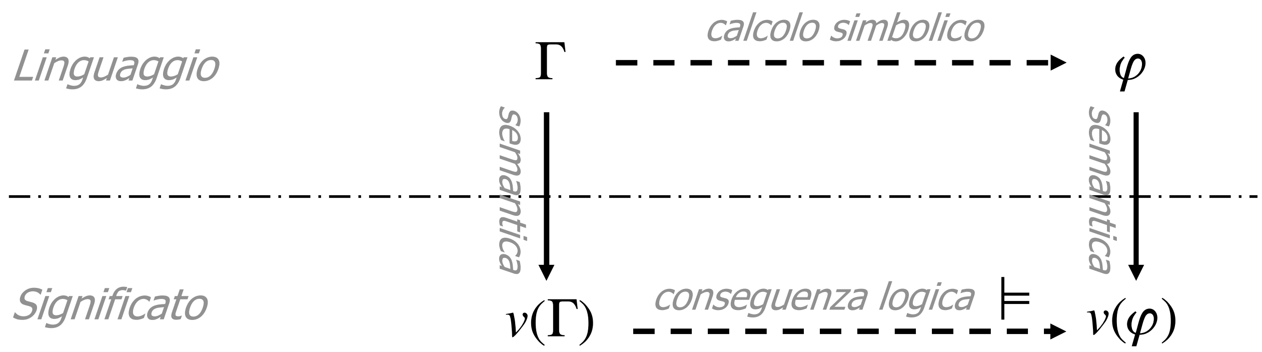
# Sistemi Deduttivi

Marco Piastra

- Una fbf $\varphi$ è **conseguenza logica** di un insieme di fbf $\Gamma$ sse qualsiasi *modello* di $\Gamma$ è anche *modello* di $\varphi$

    Si scrive anche:

    $\Gamma \models \varphi$



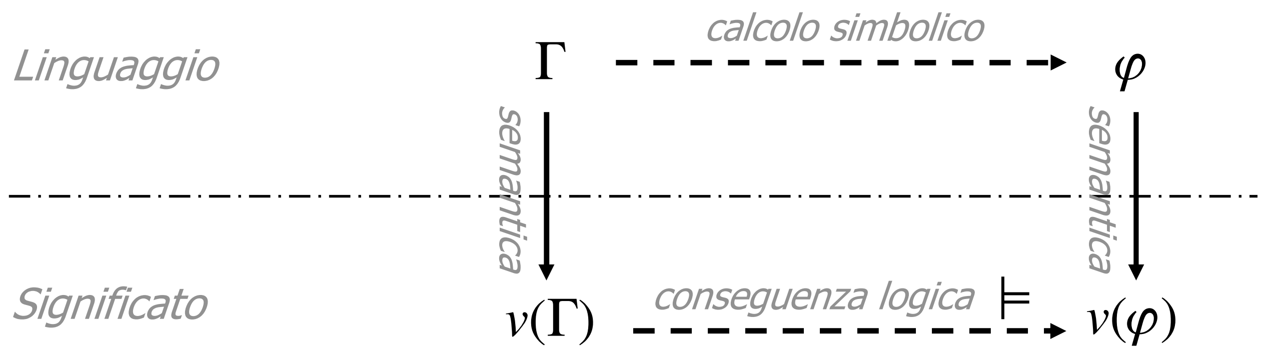

Si noti che la definizione fa riferimento a tutti i possibili significati (modelli)

# Calcolo simbolico?

- Una fbf $\varphi$ è **conseguenza logica** di un insieme di fbf $\Gamma$ sse qualsiasi *modello* di $\Gamma$ è anche *modello* di $\varphi$

  Si scrive anche:

  $\Gamma \models \varphi$




  Si noti che la definizione fa riferimento a tutti i possibili significati (modelli)

- Si può stabilire l'esistenza della conseguenza logica operando sul linguaggio?

