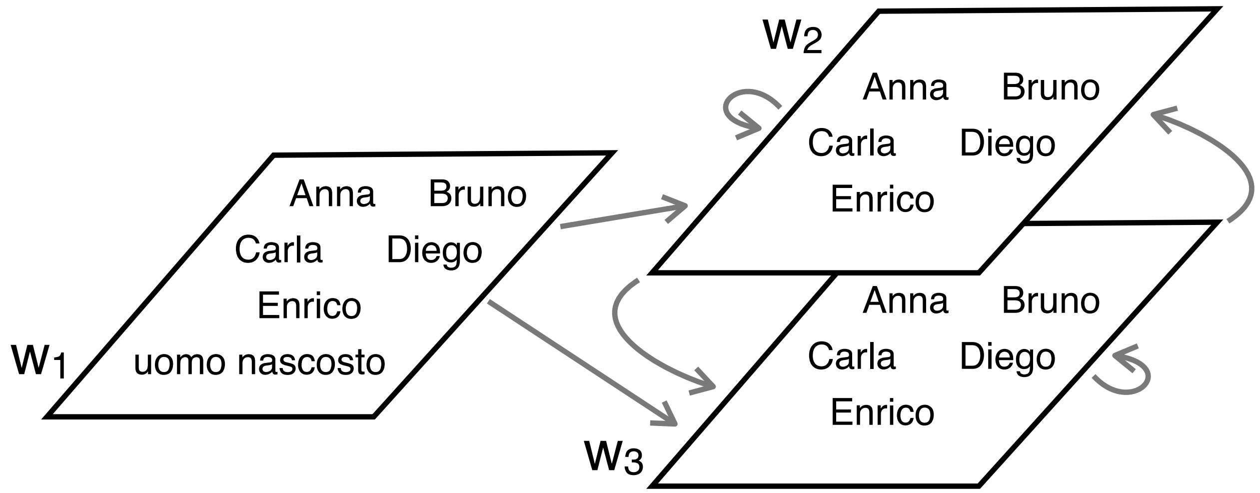
$v(V,w_1) = v(V,w_2) = v(V,w_3) = \{Anna, Bruno, Carla, Diego, Enrico\}$

$w_1 \not\models V(u)$

$w_1 \not\models \forall x V(x)$

$w_1 \models \Box\forall x V(x)$

$w_1 \not\models \Box V(u)$



$w_2 \models \forall x V(x)$

$w_2 \models \Box\forall x V(x)$

$w_2 \not\models V(u)$

$w_3 \models \forall x V(x)$

$w_3 \models \Box\forall x V(x)$

$w_3 \not\models V(u)$

Formule di Barcan e formule di Barcan inverse

- *L'ispettore è convinto di avere visto tutti coloro che si trovavano nella stanza al momento del delitto, ma non ne ha le prove*
  - afferma $\Box\forall x V(x)$
  - *non* può affermare $\forall x V(x)$
  - *non* può affermare neppure $\forall x \Box V(x)$
  - e quindi *neanche* $\Box\forall x V(x) \rightarrow \forall x \Box V(x)$
  - può però affermare $\forall x \Box V(x) \rightarrow \Box\forall x V(x)$

v(V,w_1)= v(V,w_2)= v(V,w_3)= {Anna,Bruno,Carla,Diego,Enrico}

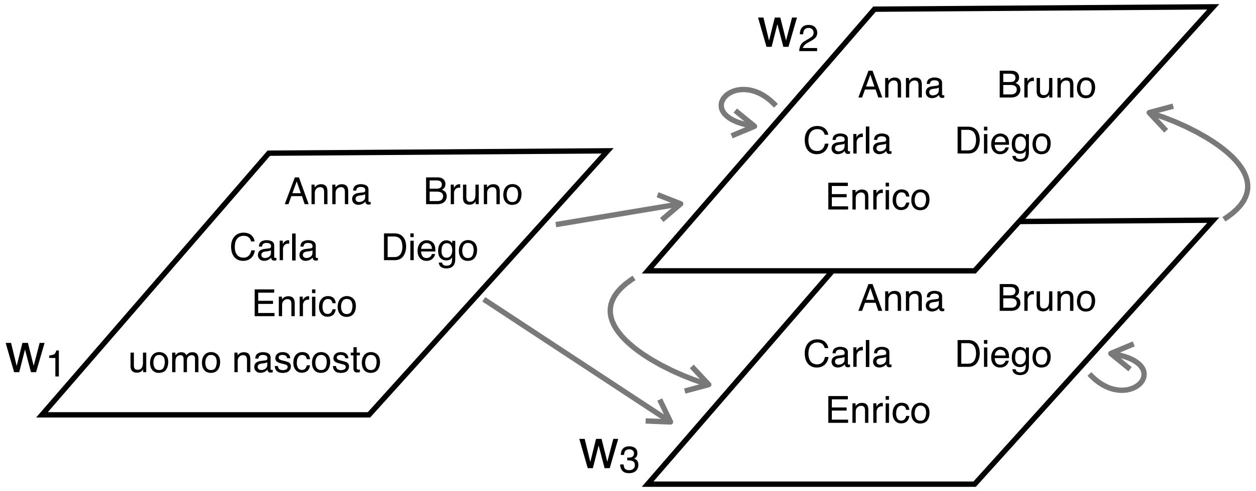
$w_1 \not\models V(u)$

$w_1 \not\models \forall x V(x)$

$w_1 \models \Box\forall x V(x)$

$w_1 \not\models \Box V(u)$

$w_1 \not\models \forall x \Box V(u)$



$w_2 \models \forall x V(x)$

$w_2 \models \Box\forall x V(x)$

$w_2 \not\models V(u)$

$w_3 \models \forall x V(x)$

$w_3 \models \Box\forall x V(x)$

$w_3 \not\models V(u)$

Formule di Barcan e formule di Barcan inverse

- *L'ispettore è convinto di avere visto tutti coloro che si trovavano nella stanza al momento del delitto, ma non ne ha le prove*
  - afferma $\Box\forall x V(x)$
  - *non* può affermare $\forall x V(x)$
  - *non* può affermare neppure $\forall x \Box V(x)$
  - e quindi *neanche* $\Box\forall x V(x) \to \forall x \Box V(x)$
  - può però affermare $\forall x \Box V(x) \to \Box\forall x V(x)$

che differenza c'è tra $\Box\forall x V(x)$ e $\forall x \Box V(x)$?

ci sono situazioni in cui si può scambiare l'ordine di quantificatori e operatori modali?

v(V,w_1)= v(V,w_2)= v(V,w_3)= {Anna,Bruno,Carla,Diego,Enrico}

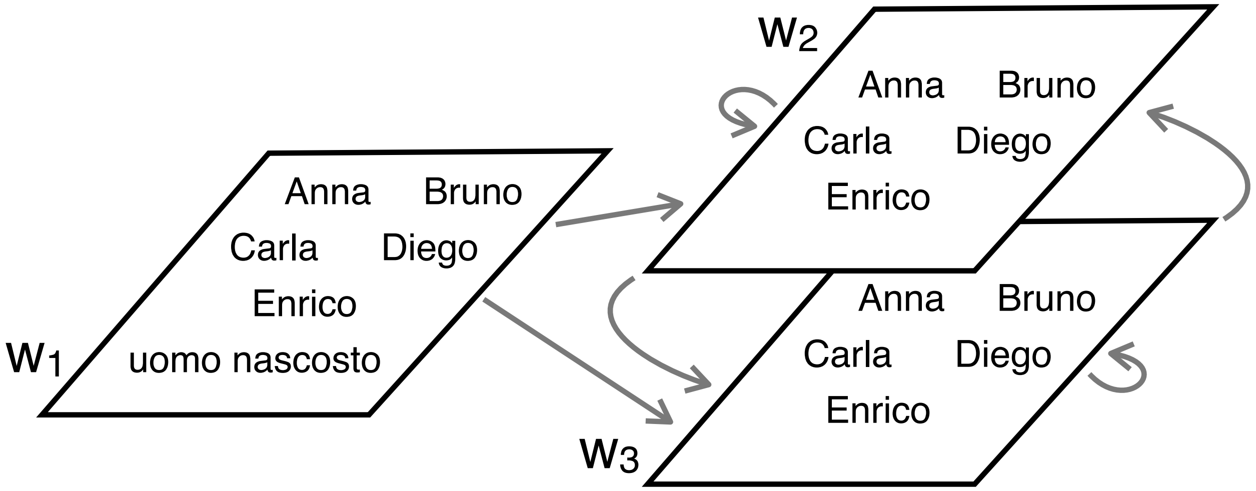
$w_1 \not\models V(u)$

$w_1 \not\models \forall x V(x)$

$w_1 \models \Box\forall x V(x)$

$w_1 \not\models \Box V(u)$

$w_1 \not\models \forall x \Box V(u)$



$w_2 \models \forall x V(x)$

$w_2 \models \Box\forall x V(x)$

$w_2 \not\models V(u)$

$w_3 \models \forall x V(x)$

$w_3 \models \Box\forall x V(x)$

$w_3 \not\models V(u)$

Formule di Barcan e formule di Barcan inverse

- ***Formule di Barcan:*** tutte le formule del tipo

$$(\forall x(\Box\varphi)) \rightarrow (\Box(\forall x\varphi))$$

- ***Formule di Barcan Inverse:*** tutte le formule del tipo

$$(\Box(\forall x\varphi)) \rightarrow (\forall x(\Box\varphi))$$

  - φ è una qualsiasi fbf di L_{MPO}
  - regolano l'interazione tra quantificatori e operatori modali
  - sono strettamente collegate alla variabilità dei domini

- L_{MP} estende L_P
  - si aggiungono schemi di assiomi (K, D, T, B, 4, 5, ...) che regolano il comportamento degli operatori modali

- L_{MPO} estende L_{PO} e L_{MP}
  - si aggiungono alcuni schemi di assiomi modali *(l'ispettore ha scelto K, D, 4 e 5)*
  - si possono aggiungere le Formule di Barcan e le Formule di Barcan Inverse

(anche loro sono schemi di assiomi)

