# Logica del primo ordine: predicati e relazioni

Marco Piastra

# Strutture semantiche proposizionali (già viste)

*Mondi possibili descritti tramite affermazioni atomiche*

Il mondo descritto da una struttura $<\{0,1\}, \boldsymbol{P}, v>$

$\{0,1\}$ è l'insieme dei valori di verità

$\boldsymbol{P}$ è un'insieme di simboli proposizionali (**segnatura**)

$v$ è una *funzione*: $\boldsymbol{P} \rightarrow \{0,1\}$ che assegna valori di verità ai simboli proposizionali

## Simboli proposizionali

Ciascuno indica una frase affermativa (**proposizioni**)

Per convezione usiamo i simboli $A$, $B$, $C$, $D$, ...

## Mondi possibili

Possiamo considerare diverse strutture:

$<\{0,1\}, \boldsymbol{P}, v>$
$<\{0,1\}, \boldsymbol{P}, v'>$
$<\{0,1\}, \boldsymbol{P}, v''>$
...

Notare che le strutture condividono i simboli $\boldsymbol{P}$ e l'insieme dei valori di verità $\{0,1\}$

Differiscono solo per le funzioni $v$ : i valori di verità assegnati sono in generale diversi

# Strutture semantiche del primo ordine

*Mondi possibili fatti di oggetti, insiemi e relazioni*

Il mondo descritto da una struttura $<\mathbf{U}, \Sigma, v>$

$\mathbf{U}$ è un insieme di oggetti di base, detto anche ***universo del discorso*** o ***dominio*** (*domain*)

$\Sigma$ è un'insieme di simboli, detto ***segnatura*** (*signature*)

$v$ è una *funzione* che definisce il significato dei simboli di $\Sigma$ in relazione al dominio $\mathbf{U}$

**Segnatura $\Sigma$**

- *costanti individuali*: $a$, $b$, $c$, $d$, ...
- *simboli funzionali*: $f/n$, $g/p$, $h/q$, ...
- *simboli predicativi* (o *relazionali*): $P/k$, $Q/l$, $R/m$, ...

# Strutture semantiche del primo ordine

*Mondi possibili fatti di oggetti, insiemi e relazioni*

Il mondo descritto da una struttura $<\mathbf{U}, \mathbf{\Sigma}, v>$

$\mathbf{U}$ è un insieme di oggetti di base, detto anche ***universo del discorso*** o ***dominio*** (*domain*)

$\mathbf{\Sigma}$ è un'insieme di simboli, detto ***segnatura*** (*signature*)

$v$ è una *funzione* che definisce il significato dei simboli di $\mathbf{\Sigma}$ in relazione al dominio $\mathbf{U}$

**Termine**

Ogni *costante individuale* è un **termine**

Se $f$ è un *simbolo funzionale* a $n$ argomenti e $t_1, \ldots, t_n$ sono **termini**, allora $f(t_1, \ldots, t_n)$ è un **termine**

**Atomo**

Se $P$ è un *simbolo predicativo* a *n* argomenti e $t_1, \ldots, t_n$ sono **termini**, allora $P(t_1, \ldots, t_n)$ è un **atomo** o **formula atomica**

# Strutture semantiche del primo ordine

*Mondi possibili fatti di oggetti, insiemi e relazioni*

Il mondo descritto da una struttura $<\mathbf{U}, \Sigma, v>$

$\mathbf{U}$ è un insieme di oggetti di base, detto anche ***universo del discorso*** o ***dominio*** (*domain*)

$\Sigma$ è un'insieme di simboli, detto ***segnatura*** (*signature*)

$v$ è una *funzione* che un significato ai simboli di $\Sigma$ in relazione al dominio $\mathbf{U}$

**Funzione $v$** (interpretazione)

- L'interpretazione di una *costante individuale* è un *oggetto* di $\mathbf{U}$

  $v(\, a\, ) = obj \in \mathbf{U}$ ( $a$ costante individuale)

