Soddisfacibilità e *Algoritmi*

Marco Piastra

Problemi e decidibilità (automatica)

- Problema

  Un problema è una **relazione** tra *istanze* (input) e *soluzioni*

  $K : \mathrm{I} \rightarrow \mathrm{S}$ (K è la relazione, I è lo spazio delle istanze - o input, S quello delle soluzioni)

- Problema di *ricerca*

  La relazione K associa ciascuna *istanza* a un numero qualsiasi di soluzioni

  Problemi di *ottimizzazione*

  Esiste una funzione costo

  $c : \mathrm{S} \rightarrow \boldsymbol{R}$ (dalle soluzioni S a $\boldsymbol{R}$, l'insieme dei numeri reali)

  Si tratta di trovare la soluzione valida a *costo* minimo o massimo

- Problema di decisione

  L'insieme delle soluzioni S coincide con $\{0, 1\}$ e la soluzione è unica

  Esempio: $\Gamma \models \varphi$?

  L'insieme I è formato da tutti i possibili insiemi di fbf Γ e tutte le possibili fbf φ

Problemi e decidibilità (automatica)

- Problema *decidibile*

  E' un problema di *decisione* per cui esiste una *procedura effettiva* o *algoritmo* che calcola la risposta corretta (per qualsiasi input)

  - Vale a dire se esiste una macchina di Turing in grado di calcolare sempre la risposta

    (Vi sono altri modi di definire una procedura effettiva, tutti equivalenti)

  Esempio di problema *indecidibile*

  Data una macchina di Turing e lo stato iniziale del nastro, l'esecuzione è terminante?

  In altri termini, esiste una macchina di Turing che, data la tabella di transizione e l'input di un'(altra) macchina di Turing, è in grado di dire se l'esecuzione termina?

  La risposta è no (non esiste una simile macchina di Turing)

- Problemi di decisione come problemi di ricerca

  Un problema di decisione può essere definito come un problema di ricerca

  Esempio: esiste in un grafo un cammino da un nodo a a un nodo b?

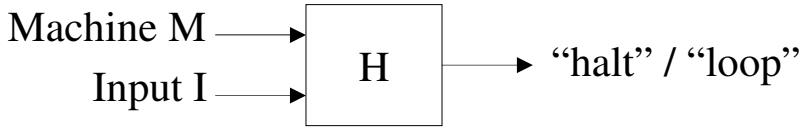
  Problemi di decisione come problemi di ottimizzazione

  Esempio: esiste in un grafo un cammino da un nodo a a un nodo b che abbia lunghezza $< d$?

Digressione: *Halting Problem*

- Idea intuitiva della dimostrazione

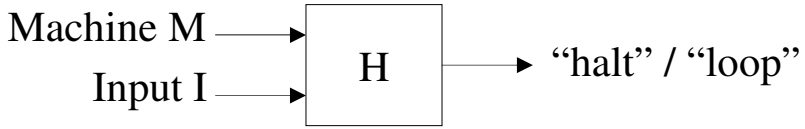
  Dovrebbe esistere una macchina di Turing H che, data la tabella di transizione M e l'input I di una qualsiasi macchina di Turing, termina producendo un output "halt" o "loop" a seconda del fatto che M termini o meno con input I



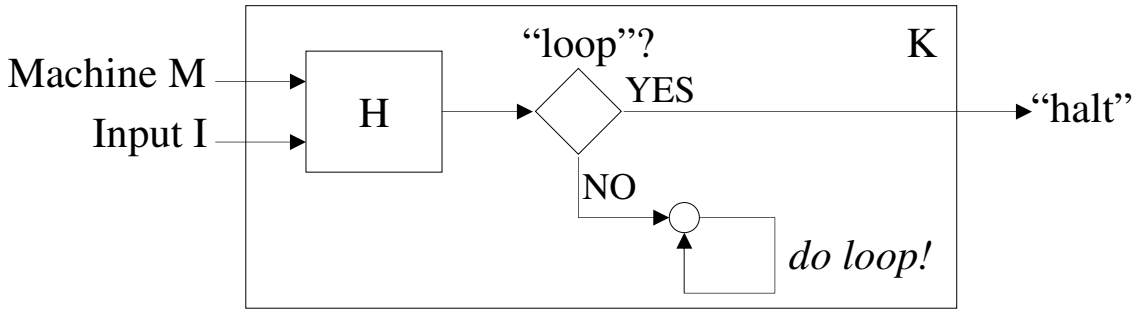
Digressione: *Halting Problem*

- Idea intuitiva della dimostrazione

  Dovrebbe esistere una macchina di Turing H che, data la tabella di transizione M e l'input I di una qualsiasi macchina di Turing, termina producendo un output "halt" o "loop" a seconda del fatto che M termini o meno con input I