Formule di Barcan e formule di Barcan inverse

- ***Formule di Barcan:*** $(\forall x(\Box\varphi)) \rightarrow (\Box(\forall x\varphi))$ *(φ fbf qualsiasi)*

  - sono equivalenti a $(\Diamond(\exists x\varphi)) \rightarrow (\exists x(\Diamond\varphi))$:

$$(\forall x(\Box\varphi)) \rightarrow (\Box(\forall x\varphi))$$

$$(\forall x(\neg\Diamond\neg\varphi)) \rightarrow (\neg\Diamond\neg(\forall x\varphi))$$

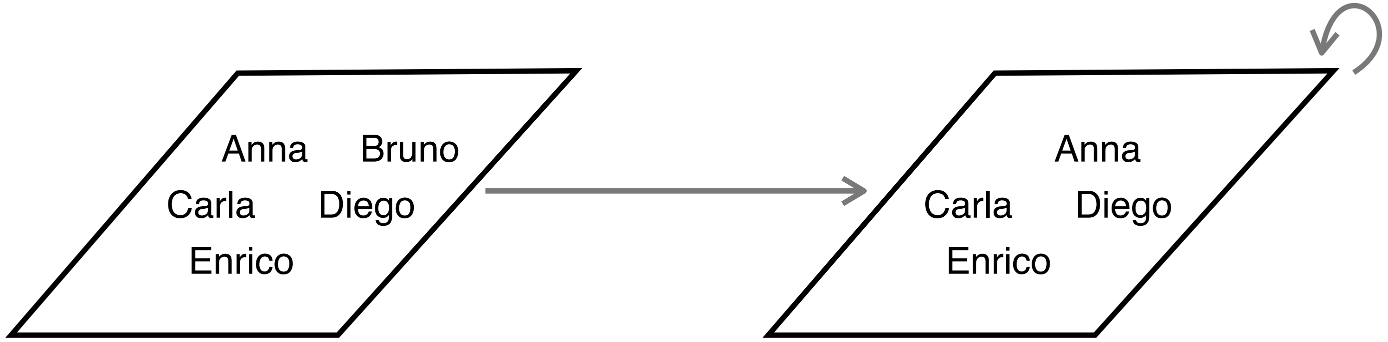
$$\neg(\exists x(\Diamond\neg\varphi)) \rightarrow (\neg\Diamond(\exists x\neg\varphi))$$

$$(\Diamond(\exists x\neg\varphi)) \rightarrow (\exists x(\Diamond\neg\varphi))$$

le fbf nella prima forma sono <u>tutte</u> valide
se e solo se
sono valide <u>tutte</u> le fbf nella seconda forma

  - sono *<u>tutte</u>* valide in un modello se e solo se i domini sono **antimonotoni**, cioè

    per ogni w,w'∈**W**, se w*R*w' allora D(w')⊆D(w)



Formule di Barcan e formule di Barcan inverse

- ***Formule di Barcan Inverse:*** $(\Box(\forall x\varphi)) \rightarrow (\forall x(\Box\varphi))$ *(φ fbf qualsiasi)*

  - sono equivalenti a $(\exists x(\Diamond\varphi)) \rightarrow (\Diamond(\exists x\varphi))$

$$(\Box(\forall x\varphi)) \rightarrow (\forall x(\Box\varphi))$$

$$(\neg\Diamond\neg(\forall x\varphi)) \rightarrow (\forall x(\neg\Diamond\neg\varphi))$$

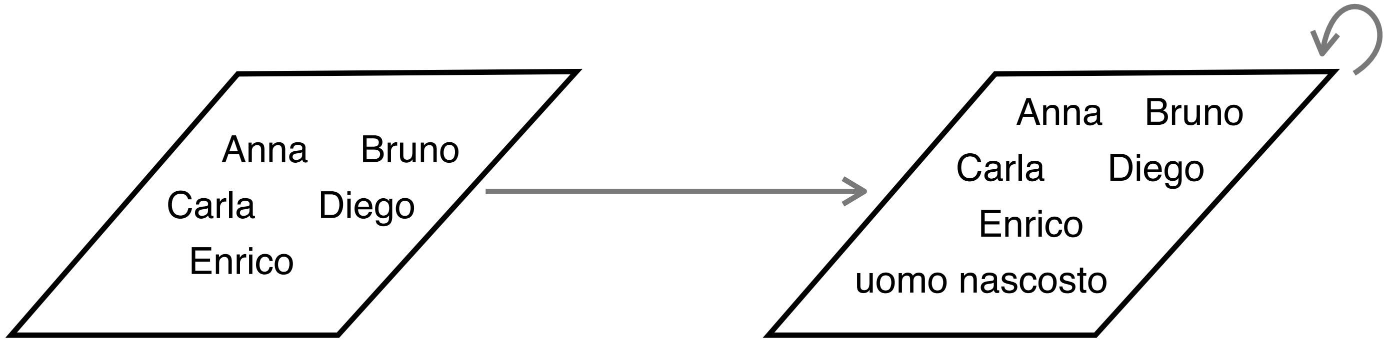
$$(\neg\Diamond(\exists x\neg\varphi)) \rightarrow \neg(\exists x(\Diamond\neg\varphi))$$

$$\exists x(\Diamond\neg\varphi) \rightarrow \Diamond(\exists x\neg\varphi))$$

le fbf nella prima forma sono tutte valide
se e solo se
sono valide tutte le fbf nella seconda forma

  - sono *tutte* valide in un modello se e solo se i domini sono **monotoni**, cioè

per ogni w,w'∈**W**, se w*R*w' allora D(w)⊆D(w')



- In un ***modello a dominio costante*** sono valide *tutte* le Formule di Barcan e *tutte* le Formule di Barcan Inverse

Predicati: rigidi o flessibili?

- La funzione di interpretazione v associa a ciascun predicato P/n del linguaggio e *in ciascun mondo* di **W** una relazione n-aria su D(M): $v(P/n,w) \subseteq (D(M))^n$
  - **-** può succedere che l'interpretazione di un predicato sia la stessa *in tutti i mondi*

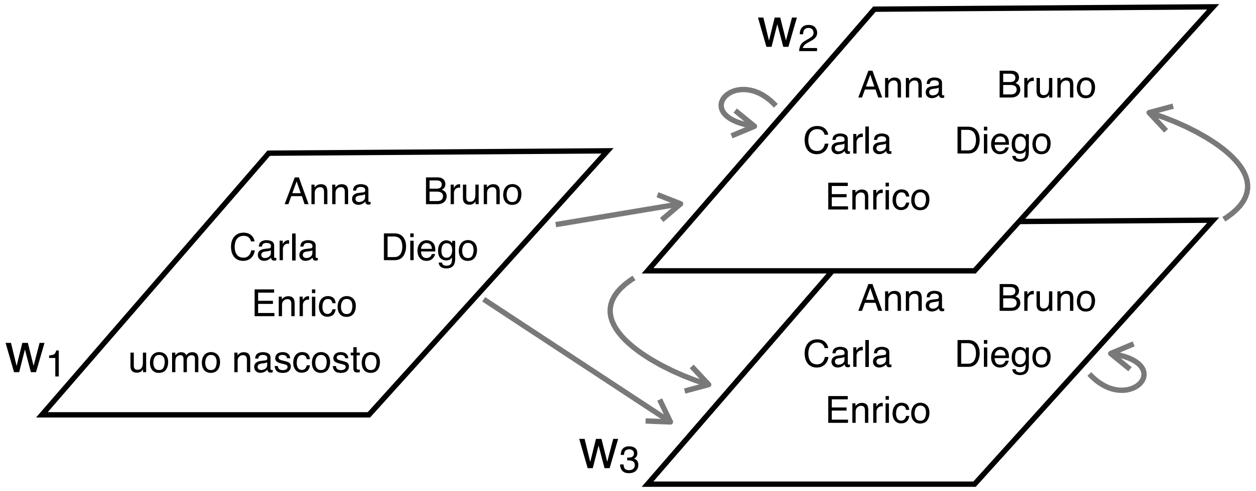
- Un predicato P/n si dice **rigido** (nel modello <**W**,D,*R*,*v*>) quando la sua interpretazione *non varia* da mondo a mondo

- Un predicato P/n si dice **flessibile** (nel modello <**W**,D,*R*,*v*>) quando la sua interpretazione *varia* da mondo a mondo

Predicati: rigidi o flessibili?

- La funzione di interpretazione v associa a ciascun predicato P/n del linguaggio e *in ciascun mondo* di **W** una relazione n-aria su D(M): $v(P/n,w) \subseteq (D(M))^n$
    - può succedere che l'interpretazione di un predicato sia la stessa *in tutti i mondi*
- Un predicato P/n si dice **rigido** (nel modello <**W**,D,*R*,*v*>) quando la sua interpretazione *non varia* da mondo a mondo
    - *Esempio: l'ispettore, in ogni mondo, ha visto nella stanza Anna, Bruno, Carla, Diego, Enrico e nessun altro* *(V/1 è un predicato rigido)*
- Un predicato P/n si dice **flessibile** (nel modello <**W**,D,*R*,*v*>) quando la sua interpretazione *varia* da mondo a mondo
    - *Esempio: in alcuni mondi c'è un uomo nascosto nell'ombra, in altri no*

      (E/1 è un predicato flessibile)



$v(V,w_1) = v(V,w_2) = v(V,w_3) =$ {Anna,Bruno,Carla,Diego,Enrico}

$v(E,w_1) =$ {Anna,Bruno,Carla,Diego,Enrico, uomo nascosto}

$v(E,w_2) = v(E,w_3) =$ {Anna,Bruno,Carla,Diego,Enrico}

Costanti: rigide o flessibili?

