

# Logica Proposizionale

## Introduzione

Marco Piastra

# Algebre di Boole

## ▪ Definizione astratta

*Un reticolo distributivo dotato di complemento*

Una struttura  $\langle X, \cup, \cap, ^c, \top, \perp \rangle$  dove:

$X$  è un insieme

$\cup, \cap$  e  $^c$  sono operatori definiti su  $U$

$\top$  e  $\perp$  sono due elementi speciali

Valgono le seguenti proprietà di base (per qualsiasi  $A, B, C \in X$ ):

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup A^c = \top, \quad A \cap A^c = \perp$$

*associatività*

*commutatività*

*assorbimento*

*distributività*

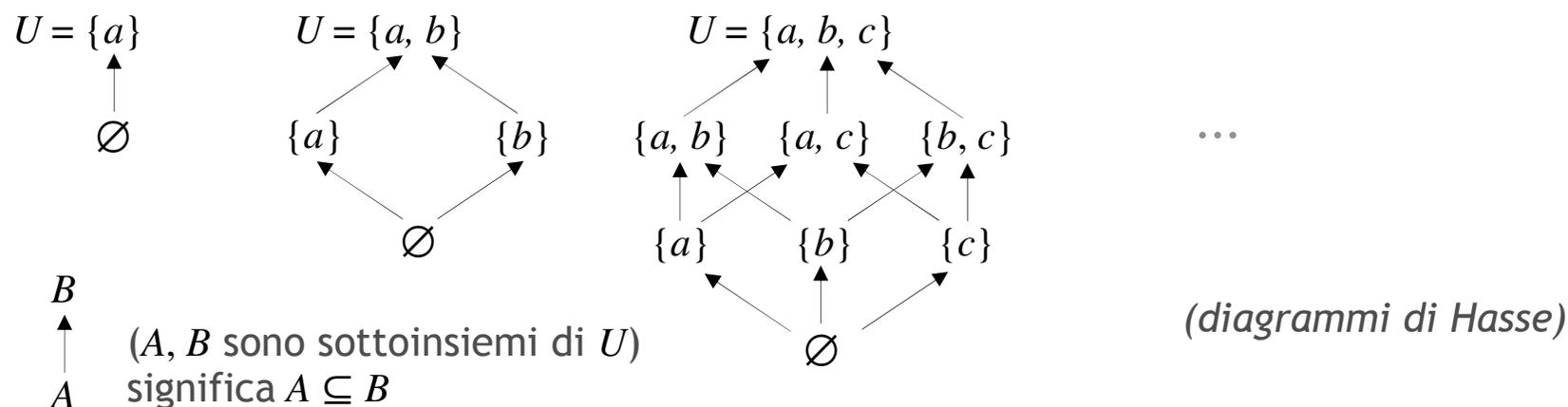
*complemento*

# Esempi di algebre di Boole

- Definizione costruttiva (un esempio notevole):

Si parte da un'insieme di oggetti  $U$

Si definisce  $X$  come la collezione di tutti i sottoinsiemi di  $U$   
(viene detto anche **insieme delle parti**,  $2^U$ )



Gli operatori  $\cup$ ,  $\cap$  e  $^c$  sono *unione*, *intersezione* e *complemento*

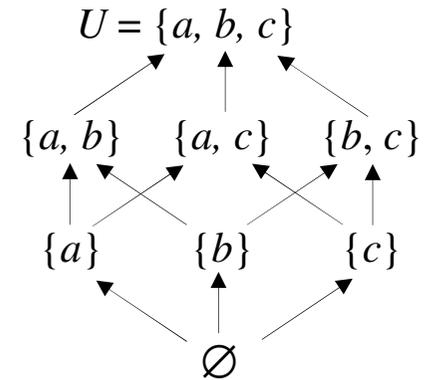
Tutte le strutture così costruite sono algebre di Boole

# Esempi di algebre di Boole

- Definizione costruttiva (un esempio notevole):

Si parte da un'insieme di oggetti  $U$

Si definisce  $X$  come la collezione di tutti i sottoinsiemi di  $U$   
(viene detto anche **insieme delle parti**,  $2^U$ )



Verifica diretta delle proprietà (per qualsiasi  $A, B, C \subseteq U$ ):

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup A^c = U, \quad A \cap A^c = \emptyset$$

*associatività*  
*commutatività*  
*assorbimento*  
*distributività*  
*complemento*

$$A \cup A^c = U$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

...

$$A = \{a\}$$

$$A = \{b\}$$

$$A^c = \{b, c\}$$

$$B = \{c\}$$

$$A \cup A^c = \{a, b, c\} = U$$

$$A \cup B = \{b, c\}$$

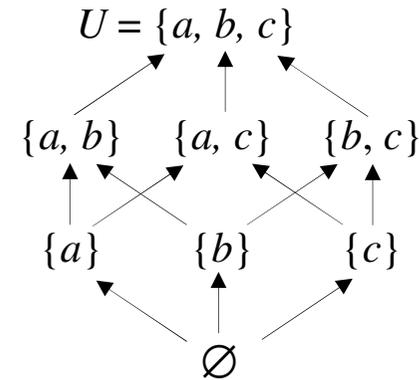
$$A \cap (A \cup B) = \{b\}$$

# Esempi di algebre di Boole

## ■ Definizione costruttiva (un esempio notevole):

Si parte da un'insieme di oggetti  $U$

Si definisce  $X$  come la collezione di tutti i sottoinsiemi di  $U$   
(viene detto anche **insieme delle parti**,  $2^U$ )