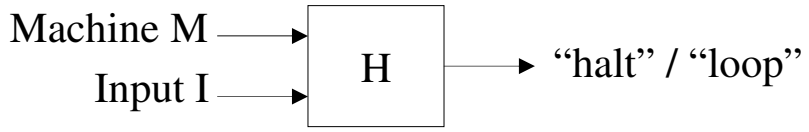
  Se la macchina H esistesse, si potrebbe costruire una macchina K che va in loop quando l'ouput di H è "halt" e che invece termina producendo "halt" quando H produce "loop"



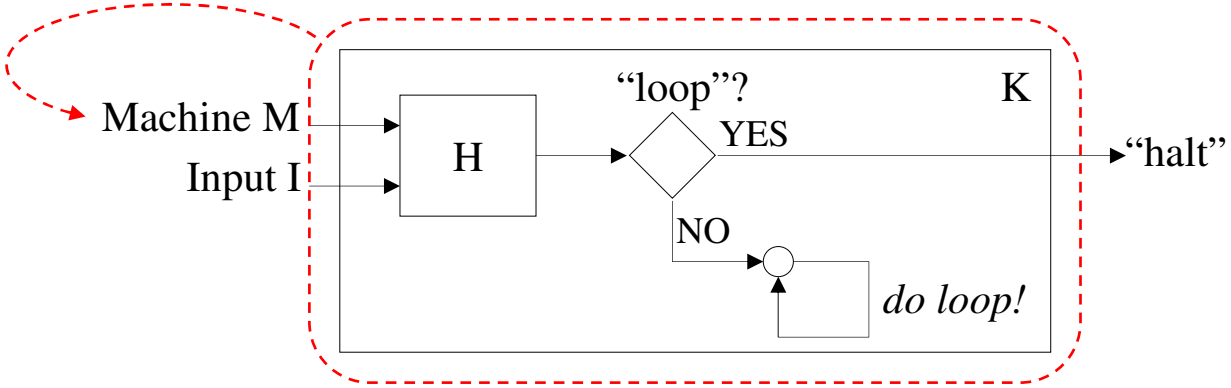
Digressione: *Halting Problem*

- Idea intuitiva della dimostrazione

  Dovrebbe esistere una macchina di Turing H che data la tabella di transizione M e l'input I
  di una qualsiasi macchina di Turing, termina producendo un output "halt" o "loop"
  a seconda del fatto che M termini o meno con input I



  Se la macchina H esistesse, si potrebbe costruire una macchina K che va in loop
  quando l'ouput di H è "halt" e che invece termina producendo "halt" quando H produce "loop"

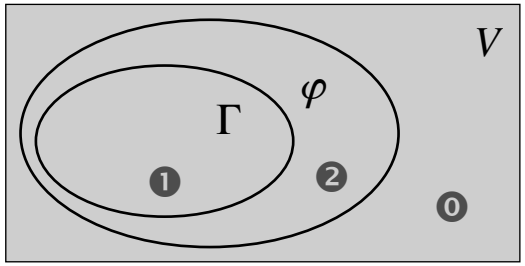


  L'assurdo si ottiene per 'corto circuito', ponendo K come input di se stessa:
  K con input I dovrebbe divergere quando K con input I converge e viceversa

Conseguenza logica come soddisfacibilità

- Il problema $\Gamma \models \varphi$ può essere trasformato in un problema di **soddisfacibilità**

E' facile vedere che $\Gamma \models \varphi$ sse $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ è insoddisfacibile



(Nell'algebra dei sottoinsiemi di interpretazioni)

$\Gamma \models \varphi \Rightarrow v(\Gamma) \subseteq v(\{\varphi\})$ $\quad$ ❶ ⊆ {❶, ❷}

$v(\{\neg\varphi\}) = ❼$

$v(\Gamma \cup \{\neg\varphi\}) = v(\Gamma) \cap v(\{\neg\varphi\})$

$v(\Gamma \cup \{\neg\varphi\}) = \varnothing$ $\quad$ ❶ ∩ ❼ = ∅

Inoltre, l'insieme $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ è soddisfacibile sse $\bigwedge(\Gamma \cup \{\neg\varphi\})$ lo è

(chiusura congiuntiva di tutte le fbf dell'insieme)

Morale:

Il problema $\Gamma \models \varphi$ può essere trasformato

nel problema di stabilire se $\bigwedge(\Gamma \cup \{\neg\varphi\})$ è *soddisfacibile*

Soddisfacibilità (in L_P)

- La soddisfacibilità di una fbf φ è decidibile?