- *Quali costanti utilizza l'ispettore?*
  - a ⟶ designa sempre *Anna*
  - b ⟶ designa sempre *Bruno*
  - c ⟶ designa sempre *Carla*
  - d ⟶ designa sempre *Diego*
  - e ⟶ designa sempre *Enrico*

  } *(la loro interpretazione è la stessa in tutti i mondi)*

  - assassino ⟶ designa la persona che ha compiuto il delitto, che è diversa nei vari mondi

  (la sua interpretazione varia da mondo a mondo)

- Una costante c si dice **rigida** nel modello <**W**,D,*R*,*v*> quando la sua interpretazione *non varia* da mondo a mondo
  - a, b, c, d, e *sono costanti rigide*

- Una costante si dice **flessibile** nel modello <**W**,D,*R*,*v*> quando la sua interpretazione *varia* da mondo a mondo
  - assassino *è una costante flessibile*

Una nuova regola

- L'interpretazione di una costante u in un mondo w è un oggetto di D(M), *non necessariamente* di D(w) *(l'oggetto v(u,w) può non esistere in w)*

- In generale, *non* si può usare la regola

$$\frac{\Box\forall\varphi(x)}{\Box\varphi(x:u)}$$

u costante qualsiasi

- Esempio:

per tutti i w di **W** *v*(E,w)=D(w)

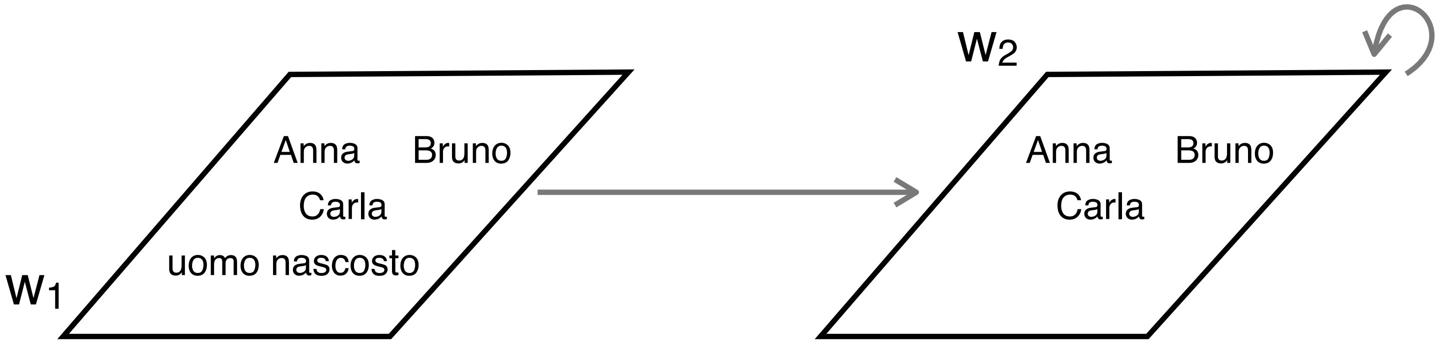
$w_1 \models E(a)$

$w_1 \models E(b)$

$w_1 \models E(c)$

$w_1 \models E(u)$

$w_1 \models \forall x E(x)$



$w_2 \models E(a)$

$w_2 \models E(b)$

$w_2 \models E(c)$

$w_2 \models \forall x E(x)$

$\Box\forall x E(x)$ è valida nel modello, ma $\Box E(u)$ no

↓

la regola *non* è corretta

Una nuova regola

- L'interpretazione di una costante u in un mondo w è un oggetto di D(M), *non necessariamente* di D(w) *(l'oggetto v(u,w) può non esistere in w)*
- In generale, *non* si può usare la regola

$$\frac{\Box\forall\varphi(x)}{\Box\varphi(x:u)}$$

u costante qualsiasi

- Esempio:

per tutti i w di **W** *v*(E,w)=D(w)

$w_1 \models E(a)$

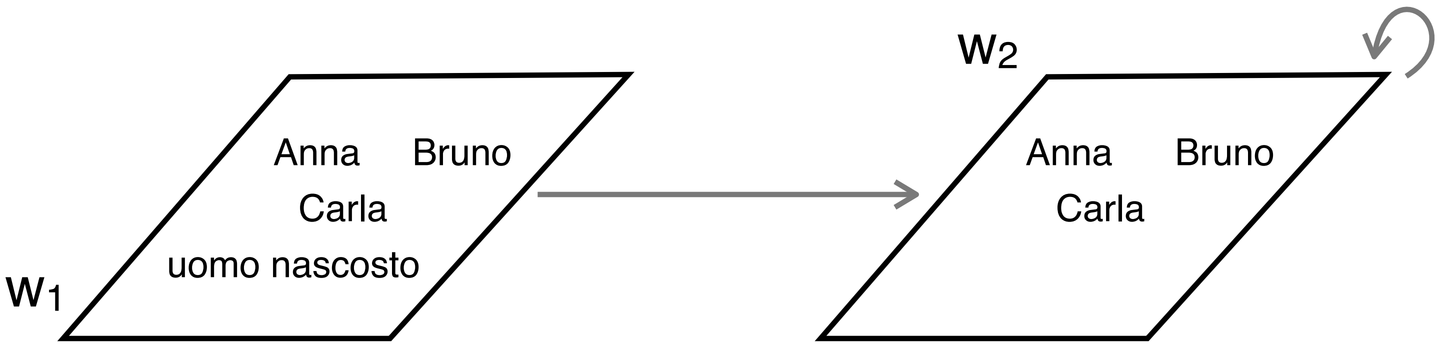
$w_1 \models E(b)$

$w_1 \models E(c)$

$w_1 \models E(u)$

$w_1 \models \forall x E(x)$

$w_1 \models \Box\forall x E(x)$



$w_2 \models E(a)$

$w_2 \models E(b)$

$w_2 \models E(c)$

$w_2 \models \forall x E(x)$

$w_2 \models \Box\forall x E(x)$

$\Box\forall x E(x)$ è valida nel modello, ma $\Box E(u)$ no

↓

la regola *non* è corretta

Una nuova regola

- L'interpretazione di una costante u in un mondo w è un oggetto di D(M), *non necessariamente* di D(w) *(l'oggetto v(u,w) può non esistere in w)*
- In generale, *non* si può usare la regola

$$\frac{\Box\forall x\varphi(x)}{\Box\varphi(x:u)}$$

u costante qualsiasi

- Esempio:

per tutti i w di **W** *v*(E,w)=D(w)

$w_1 \models E(a)$

$w_1 \models E(b)$

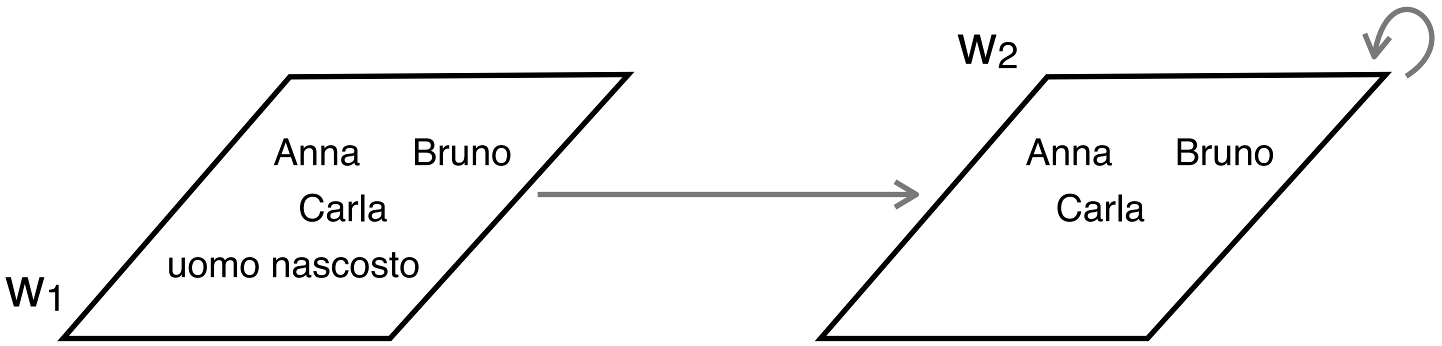
$w_1 \models E(c)$

$w_1 \models E(u)$

$w_1 \models \forall x E(x)$

$w_1 \models \Box\forall x E(x)$

$w_1 \not\models \Box E(u)$



$w_2 \models E(a)$

$w_2 \models E(b)$

$w_2 \models E(c)$

$w_2 \models \forall x E(x)$

$w_2 \models \Box\forall x E(x)$

$w_2 \not\models E(u)$

$w_2 \not\models \Box E(u)$

$\Box\forall x E(x)$ è valida nel modello, ma $\Box E(u)$ no

↓

la regola *non* è corretta

Una nuova regola

- L'interpretazione di una costante u in un mondo w è un oggetto di D(M), *non necessariamente* di D(w)   *(l'oggetto v(u,w) può non esistere in w)*

- In generale, *non* si può usare la regola

$$\frac{\Box\forall x\varphi(x)}{\Box\varphi(x:u)}$$

u costante qualsiasi

- Si può usare la regola $\frac{\Box\forall x\varphi(x)}{\Box\varphi(x:u)}$ solo quando u *è una costante che designa un oggetto che esiste in tutti i mondi*