Altre identità dimostrabili:

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$$

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap U = A, \quad A \cup U = U, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$U^c = \emptyset, \quad \emptyset^c = U, \quad (A^c)^c = A$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$A = \{b\}$$

$$A^c = \{a, c\}$$

$$B = \{b, c\}$$

$$B^c = \{a\}$$

$$A \cup B = \{b, c\}$$

$$(A \cup B)^c = \{a\}$$

$$A^c \cap B^c = \{a\}$$

*idempotenza*

*elementi neutri*

*leggi di De Morgan*

*Questa  $A^c \cup B = U$*

*NON è valida*

*in generale!*

$$A = \{a\}$$

$$A^c = \{b, c\}$$

$$B = \{b\}$$

$$A^c \cup B = \{b, c\}$$

*Sarebbe valida*

*se  $A \subseteq B$*

# Quale algebra di Boole?

\* Se tutte le strutture algebriche di Boole sono equivalenti (*nel senso descritto*) tanto vale considerare quindi l'algebra più semplice:  $\{U, \emptyset\}$

Un algebra a due valori: {tutto, niente} oppure {vero e falso} oppure  $\{T, \perp\}$

## ▪ Notazione

Si indicano  $U$  con 1 (vero) e  $\emptyset$  con 0 (falso)

Si sostituiscono i simboli delle operazioni  $\cup$ ,  $\cap$  e  $^c$  con  $\vee$ ,  $\wedge$  e  $\neg$

## ▪ **Funzioni booleane** e *tavole di verità (truth tables)*

Gli operatori  $\vee$ ,  $\wedge$  e  $\neg$  sono *funzioni booleane*

*Funzione booleana*: funzione a  $n$  argomenti del tipo  $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$

OR

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

AND

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

NOT

A	$\neg A$
0	1
1	0

# Funzioni composite

## Il metodo delle tavole di verità

Può essere esteso alle funzioni comunque composite

Ad esempio per verificare le leggi dell'algebra di Boole

*1a legge di  
De Morgan*

$A$	$B$	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

Le due colonne  
sono identiche

# Basi adeguate

- Quante funzioni booleane elementari occorrono per rappresentare tutte le possibili funzioni booleane?

	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
$2^n$ righe ↑ ↓	0	0	...	0	$f_1$
	0	0	...	1	$f_2$
	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...
	1	1	...	1	$f_{2^n}$

Le tre funzioni  $\vee$ ,  $\wedge$  e  $\neg$  formano una base adeguata

La tavola di verità può essere riscritta come espressione composta:

- per ciascuna riga  $r$  in cui  $f_r = 1$ , si combinano con  $\wedge$  le  $n$  lettere  $A_1, A_2, \dots, A_n$  prendendo  $A_i$  se lo  $i$ -esimo valore è vale 1 e  $\neg A_i$  se vale 0
- si aggregano in  $\vee$  tutte le combinazioni ottenute al passo precedente

# Altre operazioni logiche

Anche  $\{\vee, \neg\}$  o  $\{\wedge, \neg\}$  sono basi adeguate

Una base adeguata è costituita anche dal solo *NOR* o dal solo *NAND*:

<i>A</i>	<i>B</i>	$\neg(A \vee B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

<i>A</i>	<i>B</i>	$\neg(A \wedge B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

## ■ Implicazione ed equivalenza

I logici preferiscono usare come base  $\{\rightarrow, \neg\}$

<i>A</i>	<i>B</i>	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

<i>A</i>	<i>B</i>	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

*Identità notevoli*       $A \rightarrow B = \neg A \vee B$

$A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

# Logica proposizionale

*La più semplice in assoluto*

## ■ Rappresentazione del mondo (o meglio di *un* mondo)

Un mondo descritto tramite frasi affermative (**proposizioni**)

“La terra è rotonda”

“I tacchini sono bipedi con le piume”

“Gli unicorni sono creature fantastiche”

**Fondamentale:** si assume che ciascuna affermazione possa essere solo *vera* o *falsa*

## ■ Linguaggio formale

Il linguaggio usa le **proposizioni** come elementi *atomici*

(i.e. la struttura interna di ciascuna affermazione viene persa)

Le formule composite sono ottenute componendo proposizioni con gli operatori booleani

## ■ Semantica formale

Intuitivamente, descrive il rapporto tra le formule e le situazioni effettive

In logica proposizionale, in una situazione effettiva:

- ciascuna proposizione atomica è *vera* o *falsa* (*valore di verità*)
- il valore delle formule composite si determina a partire dai valori atomici tramite le regole degli *operatori booleani* (*vero-funzionalità*)