  Ad esempio, applicando *schemi* di ragionamento

# Schemi e conseguenza logica

- Esempio: "La macchina non parte"

$C =$ "La batteria è carica"
$L =$ "Le luci si accendono"
$A =$ "L'autoradio funziona"
$M =$ "Il motorino d'avviamento gira"
$G =$ "Il motorino d'avviamento è guasto"
$P =$ "Il motore parte"

Regole:

$\rho_1 :$ $\neg C \rightarrow (\neg L \wedge \neg A \wedge \neg M)$
$\rho_2 :$ $G \rightarrow \neg M$
$\rho_3 :$ $\neg M \rightarrow \neg P$

Ragionamento per schemi:

*Utilizzando il fatto che* $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \models \psi$

Dalla premessa $\neg C$ applicando $\rho_1$ si ottiene: $\neg L \wedge \neg A \wedge \neg M$
Il che vuol dire: $\{\neg C, \rho_1\} \models \neg L \wedge \neg A \wedge \neg M$

Dalla premessa $G$ applicando $\rho_2$ si ottiene: $\neg M$
quindi, applicando ancora $\rho_3$ si ottiene: $\neg P$
Il che vuol dire: $\{G, \rho_2, \rho_1\} \models \neg P$

# Metodo assiomatico (a la Hilbert, 1899)

- Elementi

  $< L_P , \boldsymbol{Ax} , \boldsymbol{Inf} >$

  $L_P$ è un linguaggio proposizionale (definito come in precedenza)

  $\boldsymbol{Ax}$ è un'insieme di fbf di partenza, dette *assiomi*

  $\boldsymbol{Inf}$ è un'insieme di regole di trascrizione con modifica (schemi)

  Applicando una regola di inferenza ad una o più fbf, si deriva (aggiunge) una nuova fbf

- Metodo

  Dato un insieme di fbf $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots \varphi_n\}$ assunte come **ipotesi**,
  si cerca di *derivare* $\psi$ una fbf che costituisce la **tesi** di interesse

  Si parte da $\Gamma \cup \boldsymbol{Ax}$

  Si applicano le regole di inferenza per cercare di ottenere $\psi$

  Tenere a mente: lo scopo è stabilire se $\Gamma \models \psi$

  *Ma senza fare ricorso alla semantica, operando solo sulle fbf*

# Regole di inferenza *Inf*

Si rammenti lo schema $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \models \psi$, di validità generale

- In una logica formale, il calcolo (simbolico) si basa regole di **derivazione** (o di **inferenza**) che operano sulle fbf

  Vale a dire sul linguaggio, non sui valori di verità

- Per $L_P$ basta una sola regola di derivazione

  *Modus Ponens* ($MP$):
  $$\frac{\begin{array}{l}\varphi \rightarrow \psi \\ \varphi\end{array}}{\psi}$$

  Si scrive anche così:

  $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \vdash \psi$ (da $\varphi \rightarrow \psi$ e $\varphi$ è *derivabile* $\psi$ – attenti alla notazione!)

  Ogni fbf derivata tramite $MP$ da due tautologie è una tautologia

  *Provare per credere*

# I punti di partenza: gli assiomi *Ax*

Gli assiomi (di una logica) sono fbf che ne riassumono le caratteristiche

Descrivono (in forma compatta) gli *schemi di ragionamento*

- ***Schemi** d'assioma* per $L_P$ (Lukasiewicz, 1917):

$$\text{Ax1} \qquad \vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$\text{Ax2} \qquad \vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$\text{Ax3} \qquad \vdash (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

Ogni sostituzione delle (meta)variabili $\varphi, \psi$ e $\chi$ con una fbf è un assioma

*Le fbf così ottenute si dicono anche istanziazioni degli schemi di assioma*

Esempi di fbf ottenute per sostituzione:

$\vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$ [Ax1: $\varphi/A$, $\psi/\neg A$]

$\vdash (\neg(B \vee C) \rightarrow \neg D) \rightarrow (D \rightarrow (B \vee C))$ [Ax3: $\varphi/(B \vee C)$, $\psi/D$]