- *Nell'esempio:* l'ispettore può usare la regola

$$\frac{\Box\forall x\varphi(x) \qquad E(u)}{\Box\varphi(x:u)}$$

garantisce l'esistenza in tutti i mondi dell'oggetto designato da u

quando u *è* una costante qualsiasi

Semantic Tableau modali del primo ordine

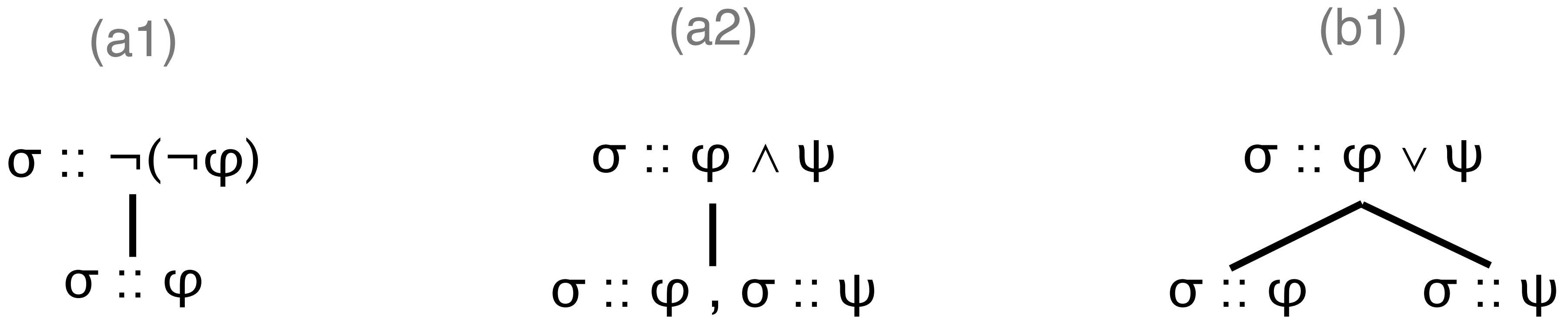
- **Formule con *label***
  - tutte le fbf φ che compaiono nel tableau modale hanno una label (*<u>Esempio</u>:* σ::φ)
  - la *label* σ:: è formata da una sequenza di numeri separati da un punto (*<u>Esempio</u>:* 1.1.2 :: □A(x))
  - con la notazione σ.n si intende una *label* formata a partire da σ aggiungendo un numero
  - per convenzione, tutte le *label* di un tableau hanno come primo numero 1

- **Parametri**
  - ad ogni label σ:: è associato un insieme (infinito) di *variabili libere speciali*, chiamate **parametri**, che *<u>non possono mai essere quantificate</u>*
  - ogni parametro è associato ad *una sola label*
  - i parametri associati alla label σ:: si indicano con una lettera seguita dal pedice σ (*<u>Esempio</u>:* p_σ)

- *<u>Informalmente</u>*:
  - ogni *label* indica un *mondo possibile*
  - ogni *parametro* indica un *oggetto* nel dominio del mondo indicato dalla label associata

Semantic Tableau modali del primo ordine

- **Regole alfa** *(espansione)* **e beta** *(biforcazione)*
  - *si assume che le fbf vengano tradotte in modo opportuno in modo da poter usare solo regole per ¬, ∧ e ∨*



(a1)

$\sigma :: \neg(\neg\varphi)$

$\sigma :: \varphi$

(a2)

$\sigma :: \varphi \wedge \psi$

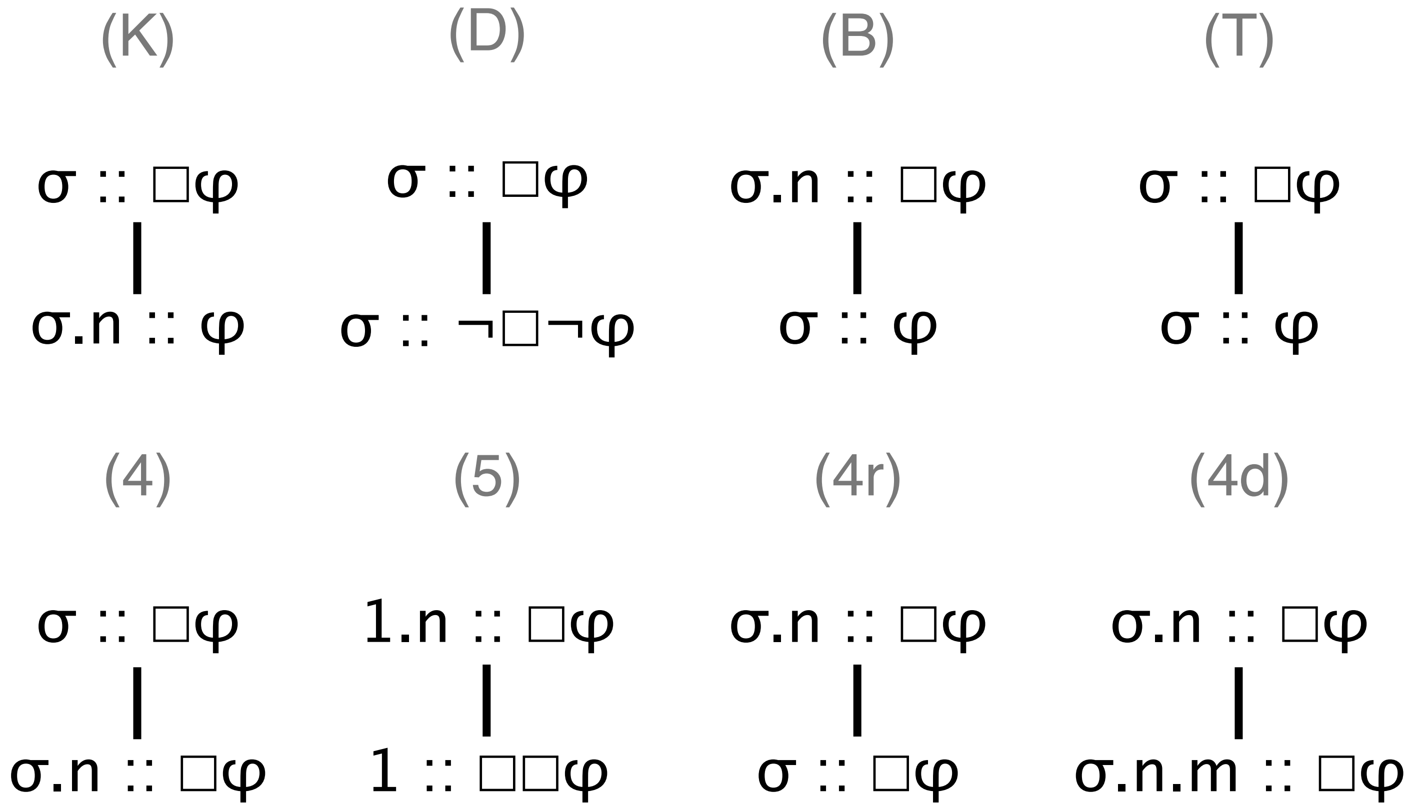
$\sigma :: \varphi\ ,\ \sigma :: \psi$

(b1)

$\sigma :: \varphi \vee \psi$

$\sigma :: \varphi \qquad \sigma :: \psi$

- **Regole ν** *(espansione)*
  - *non* creano nuove label (σ.n deve già esistere nel ramo)



(K)

$\sigma :: \Box\varphi$

$\sigma.n :: \varphi$

(D)

$\sigma :: \Box\varphi$

$\sigma :: \neg\Box\neg\varphi$

(B)

$\sigma.n :: \Box\varphi$

$\sigma :: \varphi$

(T)

$\sigma :: \Box\varphi$

$\sigma :: \varphi$

(4)

$\sigma :: \Box\varphi$

$\sigma.n :: \Box\varphi$

(5)

$1.n :: \Box\varphi$

$1 :: \Box\Box\varphi$

(4r)

$\sigma.n :: \Box\varphi$

$\sigma :: \Box\varphi$

(4d)

$\sigma.n :: \Box\varphi$

$\sigma.n.m :: \Box\varphi$

Semantic Tableau modali del primo ordine

- **Regole** π *(espansione)*
  - *crea* nuove label (σ.n deve essere *nuova* nel ramo)

(π)

$$\begin{array}{c} \sigma :: \neg\Box\varphi \\ | \\ \sigma.n :: \neg\varphi \end{array}$$

- **Regola universale**
  - p_σ è un *qualsiasi* parametro associato alla label σ

(u)

$$\begin{array}{c} \sigma :: \forall x\ \varphi(x) \\ | \\ \sigma :: \varphi(p_\sigma) \end{array}$$

- **Regola esistenziale**
  - p_σ è un parametro associato alla label σ e deve essere *nuovo* nel ramo

(e)

$$\begin{array}{c} \sigma :: \exists x\ \varphi(x) \\ | \\ \sigma :: \varphi(p_\sigma) \end{array}$$

Semantic Tableau modali del primo ordine

- *Esempio* per dimostrare, in una logica KD45 del primo ordine, la validità delle formule del tipo $(\Box\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to ((\Box\forall x(\psi(x) \to \chi(x)) \to (\Box\forall x(\varphi(x) \to \chi(x)))$

(con φ, ψ e χ fbf qualsiasi)

$$1 :: \neg((\Box\forall x(\varphi(x) \to \psi(x))_{\to}\neg((\Box\forall x(\psi(x) \to \chi(x)) \to (\Box\forall x(\varphi(x) \to \chi(x))))$$

$$1 :: (\Box\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \wedge ((\Box\forall x(\psi(x) \to \chi(x)) \to (\Box\forall x(\varphi(x) \to \chi(x)))$$

$$1 :: \Box\forall x(\varphi(x) \to \psi(x))$$

$$1 :: \neg((\Box\forall x(\psi(x) \to \chi(x)) \to (\Box\forall x(\varphi(x) \to \chi(x)))$$

$$1 :: \Box\forall x(\psi(x) \to \chi(x)) \wedge \neg(\Box\forall x(\varphi(x) \to \chi(x)))$$