  E' un problema di decisione definito come problema di ricerca:

  Esiste un'interpretazione che soddisfa φ?

  L'insieme degli input è formato da tutte le possibili fbf φ

  In letteratura, il problema è denominato SAT

  Intuitivamente: basta provare tutte i possibili valori di verità dei simboli proposizionali in φ

Soddisfacibilità (in L_P)

- La soddisfacibilità di una fbf φ è decidibile?

  E' un problema di decisione definito come problema di ricerca:

  Esiste un'interpretazione che soddisfa φ?

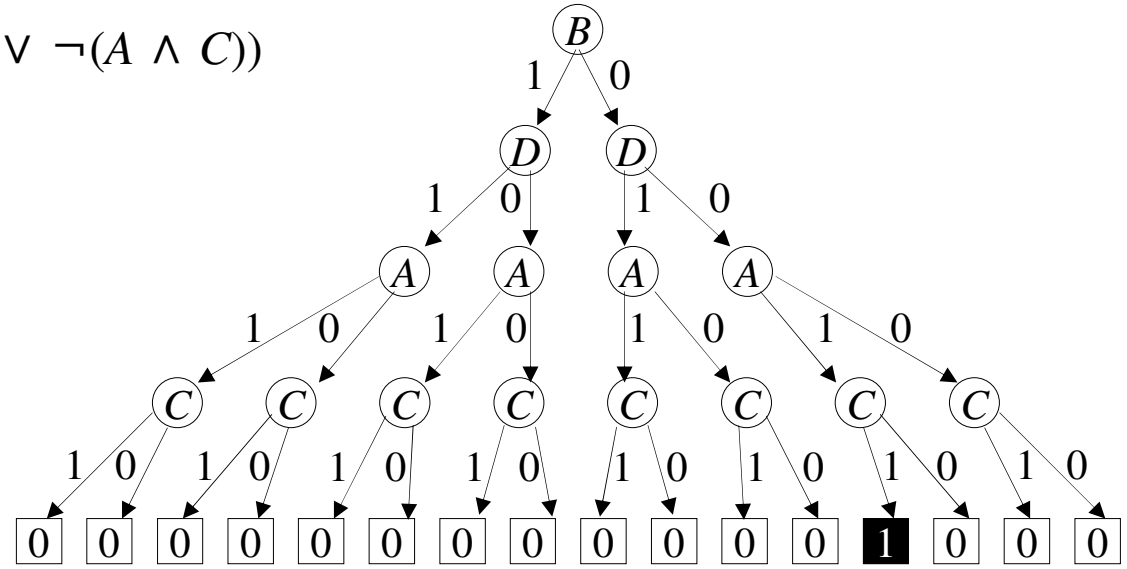
  L'insieme degli input è formato da tutte le possibili fbf φ

  In letteratura, il problema è denominato SAT

  Intuitivamente: basta provare tutte i possibili valori di verità dei simboli proposizionali in φ

Esempio:

$\neg(B \vee D \vee \neg(A \wedge C))$



La procedura ha complessità $O(2^n)$, pari al numero di assegnazioni da provare

Forme normali

= Traduzione di una fbf qualsiasi in una fbf logicamente equivalente

Le fbf in forma normale, in generale, hanno una struttura particolare

- **Forma normale congiuntiva** (FNC)

  Una fbf in cui ∧ appare solo al livello più esterno

  $$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$$

  dove α_i sono fbf in cui compaiono solo ∨ e ¬
  (¬ compare solo davanti ai simboli proposizionali)

  Esempi:

  $$(B \vee D) \wedge (A \vee \neg C) \wedge C$$
  $$(B \vee \neg A \vee \neg C) \wedge (\neg D \vee \neg A \vee \neg C)$$

- **Forma normale disgiuntiva** (FND)

  Come la precedente, ma si scambiano i ruoli di ∨ e ∧:

  $$\beta_1 \vee \beta_2 \vee \ldots \vee \beta_n$$

  dove β_i sono fbf in cui compaiono solo ∧ e ¬
  (¬ compare solo davanti ai simboli proposizionali)