# Linguaggio proposizionale

*Come descriviamo il mondo*

- Linguaggio logico proposizionale  $L_P$

Un insieme  $P$  di simboli proposizionali:  $P = \{A, B, C, \dots\}$

Due **connettivi** principali:  $\neg, \rightarrow$

Tre **connettivi** derivati:  $\wedge, \vee, \leftrightarrow$

Le parentesi:  $(, )$

- Formule ben formate (**fbf**)

Regole sintattiche per la composizione

L'insieme di tutte le **fbf** di  $L_P$  si indica con  $\text{fbf}(L_P)$

$A \in P \Rightarrow A \in \text{fbf}(L_P)$

$\varphi \in \text{fbf}(L_P) \Rightarrow (\neg\varphi) \in \text{fbf}(L_P)$

$\varphi, \psi \in \text{fbf}(L_P) \Rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \in \text{fbf}(L_P)$

$\varphi, \psi \in \text{fbf}(L_P) \Rightarrow (\varphi \vee \psi) \in \text{fbf}(L_P), \quad (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow ((\neg\varphi) \rightarrow \psi)$

$\varphi, \psi \in \text{fbf}(L_P) \Rightarrow (\varphi \wedge \psi) \in \text{fbf}(L_P), \quad (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi)))$

$\varphi, \psi \in \text{fbf}(L_P) \Rightarrow (\varphi \leftrightarrow \psi) \in \text{fbf}(L_P), \quad (\varphi \leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$

Non ci sono regole di precedenza: si usano le parentesi

# Interpretazioni

## ■ Strutture e formule composite

Data una struttura proposizionale  $\langle \{0,1\}, P, v \rangle$

la funzione  $v : P \rightarrow \{0,1\}$  può essere estesa a fbf qualsiasi

Tramite le funzioni base dell'algebra di Boole:

$$v(\neg\varphi) = \text{NOT } v(\varphi)$$

$$v(\varphi \wedge \psi) = v(\varphi) \text{ AND } v(\psi)$$

$$v(\varphi \vee \psi) = v(\varphi) \text{ OR } v(\psi)$$

$$v(\varphi \rightarrow \psi) = (\text{NOT } v(\varphi)) \text{ OR } v(\psi)$$

$$v(\varphi \leftrightarrow \psi) = ((\text{NOT } v(\varphi)) \text{ OR } v(\psi)) \text{ AND } (v(\varphi) \text{ OR } (\text{NOT } (v(\psi))))$$

## ■ Interpretazioni

La funzione  $v$  (così estesa) assegna un valore di verità a tutte le fbf di  $L_P$

$$v : \text{fbf}(L_P) \rightarrow \{0,1\}$$

Si dice che  $v$  è un'**interpretazione** di  $L_P$

Il valore delle fbf composite è univocamente determinato dal valore nei simboli nella *segnatura*  $P$

Per brevità, il riferimento all'intera struttura proposizionale si omette e si cita solo  $v$

# Strutture semantiche proposizionali

*Cosa vogliamo rappresentare*

Il mondo descritto da una struttura  $\langle \{0,1\}, \mathbf{P}, \nu \rangle$

$\{0,1\}$  è l'insieme dei valori di verità

$\mathbf{P}$  è un'insieme di simboli proposizionali (**segnatura**)

$\nu$  è una *funzione*:  $\mathbf{P} \rightarrow \{0,1\}$  che assegna valori di verità ai simboli proposizionali

Simboli proposizionali

Ciascuno indica una frase affermativa (**proposizioni**)

Per convenzione usiamo i simboli  $A, B, C, D, \dots$

Non è necessario che  $\mathbf{P}$  sia un'insieme finito

## Mondi possibili

Possiamo considerare diverse strutture:

$\langle \{0,1\}, \mathbf{P}, \nu \rangle$

$\langle \{0,1\}, \mathbf{P}, \nu' \rangle$

$\langle \{0,1\}, \mathbf{P}, \nu'' \rangle$

...

Notare che le strutture condividono i simboli  $\mathbf{P}$  e l'insieme dei valori di verità  $\{0,1\}$

Differiscono solo per le funzioni  $\nu$ : i valori di verità assegnati sono in generale diversi

Descrizione di mondi possibili *diversi* tramite la stessa *segnatura*

# Soddisfacimento, modelli

## ■ Interpretazioni e tavole di verità

Esempio:  $\varphi = (A \vee B) \wedge C$

Righe diverse

interpretazioni diverse

(mondi diversi)

Nota bene: ciascuna

interpretazione

assegna un valore

a tutte le fbf di  $L_P$

	$A$	$B$	$C$	$A \vee B$	$(A \vee B) \wedge C$
$v_1$	0	0	0	0	0
$v_2$	0	0	1	0	0
$v_3$	0	1	0	1	0
$v_4$	0	1	1	1	1
$v_5$	1	0	0	1	0
$v_6$	1	0	1	1	1
$v_7$	1	1	0	1	0
$v_8$	1	1	1	1	1

Un'interpretazione  $v$  **soddisfa** una fbf  $\varphi$  sse  $v(\varphi) = 1$

Si può scrivere anche  $v \models \varphi$

Nella tavola di verità, le righe evidenziate corrispondono alle interpretazioni che soddisfano  $\varphi$