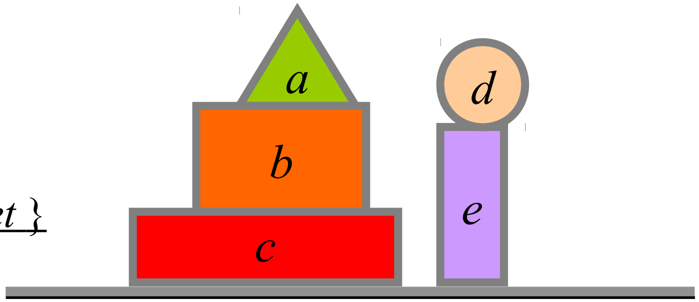
- L'interpretazione di un *simbolo funzionale* è una *funzione* definita su $\mathbf{U}$

  $v(\, f/n\, ) = fun : \mathbf{U}^n \rightarrow \mathbf{U}$ ( $f$ simbolo <u>funzionale</u> avente arità $n$ )

- L'interpretazione di un *simbolo predicativo* è una *relazione* definita su $\mathbf{U}$

  $v(\, P/m\, ) = rel \subseteq \mathbf{U}^m$ ( $P$ simbolo <u>predicativo</u> avente arità $m$ )

# Ditelo con gli atomi




- Esempio di struttura $\langle \mathbf{U}, \Sigma, v \rangle$

  Dominio $\mathbf{U}$

  Insieme di <u>oggetti</u>: { <u>*a*</u>, <u>*b*</u>, <u>*c*</u>, <u>*d*</u>, <u>*e*</u>, <u>*green*</u>, <u>*orange*</u>, <u>*red*</u>, <u>*rose*</u>, <u>*violet*</u> }

  Segnatura $\Sigma$

  Costanti individuali: *a, b, c, d, e, green, orange, red, rose, violet*

  *Non confondere gli <u>oggetti</u> di* $\mathbf{U}$ *con i simboli di* $\Sigma$

  Simboli funzionali: *colorOf*/1

  Simboli predicativi: *Pyramid*/1, *Parallelepiped*/1, *Sphere*/1, *Ontable*/1, *Clear*/1, *Above*/2, =/2

  Una struttura $\langle \mathbf{U}, \Sigma, v \rangle$ <u>*soddisfa*</u> un insieme di atomi

  Esempio: appartenenza a insiemi

  $\langle \mathbf{U}, \Sigma, v \rangle \models$ *Pyramid*(*a*)
  *Parallelepiped*(*b*), *Parallelepiped*(*c*), *Parallelepiped*(*e*)
  *Sphere*(*d*)
  *Ontable*(*c*), *Ontable*(*e*)
  *Clear*(*a*), *Clear*(*d*)

  Valori di funzioni

  $\langle \mathbf{U}, \Sigma, v \rangle \models$ (*colorOf*(*a*) = *green*), (*colorOf*(*b*) = *orange*), (*colorOf*(*c*) = *red*) , (*colorOf*(*d*) = *rose*)

  Relazioni

  $\langle \mathbf{U}, \Sigma, v \rangle \models$ *Above*(*a*,*b*), *Above*(*b*,*c*), *Above*(*a*,*c*), *Above*(*d*,*e*)

# Ditelo con gli atomi

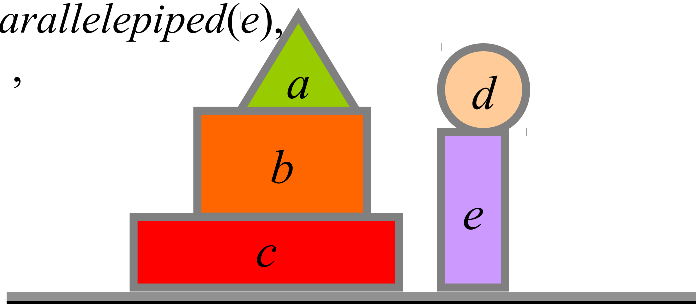
## *Diverse interpretazioni, stessa segnatura* $\Sigma$ *e dominio* $\mathbf{U}$