Forma normale congiuntiva

- Traduzione automatica in FNC

  Applicazione esaustiva delle seguenti regole:

  1) Si eliminano $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ in base alle regole di riscrittura

  2) Si muove $\neg$ all'interno

  con le "leggi De Morgan": $\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

  $\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

  3) Si eliminano le doppie negazioni $\neg$

  4) Si distribuisce $\vee$

  proprietà distributiva di $\vee$: $((\varphi \wedge \psi) \vee \chi) \Leftrightarrow ((\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi))$

Esempi:

$(\neg B \rightarrow D) \vee \neg(A \wedge C)$

$B \vee D \vee \neg(A \wedge C)$ (eliminazione di $\rightarrow$)

$B \vee D \vee \neg A \vee \neg C$ (De Morgan)

$\neg(B \rightarrow D) \vee \neg(A \wedge C)$

$\neg(\neg B \vee D) \vee \neg(A \wedge C)$ (eliminazione di $\rightarrow$)

$(B \wedge \neg D) \vee (\neg A \vee \neg C)$ (De Morgan)

$(B \vee \neg A \vee \neg C) \wedge (\neg D \vee \neg A \vee \neg C)$ (distribuzione di $\vee$)

Algoritmo DPLL (Davis-Putnam-Logemann-Loveland)

DPLL(φ, s)
input : Una fbf φ in FNC e un'assegnazione s (inizialmente vuota)
output : FAILURE o un'assegnazione s che soddisfa φ
begin
if φ contiene una clausola vuota **then return** FAILURE
if φ è vuota **then return** s
$\alpha \leftarrow$ il primo simbolo proposizionale di φ non assegnato in s
if (r = DPLL(Replace(φ, $\{\alpha = 1\}$), $s \cup \{\alpha = 1\}$)) != FAILURE
then return r
else return DPLL(Replace(φ, $\{\alpha = 0\}$), $s \cup \{\alpha = 0\}$)
end

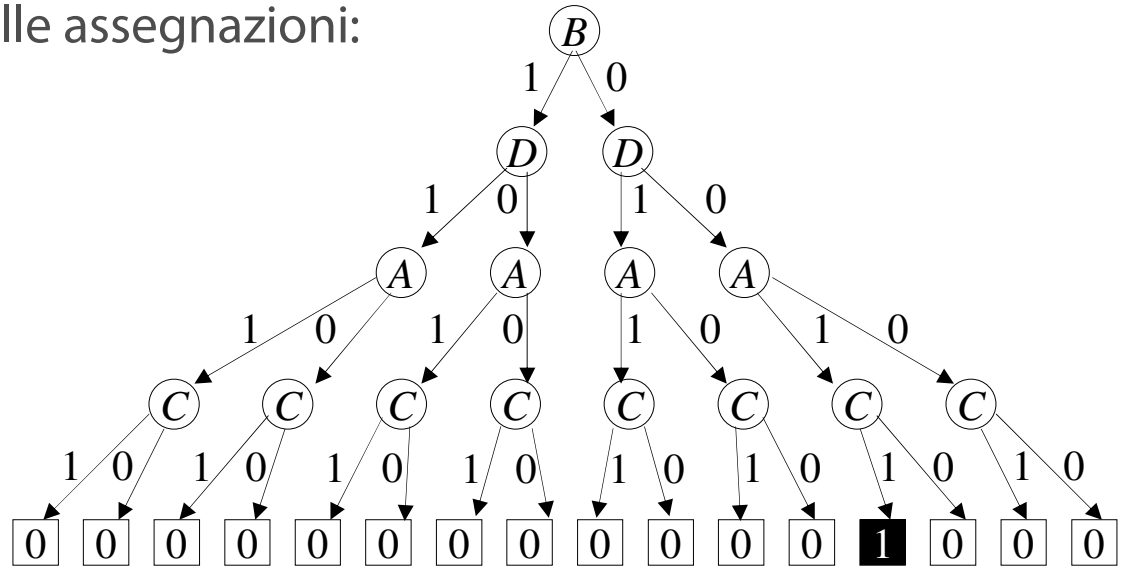
sub Replace(φ, $\{\alpha = v\}$)
begin
sostituisci tutte le occorrenze di α in φ con v
sostituisci tutte le occorrenze di $\neg 1$ con 0 e di $\neg 0$ con 1
rimuovi tutte le clausole di φ che contengono almeno un 1
rimuovi tutte le occorrenze di 0
end

Algoritmo DPLL (Davis-Putnam-Logemann-Loveland)