Si dice anche che  $v$  è un **modello** di  $\varphi$

Per estensione, si dice che  $v$  soddisfa (è un modello di) un insieme di fbf

$\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$  sse  $v$  soddisfa (è un modello di) tutte le fbf  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$

Si può scrivere anche  $v \models \Gamma$

# Tautologie, contraddizioni

## ■ Una tautologia

È una fbf soddisfatta da tutte le interpretazioni

Si dice anche fbf **valida**

Qualsiasi fbf del tipo  $\varphi \vee \neg\varphi$  è una tautologia

A	$A \wedge \neg A$	$A \vee \neg A$
0	0	1
1	0	1

## ■ Una contraddizione

È una fbf insoddisfacibile, (che non può essere soddisfatta da alcuna interpretazione)

Qualsiasi fbf del tipo  $\varphi \wedge \neg\varphi$  è una contraddizione

A	B	$(\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee A)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Notare:

■ Non tutte le fbf sono tautologie o contraddizioni

■ Se  $\varphi$  è una tautologia  $\neg\varphi$  è una contraddizione e viceversa

A	B	$\neg((\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee A))$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

# Formule e sottoinsiemi

- Si consideri l'insieme  $V$  di tutte le possibili interpretazioni  $v$

Ciascuna **fbf** di  $L_p$  corrisponde a un **sottoinsieme** di  $V$

Il sottoinsieme delle interpretazioni  $v$  che la soddisfano

Ad esempio, a  $\varphi$  corrisponde  $\{v : v(\varphi) = 1\}$  (si scrive anche  $\{v : v \models \varphi\}$ )

Il sottoinsieme potrebbe essere vuoto (se  $\varphi$  è una contraddizione)  
o coincidente con  $V$  (se  $\varphi$  è una tautologia)

Insieme di tutte le possibili  
**interpretazioni**  
(o mondi possibili)



# Formule e sottoinsiemi

- Si consideri l'insieme  $V$  di tutte le possibili interpretazioni  $v$

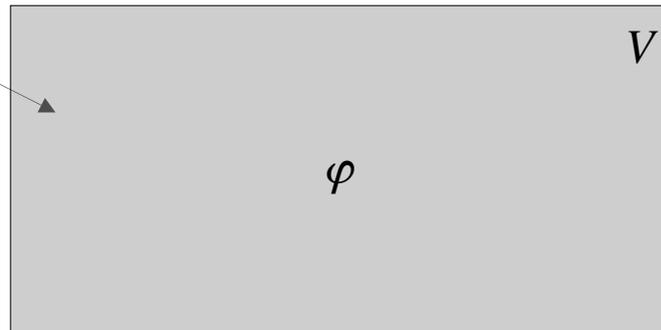
Ciascuna **fbf** di  $L_p$  corrisponde a un **sottoinsieme** di  $V$

Il sottoinsieme delle interpretazioni  $v$  che la soddisfano (modelli di  $\varphi$ )

Ad esempio, a  $\varphi$  corrisponde  $\{v : v(\varphi) = 1\}$  (si scrive anche  $\{v : v \models \varphi\}$ )

Il sottoinsieme potrebbe essere vuoto (se  $\varphi$  è una contraddizione)  
o coincidente con  $V$  (se  $\varphi$  è una tautologia)

Insieme di tutte le possibili  
**interpretazioni**  
(o mondi possibili)



“ $\varphi$  è una tautologia”

“qualsiasi interpretazione in  $V$   
è un modello di  $\varphi$ ”

“ $\varphi$  è (logicamente) **valida**”

Inoltre:

“ $\varphi$  è **soddisfacibile**”

“ $\varphi$  non è **falsificabile**”

# Formule e sottoinsiemi

- Si consideri l'insieme  $V$  di tutte le possibili interpretazioni  $v$

Ciascuna **fbf** di  $L_p$  corrisponde a un **sottoinsieme** di  $V$

Il sottoinsieme delle interpretazioni  $v$  che la soddisfano (modelli di  $\varphi$ )

Ad esempio, a  $\varphi$  corrisponde  $\{v : v(\varphi) = 1\}$  (si scrive anche  $\{v : v \models \varphi\}$ )

Il sottoinsieme potrebbe essere vuoto (se  $\varphi$  è una contraddizione)  
o coincidente con  $V$  (se  $\varphi$  è una tautologia)

Insieme di tutte le possibili  
**interpretazioni**  
(o mondi possibili)



“ $\varphi$  è una contraddizione”

“nessuna interpretazione in  $V$   
è un modello di  $\varphi$ ”

“ $\varphi$  non è (logicamente) **valida**”

Inoltre:

“ $\varphi$  non è **soddisfacibile**”

“ $\varphi$  è **falsificabile**”