*Le diverse interpretazioni soddisfano atomi diversi*

$\langle \mathbf{U}, \Sigma, v_1 \rangle \models$ *Pyramid*(*a*), *Parallelepiped*(*b*), *Parallelepiped*(*c*), *Sphere*(*d*), *Parallelepiped*(*e*),
(*colorOf*(*a*) = *green*), (*colorOf*(*b*) = *orange*), (*colorOf*(*c*) = *red*) ,
(*colorOf*(*d*) = *rose*) , (*colorOf*(*e*) = *violet*)

*Ontable*(*c*), *Ontable*(*e*), *Clear*(*a*), *Clear*(*d*)

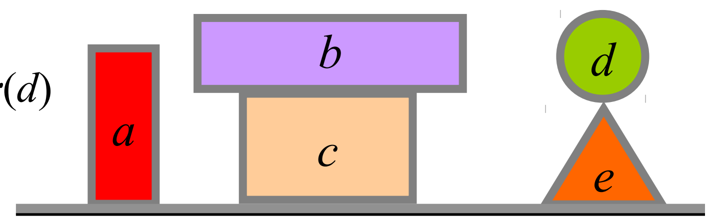
*Above*(*a*,*b*), *Above*(*b*,*c*), *Above*(*a*,*c*), *Above*(*d*,*e*)




$\langle \mathbf{U}, \Sigma, v_2 \rangle \models$ *Parallelepiped*(*a*), *Parallelepiped*(*b*), *Parallelepiped*(*c*), *Sphere*(*d*), *Pyramid*(*e*),
(*colorOf*(*a*) = *red*), (*colorOf*(*b*) = *violet*), (*colorOf*(*c*) = *pink*) ,
(*colorOf*(*d*) = *green*) , (*colorOf*(*e*) = *orange*)

*Ontable*(*a*), *Ontable*(*c*), *Ontable*(*e*), *Clear*(*a*), , *Clear*(*b*), *Clear*(*d*)

*Above*(*b*,*c*), *Above*(*d*,*e*)

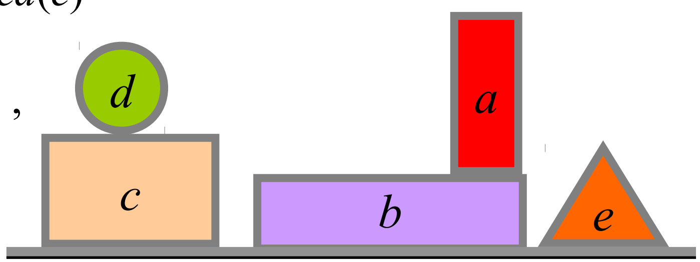



$\langle \mathbf{U}, \Sigma, v_3 \rangle \models$ *Pyramid*(*a*), *Parallelepiped*(*b*), *Parallelepiped*(*c*), *Parallelepiped*(*e*)
*Sphere*(*d*)

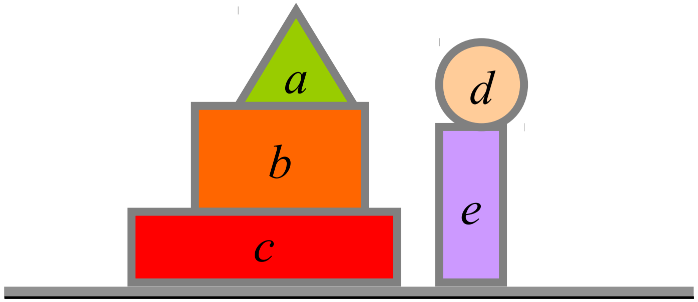
(*colorOf*(*a*) = *green*), (*colorOf*(*b*) = *orange*), (*colorOf*(*c*) = *red*) ,
(*colorOf*(*d*) = *rose*) , (*colorOf*(*e*) = *violet*)

*Ontable*(*c*), *Ontable*(*e*), *Clear*(*a*), *Clear*(*d*)