$$1 :: \Box\forall x(\psi(x) \to \chi(x))$$

$$1 :: \neg(\Box\forall x(\varphi(x) \to \chi(x)))$$

$$1.1 :: \neg\forall x(\varphi(x) \to \chi(x))$$

$$1.1 :: \exists x\neg(\varphi(x) \to \chi(x))$$

$$1.1 :: \neg(\varphi(p_{1.1}) \to \chi(p_{1.1}))$$

$$1.1 :: \varphi(p_{1.1}) \wedge \neg\chi(p_{1.1})$$

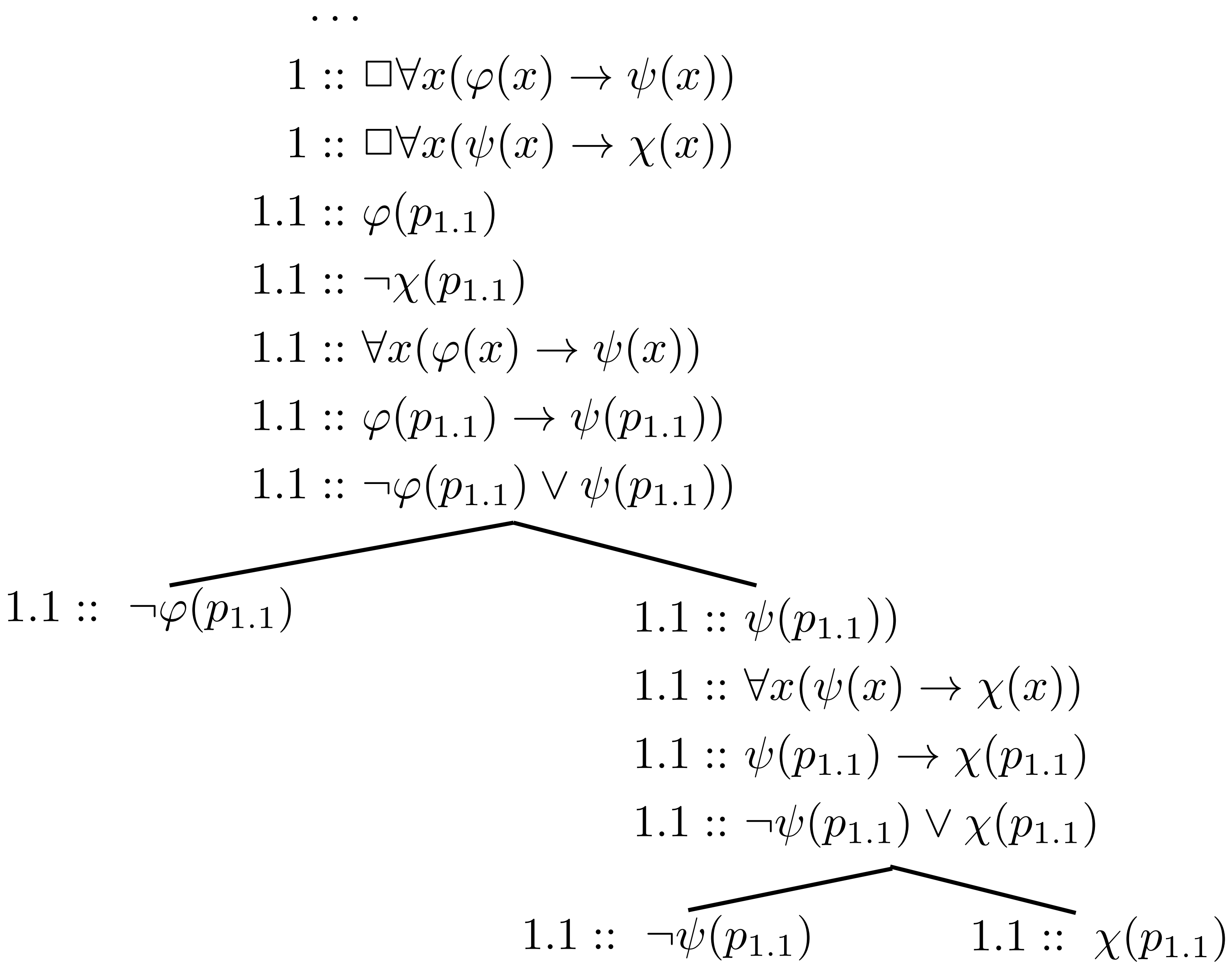
$$1.1 :: \varphi(p_{1.1})$$

$$1.1 :: \neg\chi(p_{1.1})$$

Semantic Tableau modali del primo ordine

- *Esempio* per dimostrare, in una logica KD45 del primo ordine, la validità delle formule del tipo $(\Box\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow ((\Box\forall x(\psi(x) \rightarrow \chi(x)) \rightarrow (\Box\forall x(\varphi(x) \rightarrow \chi(x)))$

(con φ, ψ e χ fbf qualsiasi)



$\ldots$

$1 :: \Box\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$

$1 :: \Box\forall x(\psi(x) \rightarrow \chi(x))$

$1.1 :: \varphi(p_{1.1})$

$1.1 :: \neg\chi(p_{1.1})$

$1.1 :: \forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$

$1.1 :: \varphi(p_{1.1}) \rightarrow \psi(p_{1.1}))$

$1.1 :: \neg\varphi(p_{1.1}) \vee \psi(p_{1.1}))$

$1.1 :: \neg\varphi(p_{1.1})$

$1.1 :: \psi(p_{1.1}))$

$1.1 :: \forall x(\psi(x) \rightarrow \chi(x))$

$1.1 :: \psi(p_{1.1}) \rightarrow \chi(p_{1.1})$

$1.1 :: \neg\psi(p_{1.1}) \vee \chi(p_{1.1})$

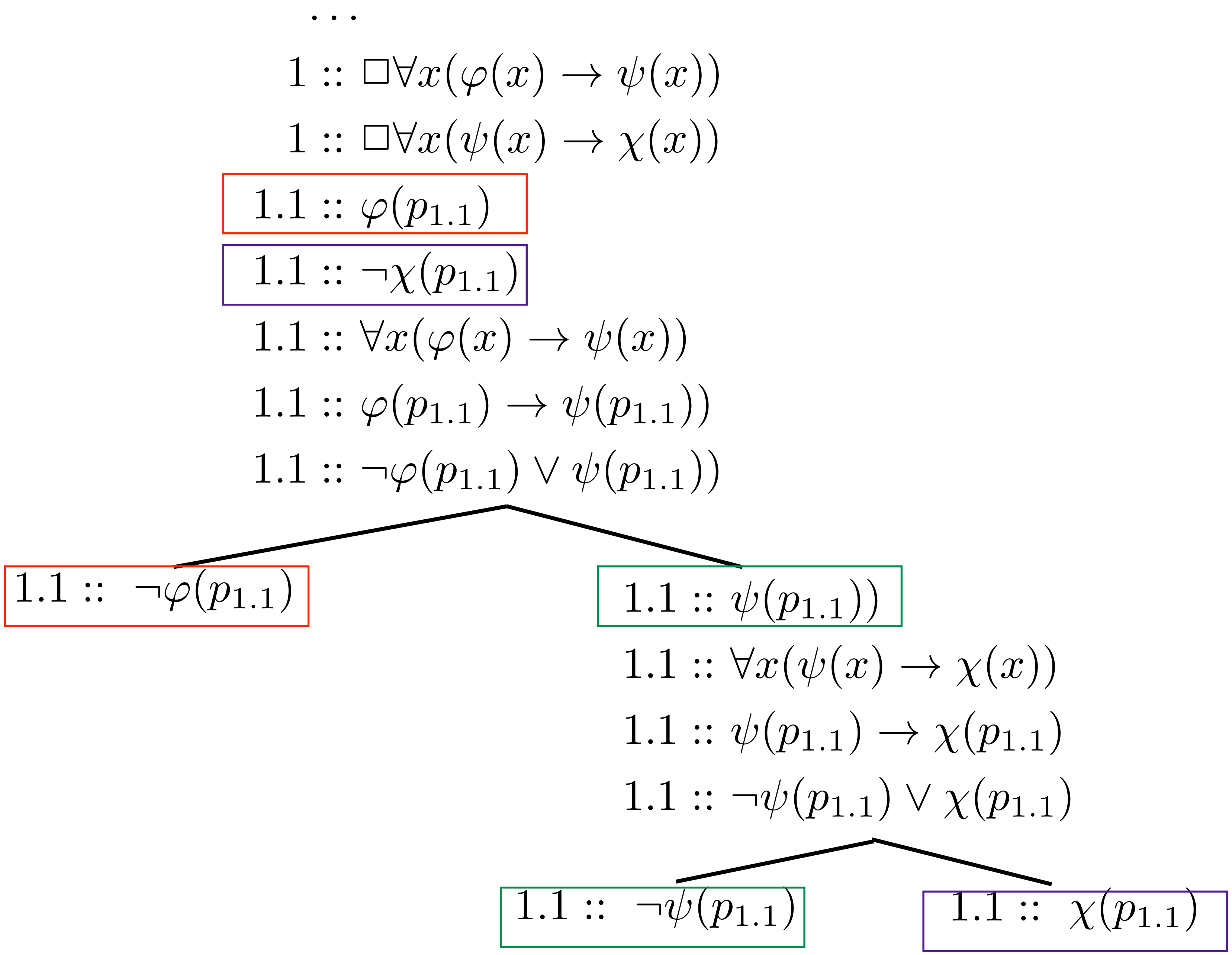
$1.1 :: \neg\psi(p_{1.1})$

$1.1 :: \chi(p_{1.1})$

Semantic Tableau modali del primo ordine

- *Esempio* per dimostrare, in una logica KD45 del primo ordine, la validitá delle formule del tipo $(\Box\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow ((\Box\forall x(\psi(x) \rightarrow \chi(x)) \rightarrow (\Box\forall x(\varphi(x) \rightarrow \chi(x)))$

(con φ, ψ e χ fbf qualsiasi)



$\dots$

$1 :: \Box\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$

$1 :: \Box\forall x(\psi(x) \rightarrow \chi(x))$

$1.1 :: \varphi(p_{1.1})$

$1.1 :: \neg\chi(p_{1.1})$

$1.1 :: \forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$

$1.1 :: \varphi(p_{1.1}) \rightarrow \psi(p_{1.1}))$

$1.1 :: \neg\varphi(p_{1.1}) \vee \psi(p_{1.1}))$

$1.1 :: \neg\varphi(p_{1.1})$

$1.1 :: \psi(p_{1.1}))$

$1.1 :: \forall x(\psi(x) \rightarrow \chi(x))$

$1.1 :: \psi(p_{1.1}) \rightarrow \chi(p_{1.1})$

$1.1 :: \neg\psi(p_{1.1}) \vee \chi(p_{1.1})$

$1.1 :: \neg\psi(p_{1.1})$

$1.1 :: \chi(p_{1.1})$

Di cosa si convince l'ispettore?

