Modelli minimi e programmazione logica

Marco Piastra

Clausole di Horn in L_{PO}

- Definizione quasi identica al caso proposizionale

  Forma a clausole (della skolemizzazione di un insieme di enunciati)

  In ciascuna clausola occorre al massimo un atomo in forma positiva

Fatti, regole e goal

Fatti: clausola con un singolo atomo in forma positiva

$\{Umano(socrate)\}$, $\{Pyramid(x)\}$, $\{Sorella(alba, madreDi(paolo))\}$

Regole: clausola di due o più atomi, uno in forma positiva

$\{Umano(x), \neg Filosofo(x)\}$,
$\forall x\ (Filosofo(x) \rightarrow Umano(x))$

$\{\neg Femmina(x), \neg Genitore(k(x),x), \neg Genitore(k(y),y), Sorella(x,y)\}$
$\forall x \forall y\ ((Femmina(x) \wedge \exists z\ (Genitore(z,x) \wedge Genitore(z,y))) \rightarrow Sorella(x,y))$

$\{\neg Above(x,y), On(x,k(x))\}$, $\{\neg Above(x,y), On(j(y),y)\}$
$\forall x \forall y\ (Above(x,y) \rightarrow (\exists z\ On(x,z) \wedge \exists v\ On(v,y)))$

Goal: clausola di atomi in forma negativa

$\{\neg Umano(socrate)\}$

$\{\neg Sorella(alba,x), \neg Sorella(x,paola)\}$
Negazione di $\exists x\ (Sorella(alba,x) \wedge Sorella(x,paola))$

Universo e base di Herbrand

- **Termini** e **atomi** di Herbrand

  Dato un linguaggio L_{PO}

  Un **termine** di Herbrand è un *termine base* (*ground term* = che non contiene variabili)

  Esempi:

  $f(a)$, $g(a,b)$, $g(f(a),b)$, $g(f(a),g(b,c))$, $g(f(a),g(f(b),c))$, …

  Un **atomo** di Herbrand è un *atomo base* (*ground atom* = che non contiene variabili)

  Esempi:

  $P(f(a))$, $P(g(a,b))$, $Q(g(f(a),b), g(f(a),g(b,c)))$, …

- **Universo** e **base** di Herbrand

  L'**universo** di Herbrand è l'insieme di tutti i termini di Herbrand

  Esempio:

  $\mathbf{U}_{\mathrm{H}} \equiv \{f(a), g(a,b), g(f(a),b), g(f(a),g(b,c)), g(f(a),g(f(b),c)), \ldots\}$

  La **base** di Herbrand è l'insieme di tutti gli atomi di Herbrand

  Esempio:

  $\mathrm{B}_{\mathrm{H}} \equiv \{P(f(a)), P(g(a,b)), Q(g(f(a),b), g(f(a),g(b,c))), \ldots\}$

Modelli di Herbrand

- **Struttura** di Herbrand per L_{PO}

  Una struttura $<\mathbf{U}_H, v_H>$ tale che

  $\forall c \in \text{Cost}(L_{PO}),\ v_H(c) = c$

  $\forall t \in \mathbf{U}_H,\ v_H(t) = t$

- **Interpretazione** v_H di Herbrand

  Un qualsiasi **sottoinsieme** della base di Herbrand B_H

  $v_H \equiv \{P(a), P(f(b)), P(c), Q(a,g(b,c)), Q(b,c) \ldots\}$ (solo formule atomiche chiuse)

  $v_H \subseteq \mathrm{B}_H$

- **Modello** di Herbrand

  $\varphi \in \text{Atom}(L_{PO}),\ <\mathbf{U}_H, v_H> [s] \models \varphi$ sse $\varphi \in v_H$

  $\varphi \in \text{Atom}(L_{PO}),\ <\mathbf{U}_H, v_H> [s] \models \neg\varphi$ sse $\varphi \notin v_H$

  $<\mathbf{U}_H, v_H> [s] \models \neg\varphi$ sse $<\mathbf{U}_H, v_H> [s] \not\models \varphi$

  $<\mathbf{U}_H, v_H> [s] \models \varphi \rightarrow \psi$ sse ($<\mathbf{U}_H, v_H> [s] \not\models \varphi$ o $<\mathbf{U}_H, v_H> [s] \models \psi$)