*Above*(*a*,*b*), *Above*(*b*,*c*), *Above*(*a*,*c*), *Above*(*d*,*e*)



# Astrazione: variabili e quantificatori




(*semantica intuitiva, per ora*)

- Proprietà di carattere generale

  $\neg\forall x\ \exists y\ (Above(x,y))$

  $\neg\forall y\ \exists x\ (Above(x,y))$

- Definizioni di nuovi predicati

  $\forall x \forall y\ (On(x,y) \leftrightarrow (Above(x,y)\ \wedge\ \neg\exists z\ (Above(x,z)\ \wedge\ Above(z,y)))$

  $\forall x\ (Ontable(x) \leftrightarrow \neg\exists z\ Above(x,z))$

  $\forall x\ (Clear(x) \leftrightarrow \neg\exists z\ Above(z,x))$

# Astrazione: variabili e quantificatori

- "Essere fratelli significa essere parenti"

  $\forall x \forall y\ (Fratello(x, y) \rightarrow Parente(x, y))$

- "La relazione di parentela è simmetrica"

  $\forall x \forall y\ (Parente(x\ ,y) \leftrightarrow Parente(y, x))$

- "Una madre è un genitore di sesso femminile"

  $\forall x \forall y\ (Madre(x, y) \leftrightarrow (Genitore(x, y)\ \wedge\ Femmina(x)))$

- "Un cugino è figlio di un fratello o una sorella di uno dei genitori"

  $$\forall x \forall y\ (Cugino(x, y) \\ \leftrightarrow \exists z \exists w\ (Genitore(z, x)\ \wedge\ Genitore(w, y)\ \wedge\ (Fratello(z, w)\ \vee\ Sorella(z, w))))$$

- "Ciascuno ha una madre"

  $\forall x \exists y\ Madre(y, x)$

  Occorre fare attenzione all'ordine dei quantificatori:

  $\exists y \forall x\ Madre(y, x)$

  "Esiste una madre di tutti"

  <u>*L'ordine dei quantificatori non può essere modificato senza alterare il significato*</u>

# Linguaggio di $L_{PO}$

- Simboli del linguaggio $L_{PO}$

  ***Costanti individuali*** (Indicate come: $a$, $b$, $c$, …)

  Esempi: 1, 2000, *Socrate*, *Sfera1*, *MickeyMouse*, *Amelia*, ...

  ***Variabili*** (Indicate come: $x$, $y$, $z$, … )

  ***Simboli funzionali*** con numero di argomenti prestabilito (*arità*)

  Indicati come: $f/n$, $g/m$, $h/p$, …

  Esempi: *sqrt*/1, *colorOf*/1, *greatestCommonDivisor*/2

  ***Simboli predicativi*** con numero di argomenti prestabilito (*arità*)

  Indicati come: $P/n$, $Q/m$, $R/p$, …

  Esempi: *Red*/1, *Large*/1, *GreaterThan*/2, =/2

  ***Connettivi***

  Gli stessi della logica proposizionale: $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$

  ***Quantificatori***

  $\forall$ (universale), $\exists$ (esistenziale)

  ***Parentesi e virgola*** ( ) ,

# Linguaggio di $L_{PO}$

- **Termini**

  Ogni *variabile* o *costante individuale* è un **termine**

  Se $f$ è un *simbolo funzionale* a $n$ argomenti e $t_1, \dots, t_n$ sono **termini**, allora $f(t_1, \dots, t_n)$ è un **termine**

  Un termine **base** (*ground*) non contiene variabili

- **Atomo o formula atomica**

  Se $P$ è un *simbolo predicativo* a *n* argomenti e $t_1, \dots, t_n$ sono **termini**, allora $P(t_1, \dots, t_n)$ è un **atomo** o **formula atomica**