Gli schemi di assioma sono *tautologie,* così come ogni singola sostituzione

*Provare per credere*

# Teoremi: applicazione delle regole *Inf*

Dato un'insieme di fbf $\Gamma$, sono **teoremi** di $\Gamma$ tutte le fbf $\varphi$
che si possono ottenere applicando le regole di inferenza $\boldsymbol{Inf}$ a $\boldsymbol{Ax} \cup \Gamma$

($\Gamma$ può anche essere vuoto)

*La definizione ha valore generale, si applica a qualsiasi logica assiomatizzata*

L'insieme dei *teoremi* di $\Gamma$ si indica anche come $Teoremi(\Gamma)$

Nel caso di $L_P$

- $\boldsymbol{Ax}$ è l'insieme di tutti gli assiomi ottenuti per istanziazione di $\mathrm{Ax}_1$, $\mathrm{Ax}_2$, $\mathrm{Ax}_3$
- $\boldsymbol{Inf}$ include solo la regola del Modus Ponens ($MP$)

Qualsiasi *teorema* di $\Gamma$ è anche una *conseguenza logica* di $\Gamma$

$\varphi \in Teoremi(\Gamma) \Rightarrow \Gamma \models \varphi$

*Perchè? (semplice esercizio per il lettore ...)*

# Derivazioni (o *dimostrazioni*) di teoremi

- Una *dimostrazione* (o *derivazione*) di una fbf $\varphi$ da un insieme di fbf $\Gamma$

  E` una successione *finita* di passi $\Gamma \vdash \phi_1, \Gamma \vdash \phi_2, \ldots, \Gamma \vdash \phi_n$

  Ciascun passo $\phi_i$ deriva da $\Gamma$ o dai passi precedenti:

  1) Si ricava una fbf per sostituzione da uno degli assiomi $\mathrm{Ax}_n$
  2) Si importa una fbf presente nelle ipotesi $\Gamma$
  3) Si ottiene una nuova fbf dalle fbf ai passi precedenti, tramite *Modus Ponens*

  Nel passo finale, si ottiene la formula da dimostrare: $\phi_n = \varphi$

  In generale, si scrive allora $\Gamma \vdash \varphi$ "$\varphi$ è derivabile da $\Gamma$"

  La dimostrazione non è necessariamente unica (anzi)

  Proprietà notevoli:

  $\vdash \mathrm{Ax}n$ (un assioma, o sostituzione, è derivabile anche da un $\Gamma$ vuoto)

  $\Gamma \vdash \mathrm{Ax}n$ (un assioma, o sostituzione, è derivabile da qualsiasi $\Gamma$)

  $\{\varphi, ..\} \vdash \varphi$ (qualsiasi $\varphi$ è derivabile da un $\Gamma$ che già la contiene)

# Derivazioni, esempio pratico

- Il problema visto in precedenza ("Giorgio è contento")

$$B \vee D \vee \neg(A \wedge C),\ B \vee C,\ A \vee D,\ \neg B \vdash D$$

*Riscrivendo il problema usando solo* $\neg$ *e* $\rightarrow$

$$C \rightarrow (\neg B \rightarrow (A \rightarrow D)),\ \neg B \rightarrow C, \neg A \rightarrow D,\ \neg B \vdash D$$

*Per comodità*

$$\Gamma \vdash D$$

| | | |
|---|---|---|
| 1: | $\Gamma \vdash \neg B \rightarrow C$ | |
| 2: | $\Gamma \vdash \neg B$ | |
| 3: | $\Gamma \vdash C$ | (*MP* 1,2) |
| 4: | $\Gamma \vdash C \rightarrow (\neg B \rightarrow (A \rightarrow D))$ | |
| 5: | $\Gamma \vdash \neg B \rightarrow (A \rightarrow D)$ | (*MP* 3,4) |
| 6: | $\Gamma \vdash A \rightarrow D$ | (*MP* 2,5) |
| 7: | $\Gamma \vdash \neg A \rightarrow D$ | |
| 8*: | $\Gamma \vdash (\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$ | (***Se fosse un assioma, ma non lo è***) |
| 9: | $\Gamma \vdash (\neg A \rightarrow D) \rightarrow ((A \rightarrow D) \rightarrow D)$ | (*Sost*) |
| 10: | $\Gamma \vdash (A \rightarrow D) \rightarrow D$ | (*MP* 7,9) |
| 11: | $\Gamma \vdash D$ | (*MP* 6,10) |