  $<\mathbf{U}_H, v_H> [s] \models \forall x \varphi$ se per ogni $c \in \text{Cost}(L_{PO})$ si ha $<\mathbf{U}_H, v_H> [s](x.c) \models \varphi$

Clausole di Horn e modelli di Herbrand

- **Teorema di Herbrand (in forma generale)**

  Data una teoria di enunciati universali Σ,

  $H(\Sigma)$ ha un modello sse Σ ha un modello

- Corollario (forma a clausole di Horn)

  Sia Γ un insieme di clausole di Horn, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

  - Γ è soddisfacibile
  - Γ ha un modello di Herbrand

  (Notare: si afferma che Γ ha un modello di Herbrand, non $H(\Gamma)$)

  Non vale in generale: solo se Γ è un insieme clausole di Horn

  In questa forma (finita), è quasi una procedura effettiva ...

Clausole di Horn e modelli di Herbrand

- Corollario del teorema di Herbrand

  Sia Γ un insieme di clausole di Horn, le seguenti affermazioni sono equivalenti:
  - Γ è soddisfacibile
  - Γ ha un modello di Herbrand

    Non vale in generale: solo se Γ è un insieme clausole di Horn

- **Modello minimo** di Herbrand

  Il modello minimo M_Γ è l'intersezione di tutti i modelli di Herbrand M_i di Γ :

  $M_\Gamma \equiv \cap_{\forall i} M_i$

- Teorema (van Emden e Kowalski, 1976)

  Sia Γ un insieme di clausole di Horn e φ un atomo base,
  le seguenti affermazioni sono equivalenti:
  - $\Gamma \models \varphi$
  - $\varphi \in M_\Gamma$ (L'unione degli atomi base φ che sono conseguenza logica di Γ coincide con M_Γ)
  - φ è derivabile da Γ tramite risoluzione con unificazione

Programmi e modello minimo

- Teorema (Apt e van Emden, 1982)

  Sia Π un **programma** (= *un insieme di clausole di Horn*).
  Applicata a Π, la procedura di risoluzione genera il modello minimo M_Π

  La procedura termina se M_Π è finito (raggiungimento del *punto fisso*)

  Esempio:

$$\Pi \equiv \{\{Umano(x), \neg Filosofo(x)\}, \{Mortale(x), \neg Umano(x)\}, \{Filosofo(socrate)\}, \{Filosofo(platone)\}, \{Filosofo(aristotele)\}\}$$

  Applicando la procedura di risoluzione in modo esaustivo, si ottiene:

$$\begin{aligned} M_\Pi \equiv \quad & \{\{Mortale(x), \neg Filosofo(x)\}, \\ & \{Filosofo(socrate)\}, \{Filosofo(platone)\}, \{Filosofo(aristotele)\}, \\ & \{Umano(socrate)\}, \{Umano(platone)\}, \{Umano(aristotele)\}, \\ & \{Mortale(socrate)\}, \{Mortale(platone)\}, \{Mortale(aristotele)\}\} \end{aligned}$$

  (assomiglia alla generazione di un database, *implicitamente descritto* da Π...)

Programmi e goal

Un dimostratore di teoremi, applicato ad un programma logico Π, risponde solo a domande del tipo "$\Pi \models \phi$?"

Si rammenti che, se $\Pi \models \phi$, allora $\Pi \cup \{\neg\phi\}$ è insoddisfacibile

- Un sistema di programmazione logica è in grado di generare un particolare sottoinsieme di M_Π

Un goal $\{\neg\alpha_1, \neg\alpha_2, ..., \neg\alpha_m\}$, dove occorrono le variabili $x_1, x_2, ..., x_m$

equivale all'enunciato $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n (\neg\alpha_1 \vee \neg\alpha_2 \vee ... \vee \neg\alpha_m)$

che equivale a $\neg\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_m)$

Un sistema di programmazione logica genera tutte le **sostituzioni** $[x_1/t_1, x_2/t_2, ..., x_n/t_n]$ tali per cui $\Pi \cup \{\neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_m)[x_1/t_1, x_2/t_2, ..., x_n/t_n]\}$ è insoddisfacibile

(vale a dire $\Pi \models (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_m)[x_1/t_1, x_2/t_2, ..., x_n/t_n]$)

(vale a dire $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_m)[x_1/t_1, x_2/t_2, ..., x_n/t_n] \in M_\Pi$)