  Un atomo **base** (*ground*) non contiene variabili

Esempi:

$$\underbrace{\underbrace{Sorella(}_{\text{predicato}}\ \underbrace{\underbrace{Amelia}_{\text{costante}}}_{\text{termine}},\ \underbrace{\underbrace{Alba}_{\text{costante}}}_{\text{termine}}}_{\text{formula atomica}})$$

$$\underbrace{\underbrace{shapeOf(\underset{\uparrow\,\text{costante}}{b})}_{\text{termine}} \underset{\uparrow\,\text{predicato}}{=} \underbrace{shapeOf(\underset{\uparrow\,\text{variabile}}{x})}_{\text{termine}}}_{\text{formula atomica}}$$

# Linguaggio di $L_{PO}$

- Regole di buona formazione

Ogni *formula atomica* è una fbf

$$\varphi \in \mathrm{fbf}(L_{PO}) \;\Rightarrow\; (\neg\varphi) \in \mathrm{fbf}(L_{PO})$$
$$\varphi, \psi \in \mathrm{fbf}(L_{PO}) \;\Rightarrow\; (\varphi \to \psi) \in \mathrm{fbf}(L_{PO})$$
$$\varphi \in \mathrm{fbf}(L_{PO}) \;\Rightarrow\; (\forall x\, \varphi) \in \mathrm{fbf}(L_{PO})$$

$$\varphi, \psi \in \mathrm{fbf}(L_{PO}), \qquad (\varphi \vee \psi) \;\Leftrightarrow\; ((\neg\varphi) \to \psi)$$
$$\varphi, \psi \in \mathrm{fbf}(L_{PO}), \qquad (\varphi \wedge \psi) \;\Leftrightarrow\; (\neg(\varphi \to (\neg\psi)))$$
$$\varphi, \psi \in \mathrm{fbf}(L_{PO}), \qquad (\varphi \leftrightarrow \psi) \;\Leftrightarrow\; ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$$
$$\varphi \in \mathrm{fbf}(L_{PO}) \qquad (\exists x\, \varphi) \Leftrightarrow\; (\neg\forall x\, \neg\varphi)$$

Si dice linguaggio **del primo ordine** in quanto
i quantificatori agiscono solo sugli **oggetti**,
vale a dire sulle variabili $x$, $y$, $z$ …, e non sulle **relazioni** e **funzioni**
(*In una logica del secondo ordine si hanno formule del tipo*: $\exists F\, F(a,b)$)

# Formule aperte, enunciati

- Variabili **libere** e **vincolate**

  Una variabile (in una fbf) è **vincolata** se si trova nel raggio di azione di un **quantificatore** per quella variabile

  Una variabile è **libera** se non è *vincolata*

  esempi di variabile vincolata:
  $\forall x \; P(x)$
  $\exists x \; (P(x) \rightarrow (A(x) \land B(x))$
  esempi di variabile libera:
  $P(x)$
  $\exists y \; (P(y) \rightarrow (A(x,y) \land B(y)))$

- **Formule aperte** e **chiuse**

  Una fbf è **aperta** se in essa vi è almeno una variabile libera

  Una fbf è **chiusa** (anche **enunciato** - *sentence*) in caso contrario

  Solo le fbf *chiuse*, cioè gli *enunciati*, hanno un valore di verità (vedi oltre) (in quanto rappresentano delle *affermazioni* ...)

# Strutture, interpretazioni e assegnazioni

- Una **struttura** $<\mathbf{U}, v>$ per $L_{PO}$ contiene:

  Un insieme di oggetti $\mathbf{U}$ (l'universo del discorso)

  *Si omette da ora in poi il riferimento a* $\Sigma$

  Un'**interpretazione** $v$ che associa

  ad ogni **costante** $c$ un **oggetto** di $\mathbf{U}$
  $v(c) \in \mathbf{U}$

  ad ogni **predicato** $P$ a $n$ argomenti una **relazione** $n$-aria in $\mathbf{U}^n$
  $v(P) \subseteq \mathbf{U}^n$

  ad ogni **funzione** $f$ a $n$ argomenti una **funzione** da $\mathbf{U}^n$ a $\mathbf{U}$
  $v(f) \in \mathbf{U}^n \to \mathbf{U}$