# Formule e sottoinsiemi

- Si consideri l'insieme  $V$  di tutte le possibili interpretazioni  $v$

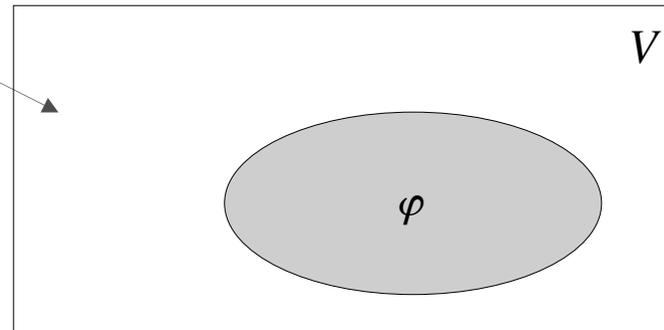
Ciascuna **fbf** di  $L_p$  corrisponde a un **sottoinsieme** di  $V$

Il sottoinsieme delle interpretazioni  $v$  che la soddisfano (modelli di  $\varphi$ )

Ad esempio, a  $\varphi$  corrisponde  $\{v : v(\varphi) = 1\}$  (si scrive anche  $\{v : v \models \varphi\}$ )

Il sottoinsieme potrebbe essere vuoto (se  $\varphi$  è una contraddizione)  
o coincidente con  $V$  (se  $\varphi$  è una tautologia)

Insieme di tutte le possibili  
**interpretazioni**  
(o mondi possibili)



“ $\varphi$  non è né una contraddizione  
né una tautologia”

“alcune interpretazioni in  $V$   
sono modelli di  $\varphi$ , altre no”

“ $\varphi$  non è (logicamente) **valida**”

Inoltre:

“ $\varphi$  è **soddisfacibile**”

“ $\varphi$  è **falsificabile**”

# Linguaggio naturale, linguaggio logico

- Il processo di traduzione (o formalizzazione)

Il linguaggio logico  $L_P$  è composto da simboli e regole di formazione

Le interpretazioni assegnano un significato (formale) alle fbf di  $L_P$

Che cosa rappresenta tutto ciò?

Le fbf di  $L_P$  sono le frasi di un linguaggio formale

Ciascuna rappresenta una frase in linguaggio naturale (p.es. in italiano)

Le fbf atomiche rappresentano singole affermazioni

“Giorgio è contento”

“Giorgio è un bipede senza piume”

“Tutti gli esseri umani sono bipedi senza piume”

Le fbf di  $L_P$  rappresentano frasi affermative composite, di senso compiuto

Di cui si può dire che siano vere o false

Quest'idea di traduzione non è esente da guai (paradossi)

“Questa proposizione è falsa”

# Relazioni tra formule

## ■ Premesse:

$$\varphi_1 = B \vee D \vee \neg(A \wedge C)$$

“Silvia è madre di Giorgio” OR “Giorgio è contento”  
OR NOT(“Giorgio è umano” AND “Giorgio è un bipede senza piume”)

$$\varphi_2 = B \vee C$$

“Silvia è madre di Giorgio” OR “Giorgio è un bipede senza piume”

$$\varphi_3 = A \vee D$$

“Giorgio è umano” OR “Giorgio è contento”

$$\varphi_4 = \neg B$$

NOT “Silvia è madre di Giorgio”

## ■ Affermazione:

$$\psi = D$$

“Giorgio è contento”

Qual'è il legame logico  
tra le premesse  
e l'affermazione?

E tra le premesse?

# Conseguenza logica

- La tavola di verità per le fbf dell'esempio

$$\varphi_1 = B \vee D \vee \neg(A \wedge C)$$

$$\varphi_2 = B \vee C$$

$$\varphi_3 = A \vee D$$

$$\varphi_4 = \neg B$$

---

$$\psi = D$$

Tutte le interpretazioni che soddisfano  $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$  soddisfano anche  $\psi$

A	B	C	D	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\psi$
0	0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	1

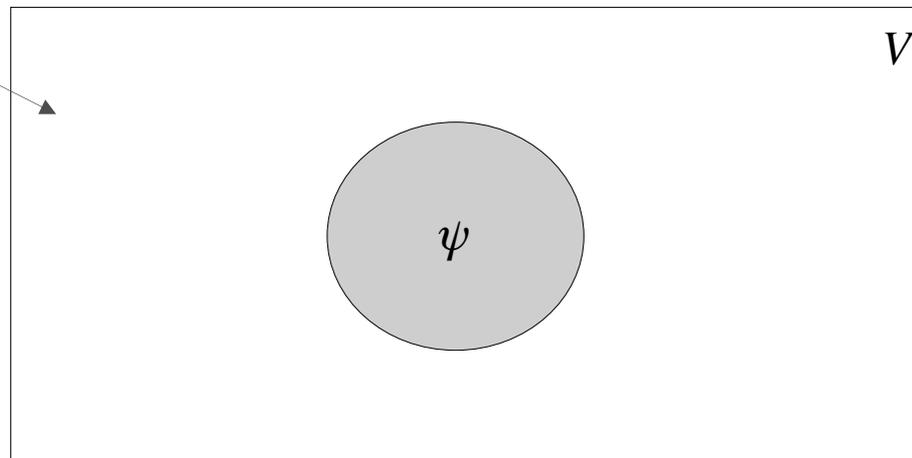
Relazione di **conseguenza logica**:  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models \psi$   
(*logical entailment*)

(Attenti alla notazione!)