# Derivazioni: Teorema 0

- Qualsiasi fbf implica se stessa

  $\vdash \varphi \to \varphi$

$$
\begin{array}{lll}
1: & \vdash (\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)) & \text{(Ax2)} \\
2: & \vdash (\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) & \text{(Ax1)} \\
3: & \vdash (\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi) & (\mathit{MP}\ 1{,}2) \\
4: & \vdash (\varphi \to (\varphi \to \varphi)) & \text{(Ax1)} \\
5: & \vdash \varphi \to \varphi & (\mathit{MP}\ 3{,}4)
\end{array}
$$

# (meta)-Teorema di deduzione

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi \to \psi$$

- Da sinistra a destra:

  $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash \varphi \to \psi$

  Sia $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n\text{-}1}, \psi$ una derivazione di $\psi$ da $\Gamma \cup \{\varphi\}$

  Per $\alpha_1$ sono dati due casi:

  1) $\alpha_1 \in \Gamma$ oppure $\alpha_1$ è un assioma
     Usando $\mathrm{Ax1}$, $\Gamma \vdash \alpha_1 \to (\varphi \to \alpha_1)$ ma anche $\Gamma \vdash \alpha_1$ e quindi $\Gamma \vdash \varphi \to \alpha_1$
  2) $\alpha_1 = \varphi$
     Per il Teorema 0, $\vdash \varphi \to \varphi$ e quindi $\Gamma \vdash \varphi \to \alpha_1$

  Per $\alpha_j$, assumendo che la tesi valga per $\alpha_{j\text{-}1}$, sono dati tre casi:

  1) $\alpha_j \in \Gamma$ oppure $\alpha_j$ è un assioma
     Vedi il caso 1) di $\alpha_1$
  2) $\alpha_j = \varphi$
     Vedi il caso 2) di $\alpha_1$
  3) $\alpha_j$ è ottenuto per $MP$ da due passi precedenti $\alpha_i$ e $\alpha_i \to \alpha_j$
     Se la tesi vale fino a $j$-1, allora si ha $\Gamma \vdash \varphi \to \alpha_i$ e $\Gamma \vdash \varphi \to (\alpha_i \to \alpha_j)$
     Usando $\mathrm{Ax2}$, $\vdash (\varphi \to (\alpha_i \to \alpha_j)) \to ((\varphi \to \alpha_i) \to (\varphi \to \alpha_j))$
     ed applicando due volte il $MP$ si ottiene $\Gamma \vdash \varphi \to \alpha_j$

# (meta)-Teorema di deduzione

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi \to \psi$$

- Da destra a sinistra:

  $\Gamma \vdash \varphi \to \psi \;\Rightarrow\; \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$

  Sia $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n\text{-}1}, \varphi \to \psi$ una derivazione di $\varphi \to \psi$ da $\Gamma$

  La stessa derivazione di $\varphi \to \psi$ mostra che $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$

  Dato che $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$, applicando il $MP$ si ottiene $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$

# (meta)-Corollario del teorema di deduzione

- Duale semantico del teorema di deduzione

  La stessa proprietà vale in termini di conseguenza logica

  $$\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$$

  Si verifica direttamente

# Derivazioni: Teorema 1

- L'ordine delle ipotesi non è rilevante

$$\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$$

$$\begin{array}{lll}
1: & (\varphi \to (\psi \to \chi)), \psi, \varphi \vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) & \\
2: & (\varphi \to (\psi \to \chi)), \psi, \varphi \vdash \varphi & \\
3: & (\varphi \to (\psi \to \chi)), \psi, \varphi \vdash \psi \to \chi & (MP\ 1{,}2) \\
4: & (\varphi \to (\psi \to \chi)), \psi, \varphi \vdash \psi & \\
5: & (\varphi \to (\psi \to \chi)), \psi, \varphi \vdash \chi & (MP\ 3{,}4) \\
6: & (\varphi \to (\psi \to \chi)), \psi \vdash \varphi \to \chi & (Ded) \\
7: & (\varphi \to (\psi \to \chi)) \vdash \psi \to (\varphi \to \chi) & (Ded) \\
8: & \vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi)) & (Ded)
\end{array}$$