- Oltre alle formule iniziali, l'ispettore decide di utilizzare le Formule di Barcan (ma non le Formule di Barcan Inverse)

- Inoltre può usare le formule del tipo

$$(\Box\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to ((\Box\forall x(\psi(x) \to \chi(x)) \to (\Box\forall x(\varphi(x) \to \chi(x)))$$

- E decide le sue regole di inferenza:

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi \\ \varphi \to \psi\end{array}}{\psi}\ \mathrm{MP} \qquad \frac{\varphi}{\Box\varphi}\ \mathrm{Nec} \qquad \frac{\Box\forall\varphi(x) \qquad E(u)}{\Box\varphi(x:u)}\ \mathrm{S}$$

Di cosa si convince l'ispettore?

- Crede che l'assassino non sia Bruno:

$$\forall x \Box((assassino = x) \to L(x, d))$$

$\downarrow$ *istanzia* $(\forall x(\Box\varphi)) \to (\Box(\forall x \varphi))$ *e inferisce per MP*

$$\Box \forall x((assassino = x) \to L(x, d))$$

$\downarrow$

$$\Box \forall x(\neg L(x, d) \to \neg(assassino = x))$$

$\downarrow$ *inferisce tramite S grazie a E(b)*

$$\Box(\neg L(b, d) \to \neg(assassino = b))$$

$\downarrow$ *istanzia* $\mathrm{K}\colon \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$ *e inferisce per MP*

$$\Box\neg L(b, d) \to \Box\neg(assassino = b)$$

$\downarrow$ *inferisce tramite MP grazie a* $\Box\neg L(b, d)$

$$\Box\neg(assassino = b)$$

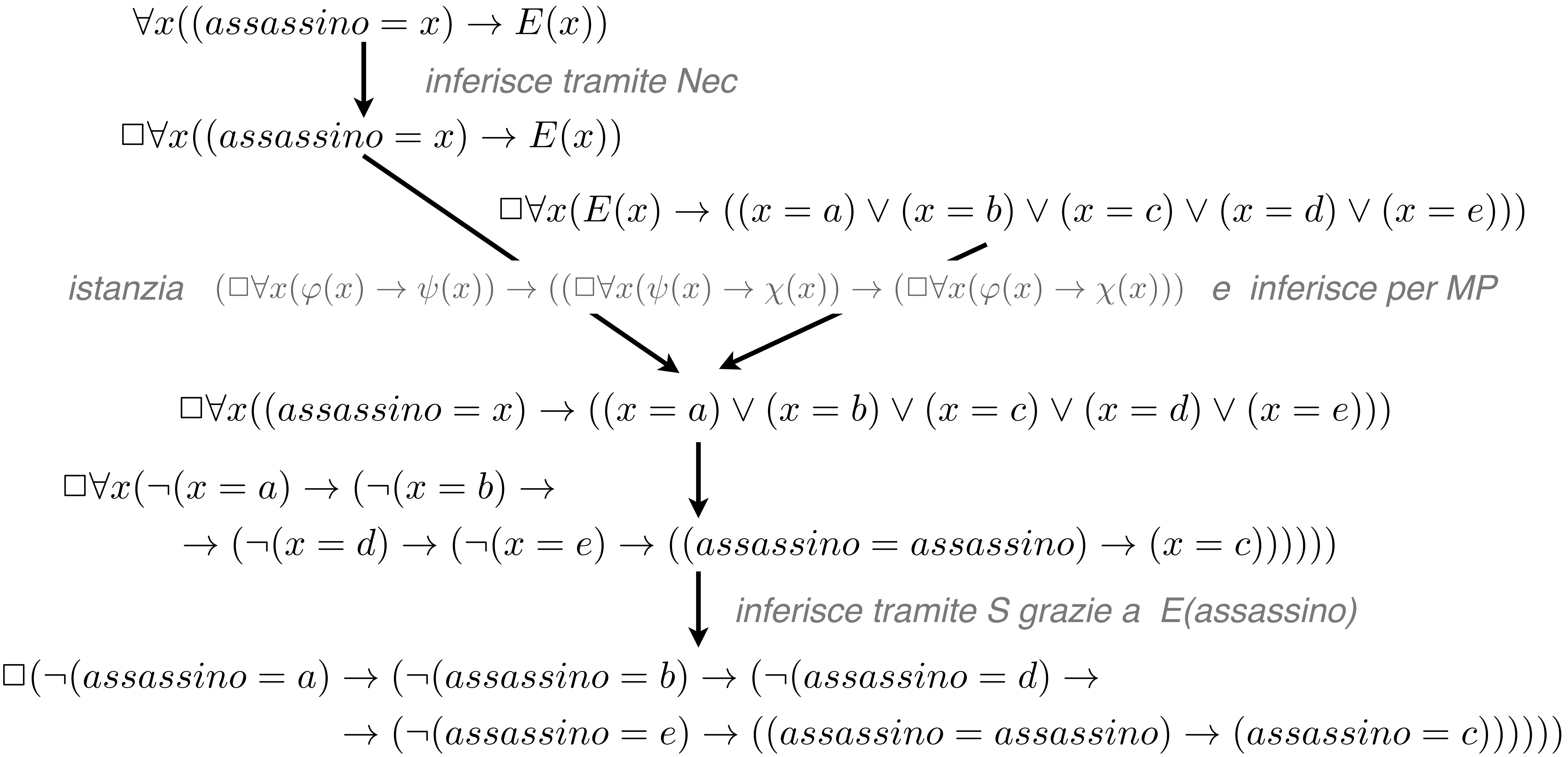
Di cosa si convince l'ispettore?

- Crede che l'assassino non sia Anna:

$$\begin{tikzcd}
\forall x((assassino = x) \to A(x)) \arrow[d, "\textit{inferisce tramite Nec}"] & & \\
\Box\forall x((assassino = x) \to A(x)) \arrow[d] & & \\
\Box\forall x(\neg A(x) \to \neg(assassino = x)) \arrow[d, "\textit{inferisce tramite S grazie a E(a)}"] & & \\
\Box(\neg A(a) \to \neg(assassino = a)) \arrow[d, "\textit{istanzia } \mathrm{K}\text{: } \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi) \textit{ e inferisce per MP}"] & & \\
\Box\neg A(a) \to \Box\neg(assassino = a) \arrow[d, "\textit{inferisce tramite MP}"] & & \neg A(x) \arrow[d, "\textit{inferisce tramite Nec}"] \\
\Box\neg(assassino = a) & \textit{grazie a} & \Box\neg A(x)
\end{tikzcd}$$

Di cosa si convince l'ispettore?

- Crede che l'assassino sia Carla:



$$\forall x((assassino = x) \rightarrow E(x))$$

inferisce tramite Nec

$$\Box\forall x((assassino = x) \rightarrow E(x))$$

$$\Box\forall x(E(x) \rightarrow ((x = a) \vee (x = b) \vee (x = c) \vee (x = d) \vee (x = e)))$$

istanzia $(\Box\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow ((\Box\forall x(\psi(x) \rightarrow \chi(x)) \rightarrow (\Box\forall x(\varphi(x) \rightarrow \chi(x)))$ *e inferisce per MP*

$$\Box\forall x((assassino = x) \rightarrow ((x = a) \vee (x = b) \vee (x = c) \vee (x = d) \vee (x = e)))$$

$$\Box\forall x(\neg(x = a) \rightarrow (\neg(x = b) \rightarrow$$
$$\rightarrow (\neg(x = d) \rightarrow (\neg(x = e) \rightarrow ((assassino = assassino) \rightarrow (x = c))))))$$

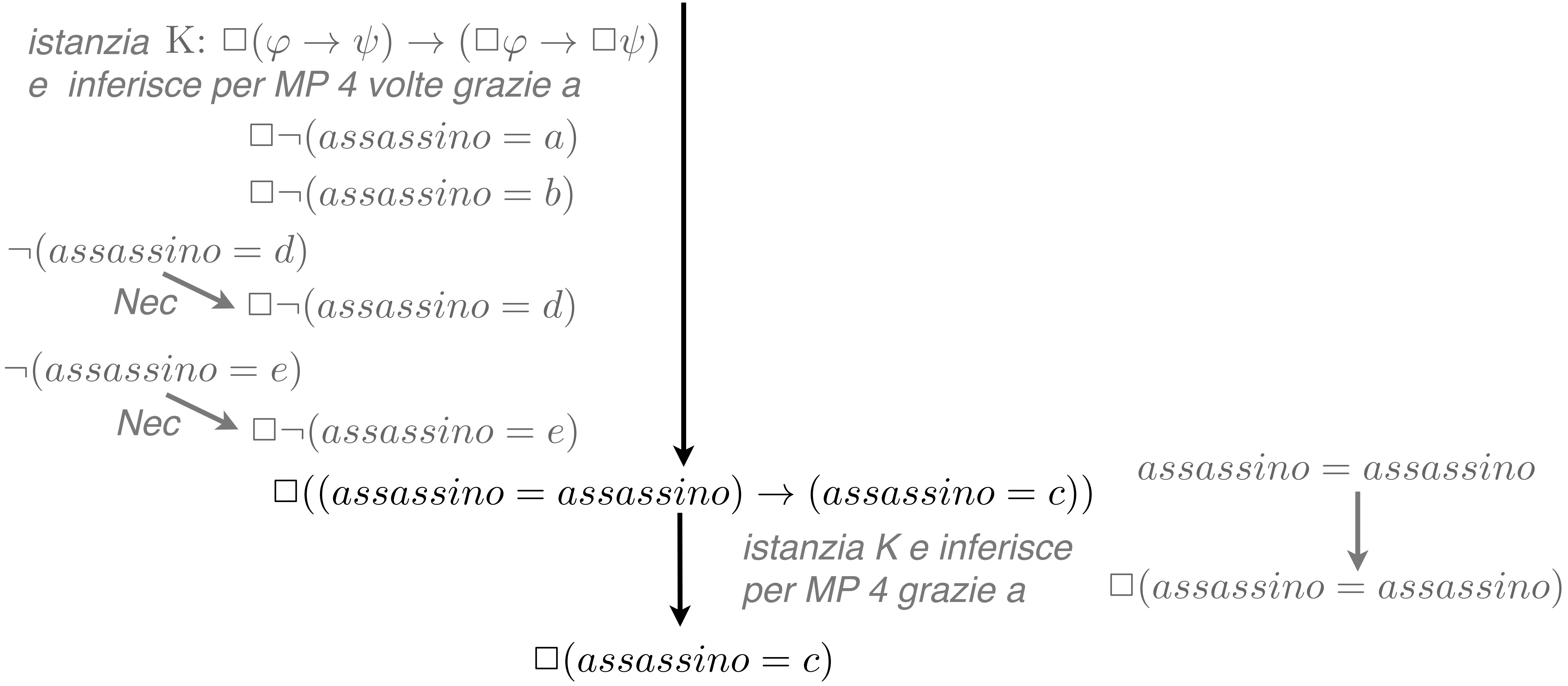
inferisce tramite S grazie a E(assassino)

$$\Box(\neg(assassino = a) \rightarrow (\neg(assassino = b) \rightarrow (\neg(assassino = d) \rightarrow$$
$$\rightarrow (\neg(assassino = e) \rightarrow ((assassino = assassino) \rightarrow (assassino = c))))))$$

Di cosa si convince l'ispettore?