# Formule, sottoinsiemi e conseguenza logica

- Si consideri l'insieme  $V$  di tutte le possibili interpretazioni  $v$

Insieme di tutte le possibili  
interpretazioni  
(o mondi possibili)

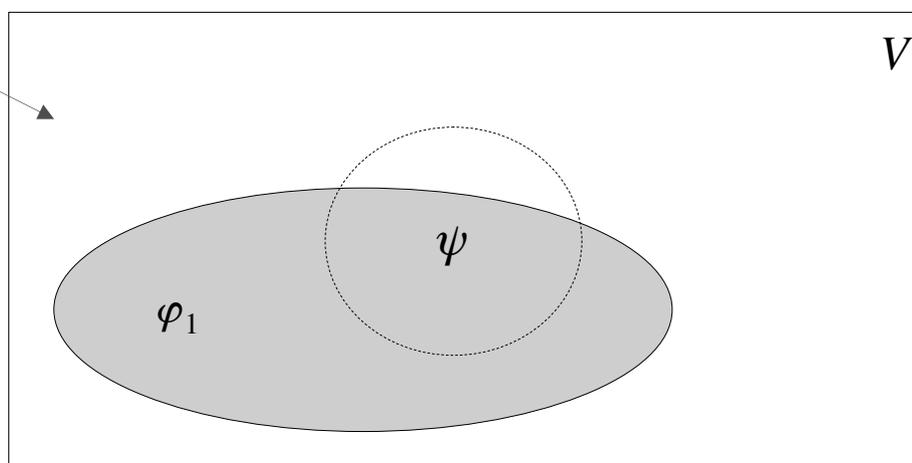


“Tutte le interpretazioni che sono modello di  $\psi$ ”

# Formule, sottoinsiemi e conseguenza logica

- Si consideri l'insieme  $V$  di tutte le possibili interpretazioni  $v$

Insieme di tutte le possibili  
interpretazioni  
(o mondi possibili)



“Tutte le interpretazioni che sono modello di  $\varphi_1$ ”

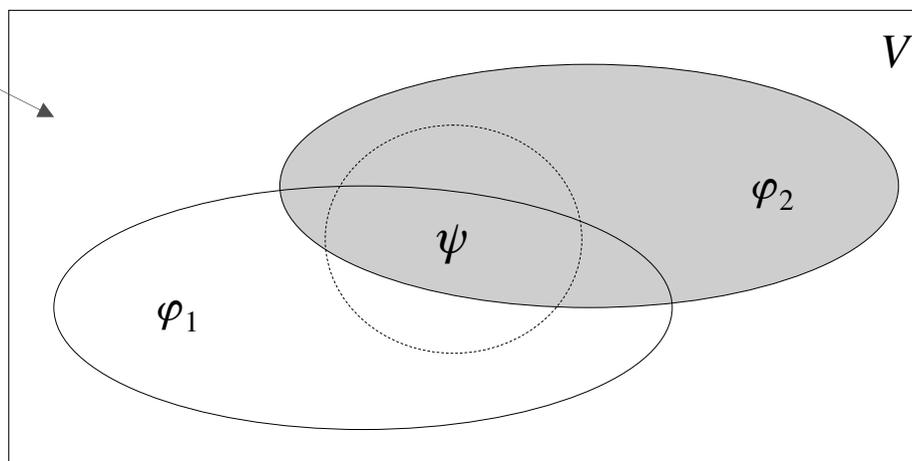
$\{\varphi_1\} \not\models \psi$

Perché l'insieme dei modelli di  $\{\varphi_1\}$   
non è contenuto nell'insieme dei modelli di  $\psi$

# Formule, sottoinsiemi e conseguenza logica

- Si consideri l'insieme  $V$  di tutte le possibili interpretazioni  $v$

Insieme di tutte le possibili interpretazioni (o mondi possibili)



“Tutte le interpretazioni che sono modello di  $\varphi_2$ ”

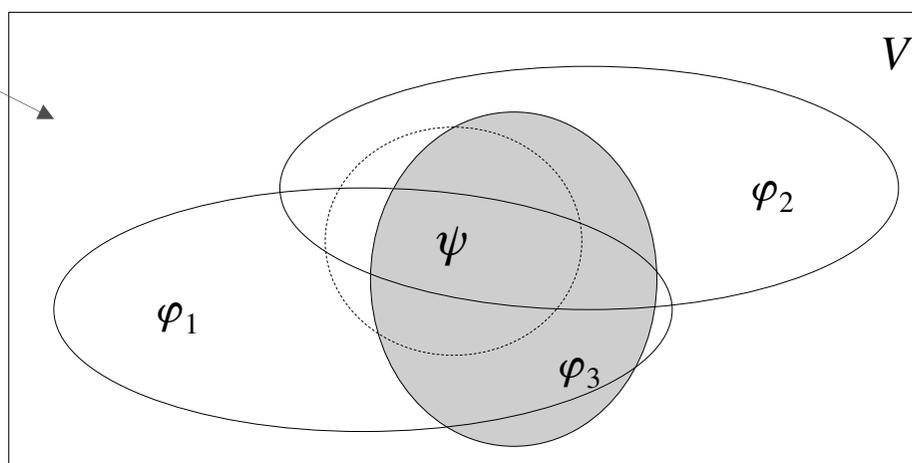
$$\{\varphi_1, \varphi_2\} \not\models \psi$$