Il goal agisce da filtro, caratterizzando il sottoinsieme di M_Π

Goal diverso, sottoinsieme diverso

Esempio

- Un programma logico Π:

$$\Pi \equiv \{\{Umano(x), \neg Filosofo(x)\}, \{Mortale(y), \neg Umano(y)\}, \{Filosofo(socrate)\}, \{Filosofo(platone)\}, \{Filosofo(aristotele)\}\}$$

$$\phi \equiv \exists x\ Mortale(x)$$

$$\neg\phi \equiv \neg\exists x\ Mortale(x) \equiv \forall x\ \neg Mortale(x) \equiv \{\neg Mortale(x)\}$$ (goal in forma di clausola di Horn)

Applicando la procedura di risoluzione in modo esaustivo

Si ottengono le sostituzioni:

$$\Sigma \equiv \{[x/socrate], [x/platone], [x/aristotele]\}$$

Assomiglia alla query su un database, *implicito* ...

Risoluzione SLD

- Un metodo per la risoluzione di programmi

  S: *selection function*, una funzione di selezione degli atomi da unificare
  L: *linear resolution*, risoluzione lineare, cioè in sequenza
  D: *definite clause*, clausole di Horn con esattamente un letterale positivo

- Descrizione

  Programma (*definite clauses:* regole + fatti): Π

  Regole: $\beta \vee \neg\gamma_1 \vee \neg\gamma_2 \vee \ldots \vee \neg\gamma_n$

  Fatti: δ

  Goal: $\neg\alpha_1 \vee \neg\alpha_2 \vee \ldots \vee \neg\alpha_k$

  Caratteristiche della procedura:

  - I goal vengono considerati secondo l'ordine definito dalla *selection function*
  - Per ciascun goal $\neg\alpha_i$ viene tentata la risoluzione (con unificazione) di tutte le regole (o fatti) che hanno un letterale positivo compatibile (*esplorazione delle alternative*)
  - Le risposte sono le assegnazioni che permettono di derivare la clausola vuota
  - L'insieme delle risposte è un sottoinsieme di M_Π

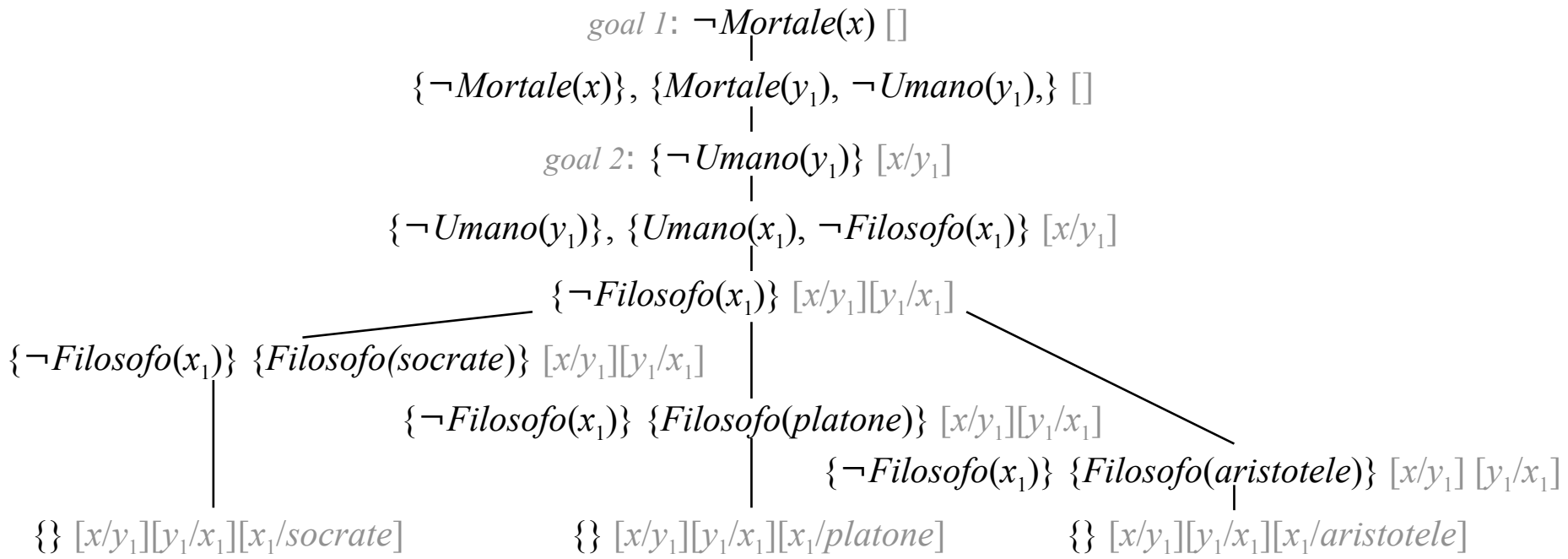
Alberi SLD

- Una traccia del metodo di risoluzione SLD

  Esempio:

  $\Pi \equiv \{\{Umano(x), \neg Filosofo(x)\}, \{Mortale(y), \neg Umano(y)\},$
  $\{Filosofo(socrate)\}, \{Filosofo(platone)\}, \{Filosofo(aristotele)\}\}$

  $goal \equiv \{\neg Mortale(x), \neg Umano(x)\}$ "Chi è mortale ed umano?"

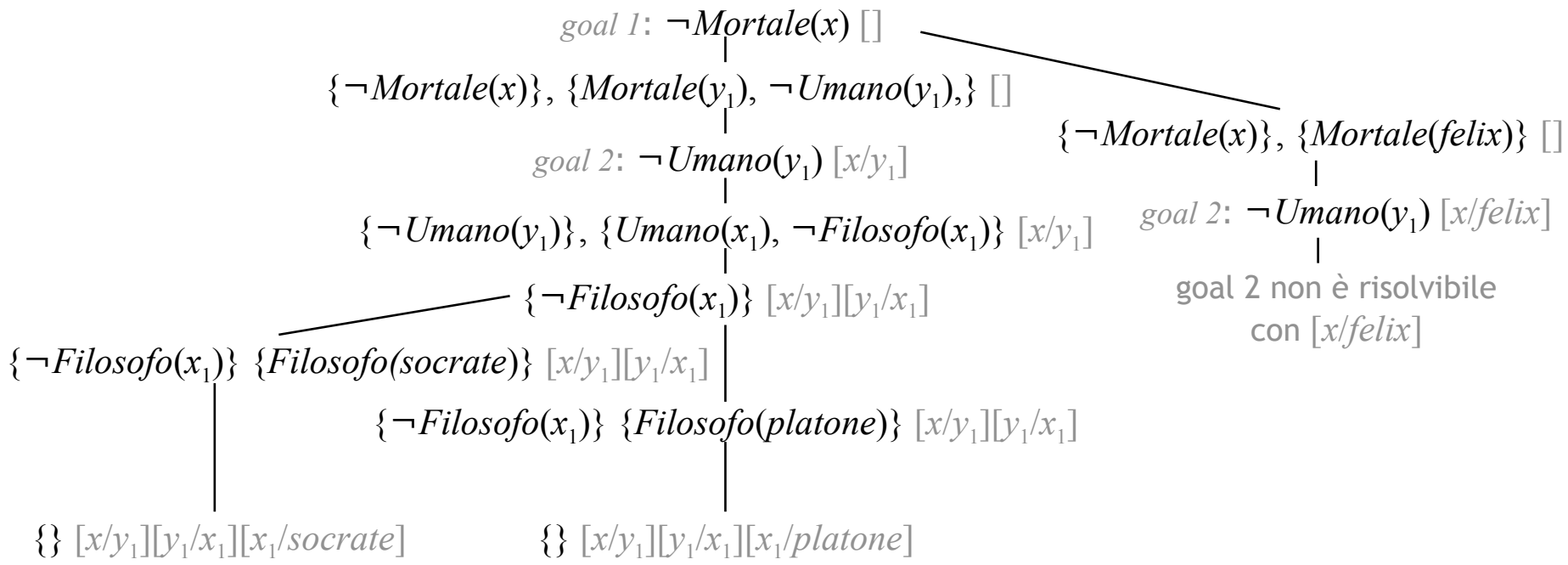


Esempio

- Non tutti i rami SLD si chiudono con successo

$\Pi \equiv \{\{Umano(x), \neg Filosofo(x)\}, \{Mortale(y), \neg Umano(y)\},$
$\{Filosofo(socrate)\}, \{Filosofo(platone)\}, \{Mortale(felix)\}\}$

$goal \equiv \{\neg Mortale(x), \neg Umano(x)\}$ "Chi è mortale ed umano?"