# Derivazioni: Teorema 2

- Doppia negazione implica affermazione

$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$

| | | |
|---|---|---|
| 1: | $\vdash \neg\neg\varphi \to (\neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi)$ | (Ax1) |
| 2: | $\neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi$ | (*Ded*) |
| 3: | $\neg\neg\varphi \vdash (\neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi)$ | (Ax3) |
| 4: | $\neg\neg\varphi \vdash \neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi$ | (*MP* 3,2) |
| 5: | $\neg\neg\varphi \vdash (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \varphi)$ | (Ax3) |
| 6: | $\neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ | (*MP* 5,4) |
| 7: | $\neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi$ | |
| 8: | $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$ | (*MP* 6,7) |
| 9: | $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ | (*Ded*) |

# Derivazioni: Teorema 3

- Una regola è falsa se la premessa è vera e la conseguenza non lo è

$$\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$$

| | | |
|---|---|---|
| 1: | $\varphi, (\varphi \to \psi) \vdash \psi$ | (Regola *MP*) |
| 2: | $\varphi \vdash (\varphi \to \psi) \to \psi$ | (*Ded*) |
| 3: | $\varphi \vdash ((\varphi \to \psi) \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$ | (Ax3) |
| 4: | $\varphi \vdash \neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi)$ | (*MP* 3,2) |
| 5: | $\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$ | (*Ded*) |

# Derivazioni: Teorema 4

- Da un assurdo si deriva qualsiasi cosa ("*Ex absurdo sequitur quodlibet*"):

  $\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$ (vale a dire $\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$)

| | | |
|---|---|---|
| 1: | $\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ | (Ax1) |
| 2: | $\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi$ | |
| 3: | $\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$ | (*MP* 1,2) |
| 4: | $\varphi, \neg\varphi \vdash (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$ | (Ax3) |
| 5: | $\varphi, \neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$ | (*MP* 4,3) |
| 6: | $\varphi, \neg\varphi \vdash \varphi$ | |
| 7: | $\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$ | (*MP* 5,6) |
| 8: | $\varphi \vdash \neg\varphi \to \psi$ | (*Ded*) |
| 9: | $\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$ | (*Ded*) |

Un insieme di premesse contraddittorio si dice *incoerente* (o *inconsistente*)

Da un simile insieme di premesse è possibile derivare qualsiasi cosa:
anche una fbf come: $\psi \wedge \neg\psi$

# Derivazioni: Teorema 5

- Se la falsità implica una contraddizione, allora dev'esser vero:

$\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$

| | | |
|---|---|---|
| 1: | $\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi$ | |
| 2: | $\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi \to \varphi$ | |
| 3: | $\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi \vdash \varphi$ | (*MP* 1,2) |
| 4: | $\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi \vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi))$ | (Teorema 4) |
| 5: | $\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi)$ | (*MP* 3,4) |
| 6: | $\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi \vdash \neg(\neg\varphi \to \varphi)$ | (*MP* 1,5) |
| 7: | $\neg\varphi \to \varphi \vdash \neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi)$ | (*Ded*) |
| 8: | $\neg\varphi \to \varphi \vdash (\neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi)) \to ((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi)$ | (Ax3) |
| 9: | $\neg\varphi \to \varphi \vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ | (*MP* 7,8) |
| 10: | $\neg\varphi \to \varphi \vdash \neg\varphi \to \varphi$ | |
| 11: | $\neg\varphi \to \varphi \vdash \varphi$ | (*MP* 9,10) |
| 12: | $\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ | (*Ded*) |

# Derivazioni: Teorema "X"

- Regola di risoluzione (il risultato cercato per il primo esempio):