Perché l'insieme dei modelli di  $\{\varphi_1, \varphi_2\}$  (intersezione) non è contenuto nell'insieme dei modelli di  $\psi$

# Formule, sottoinsiemi e conseguenza logica

- Si consideri l'insieme  $V$  di tutte le possibili interpretazioni  $v$

Insieme di tutte le possibili interpretazioni (o mondi possibili)



“Tutte le interpretazioni che sono modello di  $\varphi_3$ ”

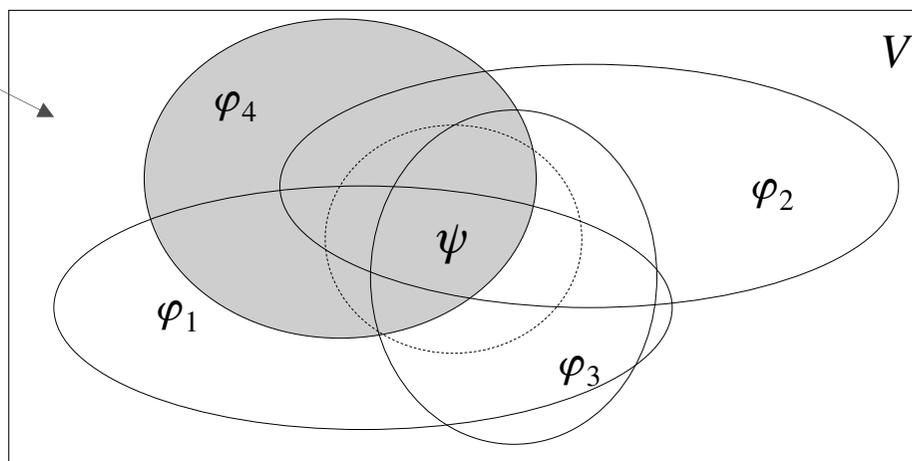
$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \not\models \psi$

Perché l'insieme dei modelli di  $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$  (intersezione) non è contenuto nell'insieme dei modelli di  $\psi$

# Formule, sottoinsiemi e conseguenza logica

- Si consideri l'insieme  $V$  di tutte le possibili interpretazioni  $v$

Insieme di tutte le possibili interpretazioni (o mondi possibili)



“Tutte le interpretazioni che sono modello di  $\varphi_4$ ”

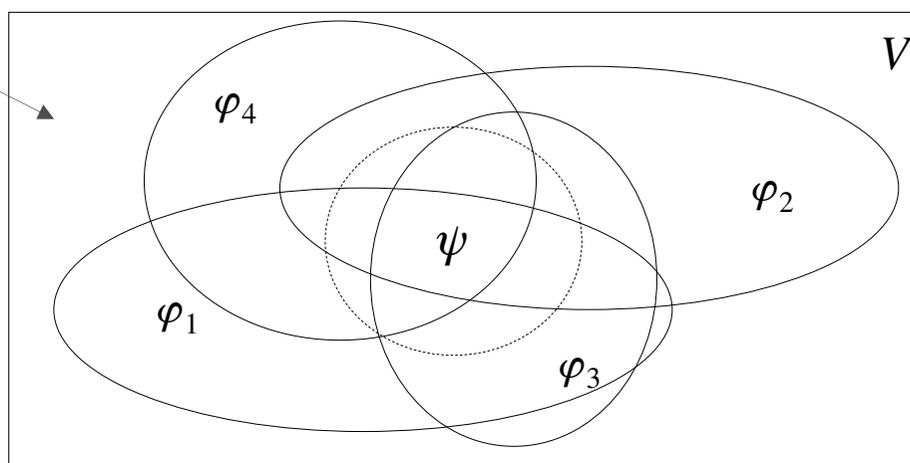
$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \models \psi$$

Perché l'insieme dei modelli di  $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$  (intersezione) è contenuto nell'insieme dei modelli di  $\psi$

# Formule, sottoinsiemi e conseguenza logica

- Si consideri l'insieme  $V$  di tutte le possibili interpretazioni  $v$

Insieme di tutte le possibili interpretazioni (o mondi possibili)



“Tutte le interpretazioni che sono modello di  $\varphi_4$ ”

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \models \psi$$

Perché l'insieme dei modelli di  $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$  (intersezione) è contenuto nell'insieme dei modelli di  $\psi$

In questo caso, tutte le premesse  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  sono necessarie: non c'è altro modo di costruire per intersezione un sottoinsieme dei modelli di  $\psi$