Esempio:

$$\neg(B \wedge D \wedge \neg(A \wedge C))$$
$$(\neg B \vee \neg D \vee (A \wedge C))$$

Struttura delle assegnazioni:



Se l'esempio fosse stato
$(\neg B \wedge \neg D \wedge \neg A \wedge \neg C)$
l'algoritmo si sarebbe fermato qui

Complessità di calcolo, classi P e NP

Il concetto di applica solo ai *problemi decidibili*

Si considera la *miglior* macchina di Turing (conosciuta) che calcola la risposta

- Complessità di tempo

  Il numero di *passi* necessari alla macchina di Turing per calcolare la risposta, in funzione delle dimensioni dell'input

- Complessità di memoria

  Il numero di *celle del nastro* necessarie alla macchina di Turing per calcolare la risposta, in funzione delle dimensioni dell'input

- Classe P

  Tutti i problemi per cui è nota una procedure effettiva con complessità di *tempo* $O(\mathrm{P}(n))$

  Dove $\mathrm{P}(\ )$ è un polinomio di grado qualsiasi (finito) e n è la dimensione dell'input

- Classe NP

  Tutti i problemi decidibili per cui esiste (almeno):

  a) Una procedura che enumera tutte le possibili risposte (enumerabilità ricorsiva)

  b) Una procedura con complessità P che **verifica** se una risposta è una soluzione

  Include tutti i problemi della classe P (vale a dire $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$)

  Include anche problemi per cui non è nota una procedura con complessità P

La classe NP-complete ed il problema SAT

- Classe NP-complete

  E' una sottoclasse di NP (NP-complete $\subseteq$ NP)

  Un problema K è NP-complete se tutti i problemi di NP sono **riducibili** a K

- Riducibilità

  Nel caso della classe NP-complete

  Si consideri un problema K e si supponga di avere una procedura di decisione $p(K)$

  Un problema J è **riducibile** a K se esiste una procedura $p(J)$ di decisione per J che:

  a) Chiama una volta sola, alla fine, $p(K)$ come "subroutine"

  b) Ha una complessità di tempo polinomiale (trascurando la complessità di $p(K)$)

- Il problema SAT

  E' NP-complete

  Morale: se esistesse una procedura per SAT con complessità polinomiale, si avrebbe

  P = NP

  E' un fatto non noto, si suppone di no: P $\neq$ NP

Semantic Tableau, regole alfa e beta

- Un tableau è un'insieme di fbf

  Le regole (alfa e beta) trasformano un tableau in uno o due nuovi tableau

  Si parte da un tableau iniziale

- Regole alfa (o di espansione)

(a1)	(a2)	(a3)	(a4)
$\neg(\neg\varphi)$	$\varphi \wedge \psi$	$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\neg(\varphi \rightarrow \psi)$
φ	φ, ψ	$\neg\varphi, \neg\psi$	$\varphi, \neg\psi$

- Regole beta (o di biforcazione)

(b1)	(b2)	(b3)	(b4)	(b5)
$\varphi \vee \psi$	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\varphi \rightarrow \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$	$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$
φ | ψ	$\neg\varphi$ | $\neg\psi$	$\neg\varphi$ | ψ	$\neg\varphi, \neg\psi$ | φ, ψ	$\neg\varphi, \psi$ | $\varphi, \neg\psi$