$\vdash (\neg\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \psi) \to \psi)$

| | | |
|---|---|---|
| 1: | $(\neg\varphi \to \psi), (\varphi \to \psi) \vdash (\neg\varphi \to \psi)$ | |
| 2: | $(\neg\varphi \to \psi), (\varphi \to \psi) \vdash (\neg\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \varphi)$ | (Ax3) |
| 3: | $(\neg\varphi \to \psi), (\varphi \to \psi) \vdash (\neg\psi \to \varphi)$ | (*MP* 1,2) |
| 4: | $(\neg\varphi \to \psi), (\varphi \to \psi), \neg\psi \vdash \varphi$ | (*Ded*) |
| 5: | $(\neg\varphi \to \psi), (\varphi \to \psi), \neg\psi \vdash \varphi \to \psi$ | |
| 6: | $(\neg\varphi \to \psi), (\varphi \to \psi), \neg\psi \vdash \psi$ | (*MP* 4,5) |
| 7: | $(\neg\varphi \to \psi), (\varphi \to \psi) \vdash (\neg\psi \to \psi)$ | (*Ded*) |
| 8: | $(\neg\varphi \to \psi), (\varphi \to \psi) \vdash ((\neg\psi \to \psi) \to \psi)$ | (Teorema 5) |
| 9: | $(\neg\varphi \to \psi), (\varphi \to \psi) \vdash \psi$ | (*MP* 7,8) |
| 10: | $(\neg\varphi \to \psi) \vdash ((\varphi \to \psi) \to \psi)$ | (*Ded*) |
| 11: | $\vdash (\neg\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \psi) \to \psi)$ | (*Ded*) |

# Correttezza

- *Correttezza*

  Le fbf *derivabili* dagli assiomi $\mathrm{Ax}n$ sono *tautologie* (fbf *valide*)

  $$\vdash \varphi \Rightarrow \models \varphi$$

  Perchè:

  Si può verificare direttamente che gli schemi di assioma *Ax1*, *Ax2* e *Ax3* sono schemi di tautologie

  Si può verificare direttamente che la regola di inferenza del *Modus Ponens* è corretta, nel senso che preserva la conseguenza logica

  Qualsiasi conseguenza logica di un insieme di tautologie è una tautologia

# Completezza

- *Completezza*

  Le *tautologie* (fbf *valide*) sono fbf *derivabili* dagli assiomi $\mathrm{Ax}n$

  $$\models \varphi \ \Rightarrow\ \vdash \varphi$$

  Perchè:

  Si consideri la tavola di verità di $\varphi$ e dell'insieme di simboli atomici $A_i$ che vi occorrono

  Per ciascuna riga si costruisca un insieme di fbf $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$
  dove $B_i = A_i$ se $A_i$ ha valore 1 e $B_i = \neg A_i$ se $A_i$ ha valore 0

  Si prenda inoltre $\psi = \varphi$ se nella riga $\varphi$ ha valore 1 e $\psi = \neg\varphi$ se $\varphi$ ha valore 0

  Allora $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \psi$

  Chiaramente, la cosa è vera quando $\varphi$ è una fbf atomica

  Infatti, se $\psi = \varphi = A_1$ si ha
  $A_1 \vdash A_1$

  Se invece $\psi = \neg\varphi = \neg A_1$
  si ha $\neg A_1 \vdash \neg A_1$

$2^n$ righe

| $A_1$ | $A_2$ | ... | $A_n$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | ... | 0 | $V_1$ |
| 0 | 0 | ... | 1 | $V_2$ |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| 1 | 1 | ... | 1 | $V_{2^n}$ |

# Completezza (2)

Per mostrare che $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \psi$ in generale si procede per induzione sulla composizione di $\varphi$ assumendo che il fatto valga per le componenti più semplici

Primo caso: $\varphi = \neg\alpha$

Quando $\alpha$ ha valore $1$, $\varphi$ ha valore $0$. Per l'ipotesi induttiva $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \alpha$
Quindi (variante del Teorema 2), $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$ e dunque
$B_1, B_2, ..., B_n \vdash \neg\neg\alpha$ $(MP)$. Ma $\neg\neg\alpha = \neg\varphi = \psi$