# Doppia conseguenza = equivalenza logica

## ■ Equivalenza

Si considerino due fbf  $\varphi$  e  $\psi$  tali per cui si abbia:

$$\varphi \models \psi \text{ e } \psi \models \varphi$$

Si dice allora che le due fbf sono **logicamente equivalenti**

$$\text{Si scrive } \varphi \equiv \psi$$

## ■ Sostituibilità

Due fbf equivalenti hanno gli stessi **modelli**

Ai fini della conseguenza logica, fbf equivalenti sono sostituibili

Anche come sotto-formule

Esempio:  $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \models \psi$

$$\varphi_1 = B \vee D \vee \neg(A \wedge C)$$

$$\varphi_2 = B \vee C$$

$$\varphi_3 = A \vee D$$

$$\varphi_4 = \neg B$$

$$\psi = D$$

$$\varphi_1 = B \vee D \vee (A \rightarrow \neg C)$$

$$\varphi_2 = B \vee C$$

$$\varphi_3 = \neg A \rightarrow D$$

$$\varphi_4 = \neg B$$

$$\psi = D$$

# Implicazione

Le fbf del problema precedente possono essere riscritte così:

Usando la base  $\{\rightarrow, \neg\}$

$$\varphi_1 = C \rightarrow (\neg B \rightarrow (A \rightarrow D))$$

$$\varphi_2 = \neg B \rightarrow C$$

$$\varphi_3 = \neg A \rightarrow D$$

$$\varphi_4 = \neg B$$

$$\psi = D$$

$$\varphi_1 = B \vee D \vee \neg(A \wedge C)$$

$$\varphi_2 = B \vee C$$

$$\varphi_3 = A \vee D$$

$$\varphi_4 = \neg B$$

$$\psi = D$$

- Validità (in termini di conseguenza logica) di schemi generali:

$$\varphi \rightarrow \psi$$

$$\varphi$$

$$\psi$$

Si può verificare direttamente, che

$$\varphi \rightarrow \psi, \varphi \models \psi$$

Analogamente

$$\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \models \neg\varphi$$

# Concetti essenziali

## ▪ Linguaggio simbolico

Formalismo rigoroso

Un insieme di simboli

Regole sintattiche (di buona formazione) per le fbf

## ▪ Semantica formale

Interpretazioni come funzioni dal linguaggio ad una struttura

Un'interpretazione assegna un valore a tutte le fbf del linguaggio

Per  $L_p$  la struttura di riferimento è molto semplice:  $\{1, 0\}$

## ▪ Soddisfacimento, conseguenza logica

Una fbf è soddisfatta da un'interpretazione che la rende vera

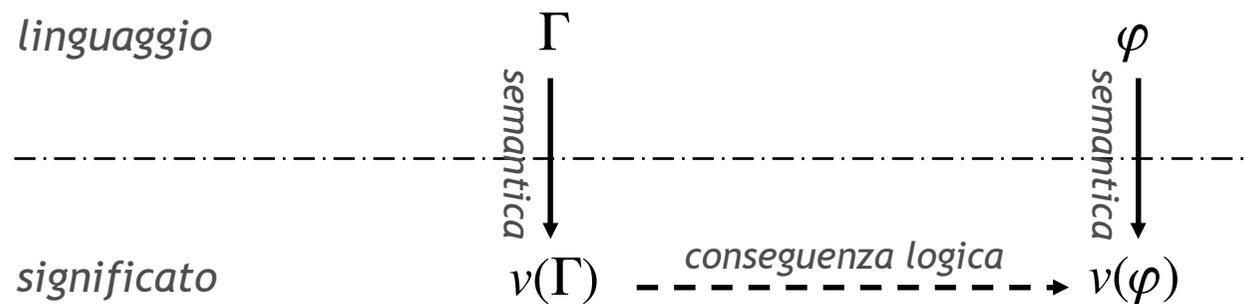
La conseguenza logica è una relazione tra fbf e/o insiemi di fbf

Ciascuna fbf è soddisfatta solo da alcune interpretazioni (sottoinsieme)

La relazione sussiste quando le interpretazioni che soddisfano le fbf delle premesse soddisfano anche la fbf (o le fbf) della conseguenza

Occorre considerare tutte le possibili interpretazioni (semantica *estensionale*)

# Concetti essenziali



# Sottigliezze: linguaggio oggetto e metalinguaggio

- Il linguaggio logico proposizionale  $L_P$  è il **linguaggio oggetto**

E' lo strumento con il quale ci proponiamo di lavorare

E' composto unicamente dai costrutti appena introdotti:

$P, \neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow, (, )$ , *regole sintattiche*, o di buona formazione

- **Metalinguaggio**: costrutti simbolici accessori

Usati per definire le caratteristiche del linguaggio oggetto

Lettere greche minuscole ( $\alpha, \beta, \chi, \varphi, \psi$ ) per indicare una formula (o fbf) qualsiasi

Lettere greche maiuscole ( $\Gamma, \Delta, \Sigma$ ) per indicare un'insieme di fbf qualsiasi

Simboli di conseguenza ed equivalenza logica:  $\models, \equiv$

Simboli di "se" e "se e solo se":  $\Rightarrow, \Leftrightarrow$

Ulteriori costrutti particolari  
verranno introdotti gradualmente