  *La funzione v non assegna un significato alle variabili*

- Assegnazione

  Data una struttura $<\mathbf{U}, v>$, un'**assegnazione** (*valuation*) $s$

  è una *funzione* che associa ad ogni **variabile** $x$ un **oggetto** di $\mathbf{U}$
  $s(x) \in \mathbf{U}$

  La combinazione di una $<\mathbf{U}, v>$ e di una $s$ determina univocamente gli oggetti associati a ciascun elemento di $L_{PO}$

# Soddisfacimento

- Data una struttura $<\mathbf{U}, v>$ un'assegnazione $s$

Se $\varphi$ è una formula atomica, $<\mathbf{U}, v>[s] \models \varphi$ sse

se $\varphi$ ha la forma $P(t_1, \dots, t_n)$ allora $<v(t_1)[s], \dots, v(t_n)[s]> \in v(P)[s]$

*L'assegnazione $s$ serve a poter definire una semantica anche per le fbf aperte*

Se $\varphi$ e $\psi$ sono fbf qualsiasi

$<\mathbf{U}, v>[s] \models (\neg\varphi)$ sse $<\mathbf{U}, v>[s] \not\models \varphi$

$<\mathbf{U}, v>[s] \models (\varphi \wedge \psi)$ sse $<\mathbf{U}, v>[s] \models \varphi$ e $<\mathbf{U}, v>[s] \models \psi$

$<\mathbf{U}, v>[s] \models (\varphi \vee \psi)$ sse $<\mathbf{U}, v>[s] \models \varphi$ o $<\mathbf{U}, v>[s] \models \psi$

$<\mathbf{U}, v>[s] \models (\varphi \rightarrow \psi)$ allora non $<\mathbf{U}, v>[s] \models \varphi$ o $<\mathbf{U}, v>[s] \not\models \psi$

Formule con quantificatori

$<\mathbf{U}, v>[s] \models \forall x\, \varphi$ sse per ogni $\underline{d} \in \mathbf{U}$ si ha $<\mathbf{U}, v>[s](x{:}\underline{d}) \models \varphi$

$<\mathbf{U}, v>[s] \models \exists x\, \varphi$ sse esiste un $\underline{d} \in \mathbf{U}$ per cui si ha $<\mathbf{U}, v>[s](x{:}\underline{d}) \models \varphi$

# Modelli

- **Validità** in un'interpretazione, **modello**

  Una fbf $\varphi$ tale per cui si ha $<\mathbf{U}, v>[s] \models \varphi$ per qualsiasi assegnazione $s$ è detta **valida** in $<\mathbf{U}, v>$

  Si dice anche che $<\mathbf{U}, v>$ è un **modello** di $\varphi$

  si scrive $<\mathbf{U}, v> \models \varphi$ (si elimina il riferimento a $s$)

  Una struttura $<\mathbf{U}, v>$ è detta **modello** di un *insieme di fbf* $\Gamma$ sse è un modello di tutte le fbf in $\Gamma$

  si scrive allora $<\mathbf{U}, v> \models \Gamma$

- **Verità**

  Un **enunciato** $\psi$ si dice **vero** in $<\mathbf{U}, v>$ se è **valido** in $<\mathbf{U}, v>$

# Validità

- Validità e verità logiche

  Una fbf (aperta o chiusa) è **valida** (o **logicamente valida**)
  se è **valida** in qualsiasi $<\mathbf{U}, v>$

  Esempi:

  $(P(x) \vee \neg P(x))$ (tautologia proposizionale tradotta in formula aperta)

  Un enunciato $\psi$ è **vero** (o **logicamente vero**)
  se è **vero** in qualsiasi $<\mathbf{U}, v>$

  si scrive allora $\models \psi$ (si elimina il riferimento a $<\mathbf{U}, v>$)

  Esempi:

  $\forall x\, (P(x) \vee \neg P(x))$ (generalizzazione di una tautologia)