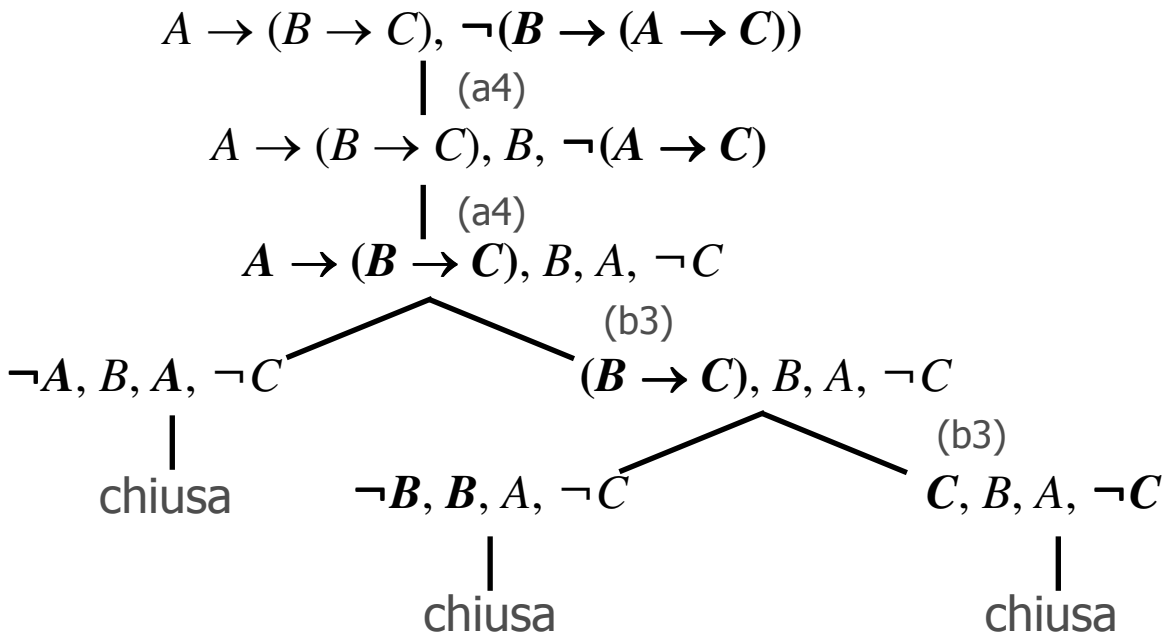
Esempio del metodo dei *Semantic Tableau*

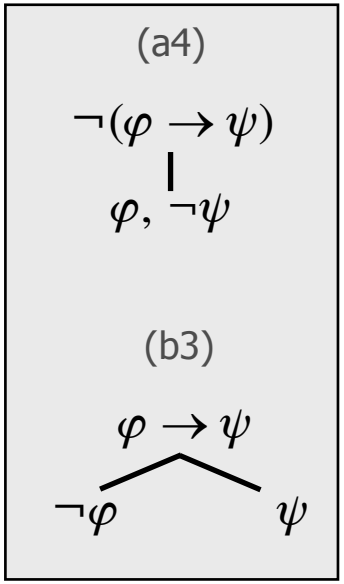
- Obiettivo: decidere se $\Gamma \models \varphi$

  Esempio: mostrare che $A \rightarrow (B \rightarrow C) \models B \rightarrow (A \rightarrow C)$

- Espansione

  Per definizione, il tableau iniziale deve essere $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$





Algoritmo: costruzione dei *Semantic Tableau*

- Procedura:

Dato il problema $\Gamma \models \varphi$

E' un metodo per **refutazione**:
- si assume $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ come nodo *(tableau)* iniziale
- lo scopo è provare che $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ è **insoddisfacibile**

Per ciascun tableau attivo:

- Se il tableau contiene solo letterali,
  se il tableau contiene una contraddizione, chiudere
  altrimenti terminare la procedura [tableau aperto = fallimento]
- Se il tableau contiene formule composite:
  a) applicare le regole alfa
  b) applicare le regole beta

Notare: le regole alfa vengono applicate prima delle regole beta

Proprietà del metodo dei *Semantic Tableau*

- **Terminante**

  Le regole alfa e beta semplificano progressivamente le formule contenute nei tableau

  Ad un certo punto restano solo letterali in forma positiva o negata (del tipo A oppure $\neg A$)

- **Corretto (*Sound*)**

  Ogni tableau $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ per cui il metodo termina con successo
  (tutti i tableau terminali sono *chiusi*) è effettivamente *insoddisfacibile*

- **Completo**

  Per qualsiasi tableau $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *insoddisfacibile,* il metodo termina con successo
  (tutti i tableau terminali sono *chiusi*)

- **Correttezza + Completezza = Procedura di Decisione**

  Il metodo a tableau è una procedura di decisione per la logica proposizionale

Quale metodo è più veloce?

- Complessità asintottica

  E' la stessa: $O(2^n)$

- In pratica?

  Dipende

  Esempio 1:

  $$A \wedge B \wedge C \wedge \neg A$$

  Con il metodo dei valori di verità si effettuano $2^3 = 8$ prove

  Con il metodo dei tableau si applicano 3 regole alfa e si ottiene un tableau chiuso

  Esempio 2:

  $$(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$$

  Con il metodo dei valori di verità si effettuano $2^2 = 4$ prove

  Con il metodo dei tableau si applicano 3 regole alfa
  poi l'applicazione delle regole beta produce un albero a 4 livelli,
  ciascuno con un fattore di branching 2

  Si ottengono così $2^4 = 16$ tableau, tutti chiusi