- Crede che l'assassino sia Carla: *(ora deve solo trovarne prove fattuali...)*

$$\Box(\neg(assassino = a) \rightarrow (\neg(assassino = b) \rightarrow (\neg(assassino = d) \rightarrow$$
$$\rightarrow (\neg(assassino = e) \rightarrow ((assassino = assassino) \rightarrow (assassino = c))))))$$



istanzia K: $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$
e inferisce per MP 4 volte grazie a

$$\Box\neg(assassino = a)$$

$$\Box\neg(assassino = b)$$

$$\neg(assassino = d) \xrightarrow{Nec} \Box\neg(assassino = d)$$

$$\neg(assassino = e) \xrightarrow{Nec} \Box\neg(assassino = e)$$

$$\Box((assassino = assassino) \rightarrow (assassino = c))$$

istanzia K e inferisce per MP 4 grazie a

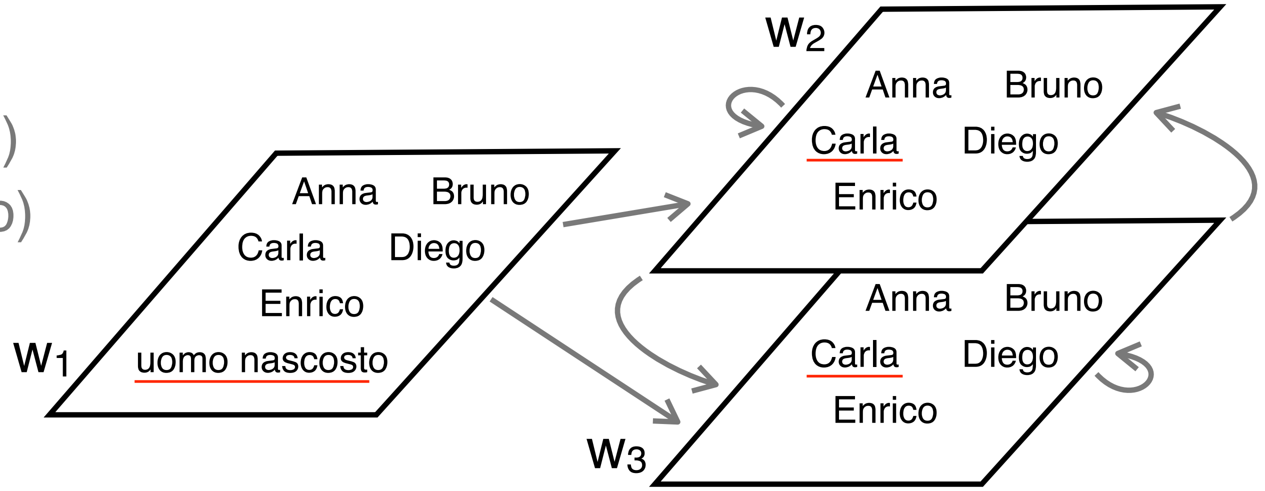
$$assassino = assassino \rightarrow \Box(assassino = assassino)$$

$$\Box(assassino = c)$$

L'assassino è una donna?

- L'ispettore è convinto che l'assassino sia *Carla* e *Carla* è una donna ($D(c)$)
  L'ispettore è convinto che l'assassino sia una donna: $\Box D(assassino)$
  - ma se l'ispettore vivesse in un mondo in cui l'assassino è l'uomo nascosto nell'ombra, cosa crederebbe?
  - *"in tutti i mondi accessibili l'assassino è una donna"* *(di quale assassino si sta parlando?)*

$w_1 \not\models D(assassino)$
$w_1 \models \Box D(assassino)$



$w_2 \models D(assassino)$
$w_3 \models D(assassino)$

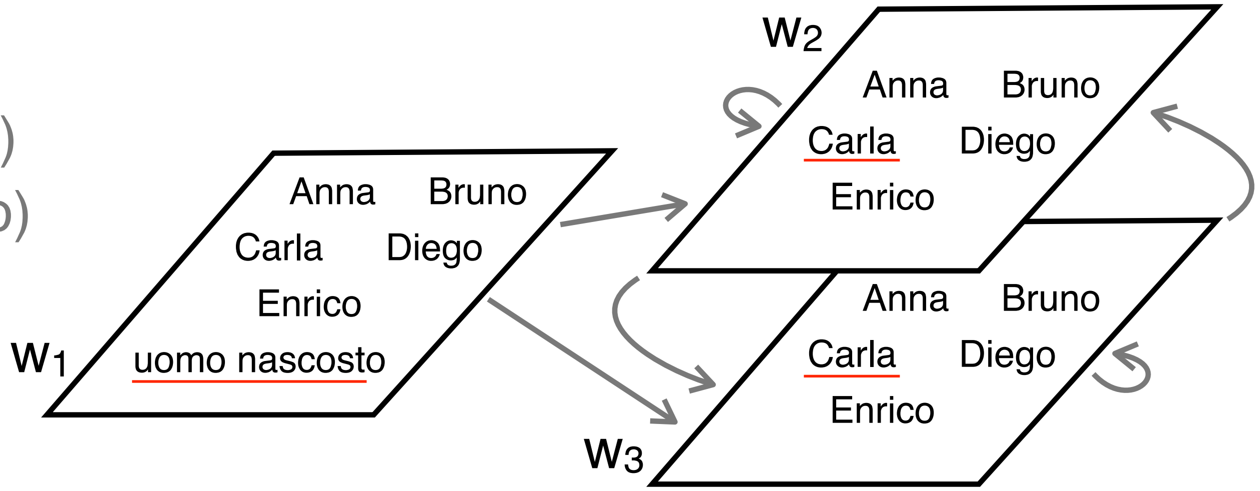
- D/1 è un predicato rigido e in tutti i mondi v(D)={*Anna*,*Carla*}
- assassino è una costante flessibile: *v*(assassino,w_1)={*uomo nascosto*}
  v(assassino,w_2)={*Carla*}
  v(assassino,w_3)={*Carla*}
- w $\models \Box$D(assassino) $\Longleftrightarrow$ $\forall$w' con wRw', w' $\models$ D(assassino) $\Longleftrightarrow$ $\forall$w' con wRw', *v*(assassino,w')$\in$ *v*(D,w')

  (la costante assassino viene interpretata dopo essere passati al mondo accessibile w')

L'assassino è una donna?

- L'ispettore è convinto che l'assassino sia *Carla* e *Carla* è una donna ($D(c)$)
  L'ispettore è convinto che l'assassino sia una donna: $\Box D(assassino)$
  - ma se l'ispettore vivesse in un mondo in cui l'assassino è l'uomo nascosto nell'ombra, cosa crederebbe?
  - *"in tutti i mondi accessibili l'assassino è una donna"* (di quale assassino si sta parlando?)

$w_1 \not\models D(assassino)$
$w_1 \models \Box D(assassino)$



$w_2 \models D(assassino)$
$w_3 \models D(assassino)$

  - *come si può esprimere il fatto che, nel mondo w_1, l'ispettore non crede che l'assassino del suo mondo (cioè di w_1) sia una donna?*

Predicate Abstraction

- È necessario modificare il linguaggio
  - $< \lambda x.\Box D(x) > (assassino)$ l'assassino *del mondo attuale* è una donna in tutti i mondi possibili (astrazione **de re**)
  - $\Box < \lambda x.D(x) > (assassino)$ in tutti i mondi accessibili l'assassino (*di quei mondi*) è una donna (astrazione **de dicto**)
- **Atomi**
  - se *P* è un *simbolo predicativo* a n argomenti e $x_1,...,x_n$ sono <u>*variabili*</u>, allora $P(x_1,...,x_n)$ è un **atomo** o **formula atomica**
  - *non si possono più usare termini qualsiasi, ma solo le variabili*
- **Predicati astratti**
  - se **φ** è una fbf e x è una variabile, allora <λx.**φ**> è un **predicato astratto**
  - *le variabili libere di* <λx.**φ**> *sono le stesse di* **φ***, eccetto che per le occorrenze di x*
- **fbf**
  - si costruiscono come al solito, ma a partire solo dai nuovi atomi appena definiti
  - se <λx.**φ**> è un predicato astratto e t è un termine, allora <λx.**φ**>(t) è una fbf