  $\forall x \forall y\, (G(x,y) \rightarrow (H(x,y) \rightarrow G(x,y)))$ (generalizzazione di assioma – vedi oltre)

- Inconsistenza

  Una fbf (aperta o chiusa) è **inconsistente** se non è soddisfacibile

  Un enunciato $\psi$ è **inconsistente** se non ha un *modello*

  Esempi:

  $\forall x\, (P(x) \wedge \neg P(x))$ (generalizzazione di una contraddizione)

# Conseguenza logica

- Definizione

  Dato un insieme di fbf $\Gamma$ ed una fbf $\varphi$ di $L_{PO}$ si ha

  $$\Gamma \models \varphi$$

  sse tutte le $<\mathbf{U}, v> [s]$ che soddisfano $\Gamma$ soddisfano anche $\varphi$

- Osservazioni

  La definizione si estende a tutte le possibili $<\mathbf{U}, v> [s]$

  Quindi, a tutti i possibili insiemi $\mathbf{U}$, alle relazioni e funzioni in $\mathbf{U}$ ed alle associazioni di oggetti di $\mathbf{U}$ a variabili e costanti

  Il calcolo diretto della conseguenza logica in $L_{PO}$ è impossibile anche nelle forme più semplici

# *Ditelo con le funzioni o con i predicati?

Semanticamente, funzioni e predicati sono molto simili:
si può fare a meno delle funzioni?

- Le funzioni si possono *rappresentare* anche tramite predicati

  ad esempio, la validità dell'enunciato:

  $$\forall x \forall y \forall z \; ((\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z)) \rightarrow (y = z))$$

  indica che l'interpretazione di $\varphi(..)$ (in generale, una relazione $v(\varphi) \subseteq \mathbf{U}^2$)
  è anche una funzione $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$

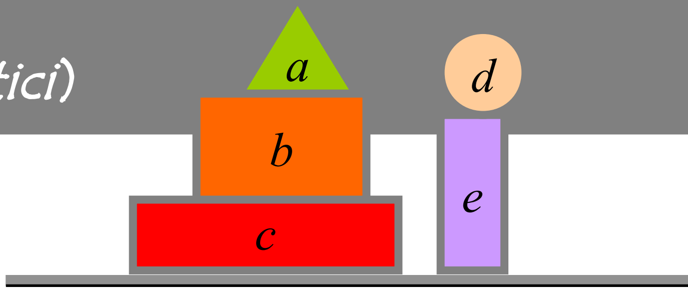
- Ma solo le funzioni si possono nidificare

  La presenza delle funzioni arricchisce il linguaggio in modo sostanziale:
  a differenza dei predicati, le funzioni si possono nidificare (nei termini)

  Di conseguenza, viene grandemente aumentata la portata del calcolo logico-simbolico

  (*con un corrispondente aumento della complessità di calcolo* ...)

# *Many-sorted or nil (dedicato agli informatici)




*Tornando alla segnatura dell'esempio mondo dei blocchi*

$green$, $colorOf(green)$, $colorOf(colorOf(green))$, $colorOf(colorOf(colorOf(green)))$, …

Sono tutti termini sintatticamente corretti, in base alla definizione.
Peccato che, intuitivamente, non abbiano senso: un colore non è un oggetto …

Per le applicazioni pratiche, le segnature dovrebbero avere un *tipo* (*sort*)

Per descrivere un dominio che contiene oggetti di tipo diverso (segnatura *many-sorted*)

Il tipo si applica alle costanti ed agli argomenti di simboli funzionali e predicativi
*Complicazione notevole*: si riflette in tutte le definizioni sintattiche e semantiche

Comodità del *nil*

Una costante particolare: *nil*
cui corrisponde un interpretazione (canonica) di un non-oggetto

In questo modo, funzioni e relazioni possono essere definite in modo parziale:

$(colorOf(a) = green) \wedge (colorOf(green) = nil)$

$Above(a,b) \wedge Above(c,nil)$

Possono essere fbf vere in una struttura

*In questo modo, si evita l'uso esplicito del tipo*