Quando $\alpha$ ha valore $0$, $\varphi$ ha valore $1$. Per l'ipotesi induttiva $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \neg\alpha$
Ma $\neg\alpha = \varphi = \psi$

Secondo caso: $\varphi = \alpha \rightarrow \beta$

Quando $\alpha$ ha valore $0$, $\varphi$ ha valore $1$. Per l'ipotesi induttiva $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \neg\alpha$
Quindi (variante del Teorema 4), $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ e dunque
$B_1, B_2, ..., B_n \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$ $(MP)$. Ma $(\alpha \rightarrow \beta) = \varphi = \psi$

Quando $\beta$ ha valore $1$, $\varphi$ ha valore $1$. Per l'ipotesi induttiva $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \beta$
Quindi $(\mathrm{Ax1})$, $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ e dunque $B_1, B_2, ..., B_n \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$ $(MP)$

Quando $\alpha$ ha valore $1$ e $\beta$ ha valore $0$, $\varphi$ ha valore $0$. Per l'ipotesi induttiva
$B_1, B_2, ..., B_n \vdash \alpha$ e $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \neg\beta$.
Quindi (Teorema 3), $B_1, B_2, ..., B_n \vdash \alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta))$ e dunque
$B_1, B_2, ..., B_n \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$ (doppio $MP$). Ma $\neg(\alpha \rightarrow \beta) = \neg\varphi = \psi$

# Completezza (3)

Per mostrare che: $\models \varphi \;\Rightarrow\; \vdash \varphi$

Se $\varphi$ è una tautologia, allora si ha $B_1, B_2, \ldots, B_n \vdash \varphi$

In particolare, considerando $A_1$, $A_1, B_2, \ldots, B_n \vdash \varphi$ e $\neg A_1, B_2, \ldots, B_n \vdash \varphi$

Quindi si ha $B_2, \ldots, B_n \vdash A_1 \rightarrow \varphi$ ($Ded$) e $B_2, \ldots, B_n \vdash \neg A_1 \rightarrow \varphi$ ($Ded$)

Dal Teorema “X”, $B_2, \ldots, B_n \vdash (\neg A_1 \rightarrow \varphi) \rightarrow ((A_1 \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$ e dunque $B_2, \ldots, B_n \vdash \varphi$ (doppio $MP$).

Iterando il procedimento per tutte le $A_i$ si ottiene $\vdash \varphi$

# Indipendenza degli schemi Ax$n$

- Insieme minimo

  Per provare la completezza di Ax$n$ sono stati usati tutti e tre gli schemi

- Indipendenza

  I tre schemi sono **logicamente indipendenti**:

  Non è possibile derivare uno di essi dai restanti due

- Esistono altre assiomatizzazioni di $L_P$

  Si può avere anche uno schema solo

  Non si può invece evitare di usare schemi di assioma

  Avendo, di fatto, un insieme di assiomi infinito

  In alternativa, si può usare un insieme finito introducendo una nuova regola di inferenza che permette di 'clonare' gli assiomi per sostituzione (cioè si tratta della stessa cosa in forma diversa)

# Teorie, teoremi, assiomatizzazione

- Teoria = insieme di fbf

  Un insieme di fbf $\Sigma$ (comunque definito) può essere detto una **teoria**

- Teoremi = insieme di fbf derivabili da un insieme di partenza

  Dato un insieme di fbf $\Gamma$, l'insieme dei **teoremi** di $\Gamma$
  è l'insieme di tutte le fbf *derivabili* a partire da $\Gamma$

  $$Teoremi(\Gamma) = \{\varphi : \Gamma \vdash \varphi\}$$

- Assiomatizzazione = insieme di fbf che riassume un'intera teoria

  Un insieme di fbf $\Gamma$ è un'**assiomatizzazione** di una teoria $\Sigma$ sse

  $$\Sigma \equiv Teoremi(\Gamma)$$

  Il sistema di assiomi $\mathrm{Ax}n$ descrive la *teoria* delle fbf *valide*
  della **logica proposizionale classica** $L_P$