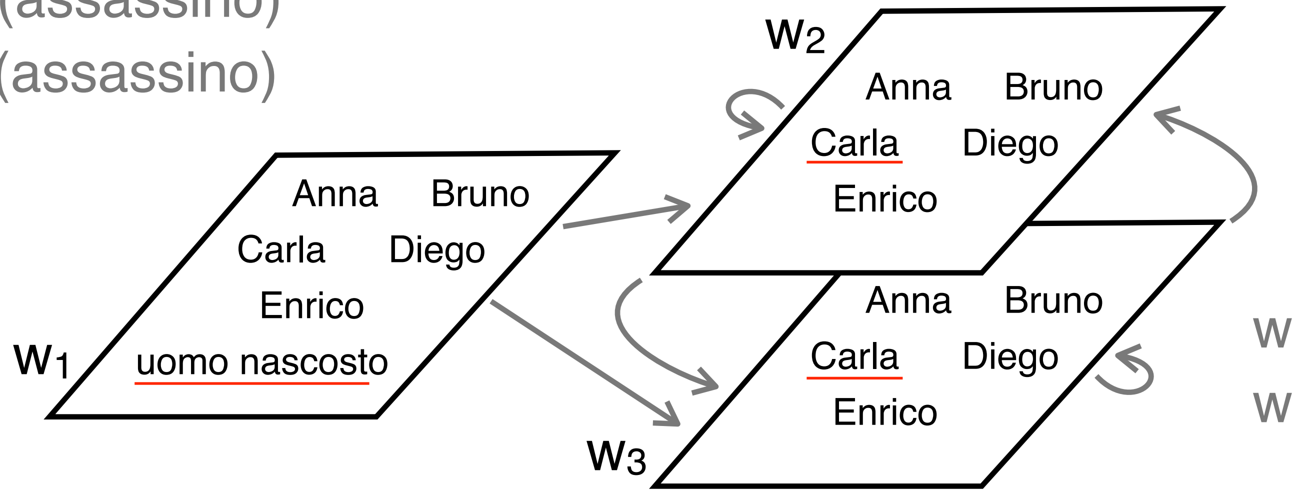
Predicate Abstraction

- Una regola di soddisfacimento aggiuntiva:
  - dati un modello (dominio variabile) $\langle \mathbf{W},D,R,v\rangle$, una assegnazione s, un mondo $w \in \mathbf{W}$ e una fbf φ

$$\langle \mathbf{W},D,R,v\rangle\,[s],w \models \langle \lambda x.\varphi \rangle(t) \quad \text{sse} \quad \langle \mathbf{W},D,R,v\rangle\,[s](x{:}v(t,w)),w \models \varphi$$

$w_1 \not\models \langle \lambda x.\, \Box D(x)\rangle(\text{assassino})$

$w_1 \models \Box \langle \lambda x.\, D(x)\rangle(\text{assassino})$



$w_2 \models \langle \lambda x.\, \Box D(x)\rangle(\text{assassino})$

$w_2 \models \Box \langle \lambda x.\, D(x)\rangle(\text{assassino})$

$w_3 \models \langle \lambda x.\, \Box D(x)\rangle(\text{assassino})$

$w_3 \models \Box \langle \lambda x.\, D(x)\rangle(\text{assassino})$

- $\langle \mathbf{W},D,R,v\rangle\,[s],w \models \langle \lambda x.\, \Box D(x)\rangle(\text{assassino}) \iff \langle \mathbf{W},D,R,v\rangle\,[s](x{:}v(\text{assassino},w)),w \models \Box D(x)$

$\iff \forall w'$ con wRw' $\langle \mathbf{W},D,R,v\rangle\,[s](x{:}v(\text{assassino},w)),w' \models D(x)$

$\iff \forall w'$ con wRw', $v(\text{assassino},w) \in v(D,w')$

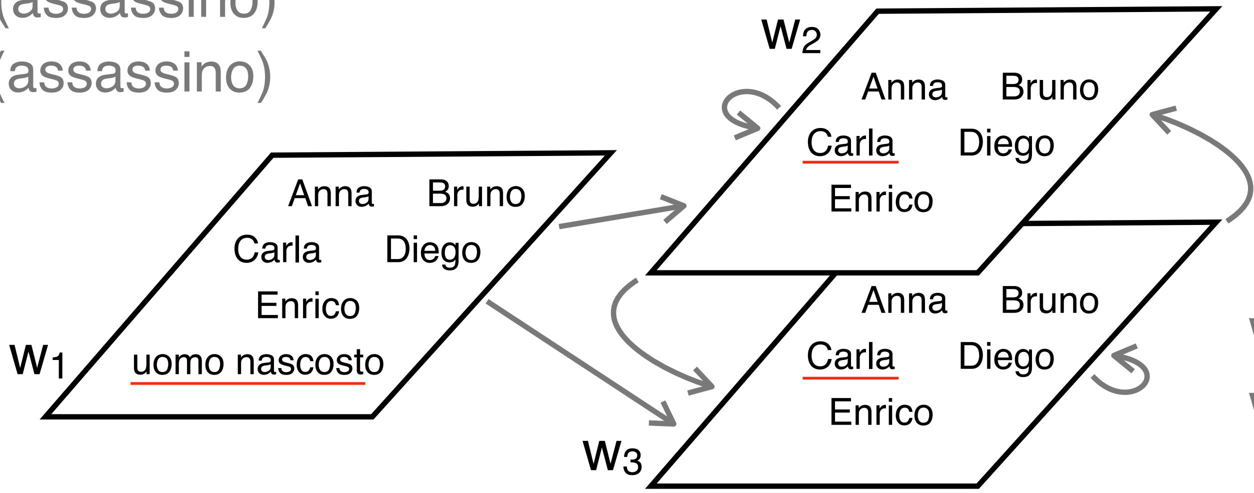
Predicate Abstraction

- Una regola di soddisfacimento aggiuntiva:
  - dati un modello (dominio variabile) $\langle \mathbf{W},D,R,v\rangle$, una assegnazione s, un mondo $w \in \mathbf{W}$ e una fbf φ

$$\langle \mathbf{W},D,R,v\rangle\ [s],w \models \langle \lambda x.\varphi \rangle (t) \quad \text{sse} \quad \langle \mathbf{W},D,R,v\rangle\ [s](x{:}v(t,w)),w \models \varphi$$

$w_1 \not\models \langle \lambda x.\ \Box D(x)\rangle(\text{assassino})$

$w_1 \models \Box \langle \lambda x.\ D(x)\rangle(\text{assassino})$



$w_2 \models \langle \lambda x.\ \Box D(x)\rangle(\text{assassino})$

$w_2 \models \Box \langle \lambda x.\ D(x)\rangle(\text{assassino})$

$w_3 \models \langle \lambda x.\ \Box D(x)\rangle(\text{assassino})$

$w_3 \models \Box \langle \lambda x.\ D(x)\rangle(\text{assassino})$

- $\langle \mathbf{W},D,R,v\rangle\ [s],w \models \Box \langle \lambda x.D(x)\rangle(\text{assassino})$

$\Longleftrightarrow \quad \forall w'$ con wRw' $\langle \mathbf{W},D,R,v\rangle\ [s],w' \models \langle \lambda x.D(x)\rangle(\text{assassino})$

$\Longleftrightarrow \quad \forall w'$ con wRw' $\langle \mathbf{W},D,R,v\rangle\ [s](x{:}v(\text{assassino},w')),w' \models D(x)$

$\Longleftrightarrow \quad \forall w'$ con wRw', $v(\text{assassino},w') \in v(D,w')$

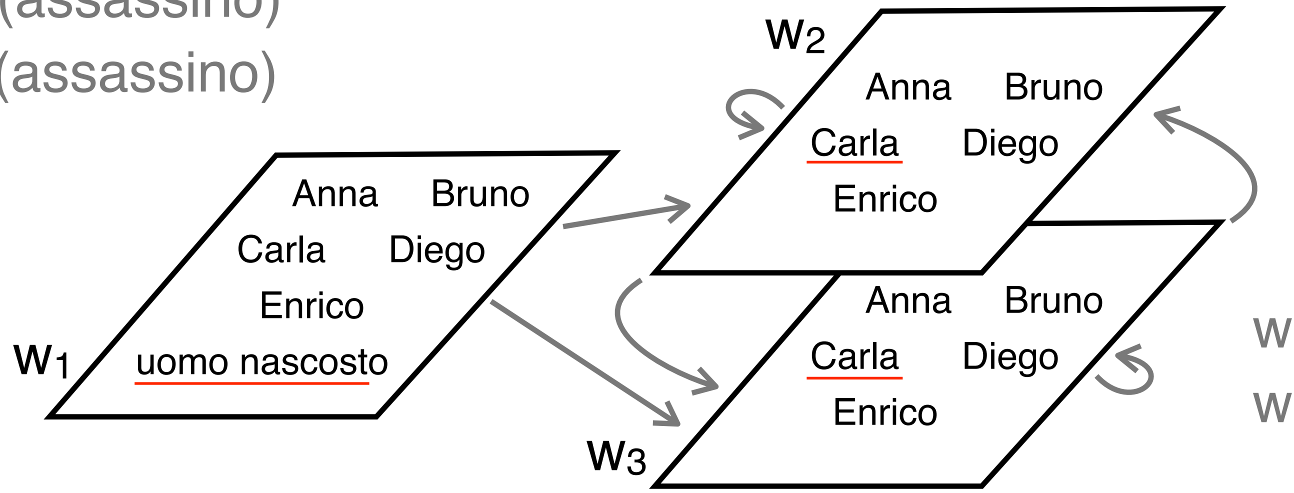
Predicate Abstraction

- Una regola di soddisfacimento aggiuntiva:
  - dati un modello (dominio variabile) $\langle \mathbf{W},D,R,v\rangle$, una assegnazione *s*, un mondo $w \in \mathbf{W}$ e una fbf φ

$$\langle \mathbf{W},D,R,v\rangle\ [s],w \models \langle \lambda x.\varphi \rangle(t) \quad \text{sse} \quad \langle \mathbf{W},D,R,v\rangle\ [s](x{:}v(t,w)),w \models \varphi$$

$w_1 \not\models \langle\lambda x.\ \Box D(x)\rangle(\text{assassino})$

$w_1 \models \Box\langle\lambda x.\ D(x)\rangle(\text{assassino})$



$w_2 \models \langle\lambda x.\ \Box D(x)\rangle(\text{assassino})$

$w_2 \models \Box\langle\lambda x.\ D(x)\rangle(\text{assassino})$

$w_3 \models \langle\lambda x.\ \Box D(x)\rangle(\text{assassino})$

$w_3 \models \Box\langle\lambda x.\ D(x)\rangle(\text{assassino})$

- se però t è una ***costante rigida***, allora

$$\Box\langle\lambda x.\boldsymbol{\varphi}\rangle(t) \iff \langle\lambda x.\Box\,\boldsymbol{\varphi}\rangle(t)$$

(le due astrazioni sono logicamente equivalenti)