Esempio

- Non tutti gli alberi SLD sono finiti

$\Pi \equiv \{\{Loop(x),\ \neg Loop(x)\}\}$

$goal \equiv \{\neg Loop(x)\}$

goal: $\neg Loop(x)$ []

$\{\neg Loop(x)\},\ \{Loop(x_1),\ \neg Loop(x_1),\}$ []

$\{\neg Loop(x_1)\}$ $[x/x_1]$

$\{\neg Loop(x_1)\},\ \{Loop(x_2),\ \neg Loop(x_2),\}$ $[x/x_1]$

$\{\neg Loop(x_2)\}$ $[x/x_1]$ $[x_1/x_2]$

...

SLD e programmazione logica

- **Insieme delle risposte**

  Insieme di tutte le sostituzioni complete delle variabili,
  nei rami dell'albero SLD che si chiudono con successo (= con una clausola vuota)

- Metodo effettivo (*semantica procedurale*)

  S*election function* delle clausole

  Si usa (quasi) sempre la *leftmost sub-goal first*, con sostituzione del *sub-goal*

  S*trategia di esplorazione* delle alternative

  - in ***ampiezza*** (*breadth-first*)
  - in ***profondità*** (*depth-first*)

  Il metodo SLD con selezione in *ampiezza* è **completo** (si dice anche SLD **fair**)

  Trova tutti i rami finiti (con successo o meno) dell'albero SLD
  (= *procedura completa di semi-decisione per* $\Pi \models \phi$, con Π e ϕ a clausole)

  In pratica si utilizza la selezione in *profondità*

  (*Il metodo SLD <u>non</u> è completo - può divergere anche quando* $\Pi \models \phi$)

Risoluzione SLD in Prolog

- Metodo effettivo

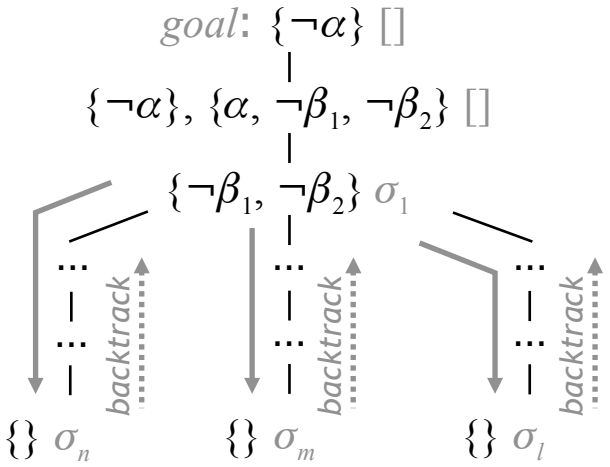
  Selection function: leftmost sub-goal first

  Esplorazione *depth-first* delle alternative

  Si esplora una sola alternativa alla volta,
  e si risparmia memoria (*backtracking*)

  E` una strategia **incompleta**:

  Un ramo divergente impedisce di trovare
  tutte le risposte dei rami 'alla destra'



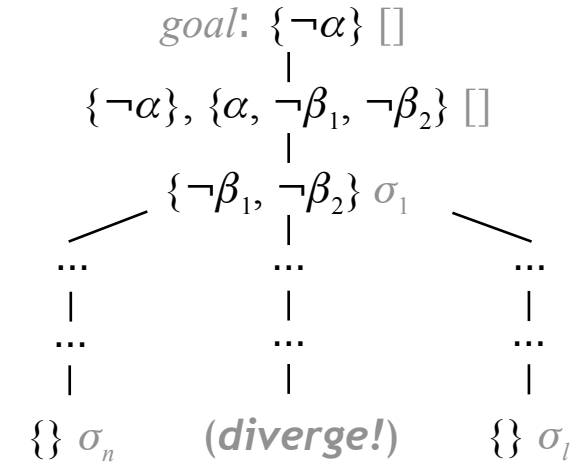
Risposte diverse: σ_n σ_m σ_l

  Scelta tra risoluzioni alternative

  (= *ordine di esplorazione dei sotto-alberi*)

  Ordine di definizione della clausola applicata

  (≈ quella che compare prima nel file)



Il metodo SLD *depth-first*
non troverà la risposta σ_l