  La formalizzazione di una logica basata su l'assiomatizzazione delle fbf valide
  è anche detta 'a la Hilbert'

# Proprietà delle derivazioni (*meta-teoremi*)

- *Monotonia sintattica*

  Dati $\Gamma$ e $\Delta$, se $\Gamma \vdash \varphi$ allora $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$

  Qualsiasi derivazione di $\varphi$ da $\Gamma$ rimane valida anche estendendo $\Gamma$

- *Compattezza sintattica*

  Se $\Gamma \vdash \varphi$ allora esiste un insieme $\Sigma$ **finito**, con $\Sigma \subseteq \Gamma$, per cui $\Sigma \vdash \varphi$

  Una derivazione di $\varphi$ da $\Gamma$ prevede un numero *finito* di passi, quindi può coinvolgere al più un numero *finito* di fbf in $\Gamma$

- *Transitività*

  Se per ogni $\varphi \in \Sigma$ si ha che $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Sigma \vdash \psi$ allora $\Gamma \vdash \psi$

  Basta applicare ripetutamente il teorema di deduzione ed il $MP$

# Proprietà delle derivazioni *(meta-teoremi)*

- *Correttezza*

  Le fbf $\varphi$ *derivabili* da un insieme di fbf $\Gamma$ sono una *conseguenza logica* di $\Gamma$

  $$\Gamma \vdash \varphi \;\Rightarrow\; \Gamma \models \varphi$$

- *Coerenza sintattica*

  Un insieme $\Gamma$ è coerente se da $\Gamma$ non è derivabile qualsiasi $\varphi$

  Si veda il Teorema 3: da una contraddizione si deriva qualsiasi fbf

  Inoltre, per la correttezza, solo le conseguenze logiche sono derivabili

- *Riduzione all'assurdo* (refutazione)

  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ è incoerente $\Leftrightarrow$ $\Gamma \vdash \varphi$

  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ è incoerente significa che, per qualsiasi $\psi$, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$

  In particolare, si ha anche $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$

  Per il teorema di deduzione $\Gamma \vdash \neg\varphi \to \varphi$

  Dal Teorema 5 $\Gamma \vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$

  Applicando il $MP$ $\Gamma \vdash \varphi$

# Proprietà delle derivazioni (*meta-teoremi*)

- *Coerenza equivale a soddisfacibilità*

  Un insieme $\Gamma$ è *soddisfacibile* se è *coerente*

  Se $\Gamma$ fosse incoerente, sarebbe possibile derivare una contraddizione (Teorema 3)

  Ma allora la derivazione sarebbe *scorretta*, in quanto una contraddizione non può essere la conseguenza logica di un insieme $\Gamma$ soddisfacibile

  Un insieme $\Gamma$ *coerente* è *soddisfacibile*

  (Vedi testo)

- *Compattezza semantica*

  Considerando un $\Gamma$ qualsiasi (anche infinito)

  $\Gamma \models \varphi \Rightarrow$ Esiste un insieme *finito* $\Sigma \subseteq \Gamma$ tale per cui $\Sigma \models \varphi$

  (Vedi testo)

# Completezza Forte

- *Completezza forte (strong completeness)*

  Le *conseguenze logiche* di un $\Gamma$ qualsiasi (anche infinito) sono *derivabili*

  $$\Gamma \models \varphi \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash \varphi$$

  Si consideri un insieme finito qualsiasi $\Sigma$ tale per cui $\Sigma \models \varphi$

  Si consideri il problema $\Sigma \vdash \varphi$ e si applichi ripetutamente il teorema di deduzione fino a 'trasportare' le fbf in $\Sigma$ a destra di $\vdash$

  Utilizzando il duale semantico del teorema di deduzione, ci si riporta al caso della completezza rispetto alle tautologie

  Per la compattezza semantica, si ha che un simile $\Sigma$ esiste sempre